数理解析研究所講究録
第 1784 巻 2012 年 155-160

丹原関手と斜バーンサイド環

山形大学・理学部　小田文仁 (Fumihito Oda)
Faculty of Science, Yamagata University

1. はじめに

有限群の表現環，バーンサイド環，コホモロジー環等に共通した性質を取りだし，Tambara は TNR-functor を定義した [Tam], [Ta93]. その名は trace, norm, restriction という写像に由来する. TNR-functor は, Brun により Tambara functor と呼ばれ，現在に至っている [Br05]. Mackey functor は，有限 G-set の圏から単位元をもつ可換環上の加群の圏への関手の対である．特に，それらの加群がすべて環でありいくつかの条件を満たすとき，Green functor と呼ばれる. Tambara functor は，乗法的誘導をもつ可換環が対応する Green functor である.

斜バーンサイド環 (crossed Burnside ring) は [OY01] で紹介された．与えられた Mackey functor M と G-集合 X から新たな Mackey functor M_X を構成する手法は，Dress が紹介した [Dr72]. その手法は，現在 Dress 構成と呼ばれている．任意の Green functor A に G-monoid S が与える Dress 構成から得られる Mackey functor A_S は，自然に Green functor の構造をもつ．特に Burnside Green functor Ω に対しこの事実を適用することにより，斜バーンサイド環が与えられる．本稿では G-monoid S に可換性を仮定することで，任意の Tambara functor でも同様の事実が成立するという結果 [Tam], [OY11] の概観を与えたい. Mackey functor については [TW95], [We00], Burnside ring については [Bo00] がわかりやすくまとめられている.

講演の冒頭で紹介した Tambara functor に関する論文は，[Ta93], [Br05], [El06], [Na09], [OY11], [Na11] である.

G は有限群，$\mathcal{O}$ は単位元をもつ可換環とする．G-set は有限とする．G-set と G-map の圏を G-**set**，集合と写像の圏を **Set** と書く．単位元をもつ monoid は，monoid 準同型を誘導する G の作用に関する G-set であるとき G-monoid と呼ぶ．二つの G-集合 X, Y の disjoin union を $X+Y$ と書く.

2. Exponential diagrams

$f:X\longrightarrow Y$ を G-map とする．圏 G-**set**$/X$ の対象は G-map $\alpha:A\to X$ (X 上の G-set と呼ぶ), $A\overset{\alpha}{\to}X$ から $B\overset{\beta}{\to}X$ への射は G-map $f:A\to B$ で $\beta f=\alpha$ をみたすものである．X 上の G-set $\alpha:A\longrightarrow X$ に対し集合

$$\Pi_f A \;=\; \left\{(y,\sigma)\;\middle|\; \begin{array}{l} y\in Y,\ \sigma:f^{-1}(y)\longrightarrow A:\ \text{map},\\ \alpha\circ\sigma=\mathrm{id}_{f^{-1}(y)}\end{array}\right\}$$

に G-作用を

$$g(y,\sigma):=(gy,{}^g\sigma),\quad {}^g\sigma(x):=g\sigma(g^{-1}x),\quad (g\in G)$$

で定め，$\Pi_f A$ から Y への射影 $(y,\sigma)\mapsto y$ を $\Pi_f\alpha$ と書く．G-map $f:X\to Y$ に対し pullback functor

$$\begin{array}{rcccc} f^* & : & G\text{-}\mathbf{set}/Y & \longrightarrow & G\text{-}\mathbf{set}/X\\ & & (B\longrightarrow Y) & \longmapsto & (X\times_Y B\xrightarrow{\mathrm{pr}}X)\end{array}$$

は左随伴関手

$$\begin{array}{rcccc} \Sigma_f & : & G\text{-}\mathbf{set}/X & \longrightarrow & G\text{-}\mathbf{set}/Y\\ & & (A\xrightarrow{\alpha}X) & \longmapsto & (A\xrightarrow{\alpha}X\xrightarrow{f}Y)\end{array}$$

と右随伴関手

$$\begin{array}{rcccc} \Pi_f & : & G\text{-}\mathbf{set}/X & \longrightarrow & G\text{-}\mathbf{set}/Y\\ & & (A\xrightarrow{\alpha}X) & \longmapsto & (\Pi_f A\xrightarrow{\Pi_f\alpha}Y)\end{array}$$

をもつ．二つの自然変換

$$\Sigma_f \xleftarrow{\Sigma_f\varepsilon'} \Sigma_f f^*\Pi_f \xrightarrow{\varepsilon\Sigma_f} \Pi_f$$

(ただし，ε' は随伴 $f^* \dashv \Pi_f$ の余単位射，ε は随伴 $\Sigma_f \dashv f^*$ の余単位射) は $A \xrightarrow{\alpha} X$ に対し，図式

$$\Sigma_f\begin{pmatrix} A \\ \downarrow\alpha \\ X\end{pmatrix} \xleftarrow{\Sigma_f\varepsilon'(\alpha)} \Sigma_f f^*\Pi_f\begin{pmatrix} A \\ \downarrow\alpha \\ X\end{pmatrix} \xrightarrow{\varepsilon\Pi_f(\alpha)} \Pi_f\begin{pmatrix} A \\ \downarrow\alpha \\ X\end{pmatrix},$$

すなわち

$$\begin{tikzcd}
 & X \times_Y \Pi_f A \arrow[dl, "\Sigma_f\varepsilon'(\alpha)=e"'] \arrow[d, "p_X"] \arrow[drr, "\varepsilon\Pi(\alpha)=p_{\Pi_f A}"] & & \\
A \arrow[r, "\alpha"'] & X \arrow[d, "f"] & & \Pi_f A \arrow[dll, "\Pi_f\alpha"] \\
 & Y, & &
\end{tikzcd}$$

(ただし，$e : X \times_Y \Pi_f A \ni (x,(y,\sigma)) \longmapsto \sigma(x) \in A$,　$p_X, p_{\Pi_f A}$ は射影) を与える．この図式

$$\begin{tikzcd}
 & A \arrow[dl, "\alpha"'] & X \times_Y \Pi_f A \arrow[l, "e"'] \arrow[dd, "f'"] \\
X \arrow[d, "f"] & EXP & \\
Y & & \Pi_f A \arrow[ll, "\Pi_f\alpha"']
\end{tikzcd}$$

($f' = p_{\Pi_f A}$ とする) を Tambara は canonical exponential diagram と呼び，TNR-関手の公理化に用いた．

3. Tambara functors

Tambara functor の定義を与える．G-map $f : X \longrightarrow Y$ に対し関手の三つ組

$$\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{T}_!, \boldsymbol{T}^*, \boldsymbol{T}_\star) : G\textbf{-set} \longrightarrow \textbf{Set},$$

$$\boldsymbol{T}(X) := \boldsymbol{T}_!(X) = \boldsymbol{T}^*(X) = \boldsymbol{T}_\star(X),$$

$$f_! := \boldsymbol{T}_!(f), f_\star := \boldsymbol{T}_\star(f) : \boldsymbol{T}(X) \longrightarrow \boldsymbol{T}(Y), f^* : \boldsymbol{T}(Y) \longrightarrow \boldsymbol{T}(X)$$

は以下の条件を満たすとき *semi-Tambara functor* と呼ばれる:

(T.1) (Additivity)

$$X \xrightarrow{i} X + Y \xleftarrow{j} Y \Rightarrow \boldsymbol{T}(X+Y) \cong \boldsymbol{T}(X) \times \boldsymbol{T}(Y)$$

and $\boldsymbol{T}(\emptyset) = 0 (:= \{0\})$. (T.2) (Pullback formula)

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "a"] \arrow[d, "b"'] \arrow[dr, phantom, "PB"] & Y \arrow[d, "c"] \\
Z \arrow[r, "d"'] & W
\end{tikzcd}
\Rightarrow
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{T}(X) \arrow[r, "a_!"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \boldsymbol{T}(Y) \\
\boldsymbol{T}(Z) \arrow[r, "d_!"'] \arrow[u, "b^*"] & \boldsymbol{T}(W), \arrow[u, "c^*"']
\end{tikzcd}
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{T}(X) \arrow[r, "a_\star"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & \boldsymbol{T}(Y) \\
\boldsymbol{T}(Z) \arrow[r, "d_\star"'] \arrow[u, "b^*"] & \boldsymbol{T}(W). \arrow[u, "c^*"']
\end{tikzcd}$$

(T.3) (Distributive law)

$$
\begin{array}{ccc}
\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "f"'] & A \arrow[l, "a"'] & X \times_Y \Pi_f A \arrow[l, "e"'] \arrow[d, "f'"] \\
Y \arrow[rr, phantom, "EXP", shift left=4ex] & & \Pi_f A \arrow[ll, "q"]
\end{tikzcd}
& \Rightarrow &
\begin{tikzcd}
\boldsymbol{T}(X) \arrow[d, "f_\star"'] & \boldsymbol{T}(A) \arrow[l, "a_!"'] \arrow[r, "e^*"] & \boldsymbol{T}(X \times_Y \Pi_f A) \arrow[d, "f'_\star"] \\
\boldsymbol{T}(Y) \arrow[rr, phantom, "\circlearrowleft", shift left=4ex] & & \boldsymbol{T}(\Pi_f A). \arrow[ll, "q_!"]
\end{tikzcd}
\end{array}
$$

すべての $\boldsymbol{T}(X)$ が可換環で $f_!, f^*, f_\star$ がそれぞれ加法群，環，乗法的モノイドの準同型であるならば，$\boldsymbol{T}$ は *Tambara functor* と呼ばれる．

$(\boldsymbol{T}_!, \boldsymbol{T}^*)$ は (T.1), (T.2) を満たすとき，*semi-Mackey functor* と呼ばれる．semi-Mackey functor $(\boldsymbol{T}_!, \boldsymbol{T}^*)$ は $T(X)$ が $\mathcal{O}$-加群で，$f_!, f^*$ が $\mathcal{O}$-準同型であるならば，G の $\mathcal{O}$ 上の *Mackey functor* と呼ばれる．

4. 例

Tambara functor の例を述べる．

1. Invariant ring functors

R を可換な G-ring とする．任意の G-set X に対し X から R への G-map の集合を

$$\tilde{R}(X) = \mathrm{Hom}_G(X, R)$$

とする．H が G の部分群であるならば，$\tilde{R}(G/H)$ は invariant ring R^H と同型である．G-map $f : X \longrightarrow Y$ は 3 つの写像を誘導する:

$$
\begin{aligned}
f_! &: \tilde{R}(X) \longrightarrow \tilde{R}(Y); \varphi \longmapsto f_!(\varphi)(y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \varphi(x), \\
f^* &: \tilde{R}(Y) \longrightarrow \tilde{R}(X); \psi \longmapsto f^*(\psi)(x) = \psi(f(x)), \\
f_\star &: \tilde{R}(X) \longrightarrow \tilde{R}(Y); \varphi \longmapsto f_\star(\varphi)(y) = \prod_{x \in f^{-1}(y)} \varphi(x).
\end{aligned}
$$

このとき $\tilde{R}(X)$, $f_!$, f^*, $f_\star$ は Tambara functor $\tilde{R}$ を構成する．

2. Burnside functors.

任意の G-set X に対し $\Omega_+(X)$ を X 上の G-set の同型類 $[A \longrightarrow X]$ 全体の集合とする．このとき $\Omega_+(X)$ は圏 G-**set**$/X$ の coproducts と products に関する半環である．G-map $f : X \longrightarrow Y$ は 3 つの写像を誘導する:

$$
\begin{aligned}
f_! &: \Omega_+(X) \longrightarrow \Omega_+(Y); [A \xrightarrow{\alpha} X] \longmapsto [A \xrightarrow{\alpha} X \xrightarrow{f} Y], \\
f^* &: \Omega_+(Y) \longrightarrow \Omega_+(X); [B \longrightarrow Y] \longmapsto [X \times_Y B \xrightarrow{p_X} X], \\
f_\star &: \Omega_+(X) \longrightarrow \Omega_+(Y); [A \xrightarrow{\alpha} X] \longmapsto [\Pi_f(A) \xrightarrow{\Pi_f \alpha} Y].
\end{aligned}
$$

このとき $\Omega_+(X)$, $f_!$, f^*, $f_\star$ は semi-Tambara functor Ω_+ を構成する．例えば以下の図式は $f_\star : \Omega_+(X) \longrightarrow \Omega_+(Y)$ が monoid 準同型であることを示している．

$$
\begin{tikzcd}
 & & & X \times_Y \Pi_f A_1 \arrow[dll, "e_1"'] \arrow[ddddd, "f_1"] & \\
 & A_1 \arrow[dl, "\alpha_1"'] & & & \\
\boxed{X} \arrow[dddd, "f"'] & & \boxed{A_1 \times_X A_2} \arrow[ul] \arrow[dl] \arrow[ll, "\alpha_3"] & & X \times_Y \Pi_f(A_1 \times_X A_2) \arrow[ll, "e_3"'] \arrow[uul] \arrow[ddll] \arrow[dddd, "f_3"] \\
 & A_2 \arrow[ul, "\alpha_2"] & & & \\
 & & X \times_Y \Pi_f A_2 \arrow[ul, "e_2"] \arrow[ddd, "f_2"] & & \\
 & & & \Pi_f A_1 \arrow[dlll, "\Pi_f \alpha_1"'] & \\
\boxed{Y} & & & & \boxed{\Pi_f(A_1 \times_X A_2)} \arrow[llll, "\Pi_f \alpha_3"] \arrow[ul] \arrow[dll] \\
 & & \Pi_f A_2 \arrow[ull, "\Pi_f \alpha_2"] & &
\end{tikzcd}
$$

$\Omega(X)$ を G-**set**$/X$ の Grothendieck ring とすると，$\Omega(X)$, $f_!$, f^*, $f_\star$ は Tambara functor を構成する．

5. Crossed Burnside rings

S を G-monoid，X を G-set とする．

- 圏 G-**xset**$/S \times X$ の対象は，$S \times X$ 上の *crossed G-map* (斜 G-写像) $A \xrightarrow{\|\cdot\| \times \alpha} S \times X$ (ただし，$\|\cdot\|$ は weight function と呼ばれる G-map $A \xrightarrow{\|\cdot\|} S$，$\alpha$ は G-map $A \xrightarrow{\alpha} X$)．$\|\cdot\| \times \alpha$ を省略して $A \xrightarrow{\alpha} S \times X$ と書く．
- $A \xrightarrow{\alpha} S \times X$ から $B \xrightarrow{\beta} S \times X$ への射 f は G-map $f : A \longrightarrow B$ で $\beta f = \alpha$ と $\|f(a)\| = \|a\|$ を満たすものである．

任意の二つの対象 $A \xrightarrow{\alpha} S \times X$ と $B \xrightarrow{\beta} S \times X$ に対し和と積を以下のように定める．

- $(A \xrightarrow{\alpha} S \times X) + (B \xrightarrow{\beta} S \times X) = (A \coprod B \xrightarrow{\alpha \cup \beta} S \times X)$,
- $(A \xrightarrow{\alpha} S \times X) \cdot (B \xrightarrow{\beta} S \times X) = (A \times_X B \xrightarrow{p} S \times X)$, ただし，$p$ はファイバー積，weight function は $\|(a,b)\| = \|a\| \cdot \|b\|$ で定義する．

斜バーンサイド環 (crossed Burnside ring, 以下 CBR と書く) $X\Omega(G,S,X)$ は圏 G-**xset**$/S \times X$ の Grothendieck 環として定義する．X が 1 点集合のとき $X\Omega(G,S,X)$ は CBR $X\Omega(G,S)$ ([OY01]) と同型である．

6. CBR as a Green functor

Green functor は Mackey functors (とそれらの間の自然変換) の圏の monoid 対象 [ML98, p.75] として定義される．G の $\mathcal{O}$ 上の *Green functor* $A = (A_!, A^*)$ は，G の $\mathcal{O}$ 上の Mackey functor であり，任意の G-sets X，Y に関する bilinear maps

$$A(X) \times A(Y) \to A(X \times Y) : (a, b) \mapsto a \times b$$

が以下の条件をみたすものである．

- 二つの G-maps $f : X \to X'$，$g : Y \to Y'$ に対し以下の図式が可換である．

$$
\begin{tikzcd}
A(X) \times A(Y) \arrow[r, "\times"] \arrow[d, "A_!(f) \times A_!(g)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A(X \times Y) \arrow[d, "A_!(f \times g)"] \\
A(X') \times A(Y') \arrow[r, "\times"'] & A(X' \times Y'),
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A(X) \times A(Y) \arrow[r, "\times"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A(X \times Y) \\
A(X') \times A(Y') \arrow[r, "\times"'] \arrow[u, "A^*(f) \times A^*(g)"] & A(X' \times Y') \arrow[u, "A^*(f \times g)"'].
\end{tikzcd}
$$

- 三つの G-sets X, Y, Z に対し以下の図式が可換である.

$$\begin{tikzcd} A(X)\times A(Y)\times A(Z) \arrow[r, "Id\times(\times)"] \arrow[d, "(\times)\times Id"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & A(X)\times A(Y\times Z) \arrow[d, "\times"] \\ A(X\times Y)\times A(Z) \arrow[r, "\times"'] & A(X\times Y\times Z) \end{tikzcd}$$

- $\bullet$ を 1 点集合とする. 任意の G-set X と任意の $a\in A(X)$ に対し, $\varepsilon_A\in A(\bullet)$ が存在し以下の条件をみたす.

$$A_*(p_X)(a\times\varepsilon_A)=a=A_*(q_X)(\varepsilon_A\times a),$$

ただし, $X\times\bullet\overset{p_X}{\cong}X$, $\bullet\times X\overset{q_X}{\cong}X$ は全単射な射影とする.

Dress 構成を用いた CBR の Green functor は以下の定理として知られている.

Theorem ([Bo03], [OY04])
S を G-monoid, $\boldsymbol{A}$ を Green functor とする. このとき Mackey functor $\boldsymbol{A}$ の S による Dress 構成によって与えられる Mackey functor $\boldsymbol{A}_S$ は Green functor の構造をもつ.

この定理により Burnside Green functor Ω と G-monoid S から Green functor $\Omega_S(=:\mathbf{X\Omega}(G,S,*))$ を得る. 特に G-map $f:X\to Y$ は二つの写像

$$\begin{array}{llllllll} f_! & : & \mathbf{X\Omega}(G,S,X) & \longrightarrow & \mathbf{X\Omega}(G,S,Y) & : & [A\xrightarrow{\alpha}S\times X] & \longmapsto & [A\xrightarrow{\alpha}S\times X\xrightarrow{1_S\times f}S\times Y], \\ f^* & : & \mathbf{X\Omega}(G,S,Y) & \longrightarrow & \mathbf{X\Omega}(G,S,X) & : & [B\xrightarrow{\beta}S\times Y] & \longmapsto & [X\times_Y B\xrightarrow{\|\cdot\|\times pr}S\times X] \end{array}$$

(ただし, weight function $\|\cdot\|:X\times_Y B\to S$ は $\|(x,b)\|=\|b\|$ for $(x,b)\in X\times_Y B$) を誘導する.

7. CBR as a Tambara functor

Dress 構成を用いた CBR の Tambara functor の構成を述べる. Green functor の場合とは異なり, G-monoid の可換性が必要である.

S を可換な G-monoid とする. $\ :S\times S\to S$ を積, $\eta:\{1\}\to S$ を単位射, $\boldsymbol{T}$ を任意の Tambara functor とする. G-set X に対し $\boldsymbol{T}_S(X)=\boldsymbol{T}(S\times X)$ で $\boldsymbol{T}_S$ を定義する. $\boldsymbol{T}_S(X)$ の二項演算 $\cdot_S$ を

$$x\cdot_S x'=(\quad\times 1_X)_!\ (p_1\times 1_X)^*(x)\cdot(p_2\times 1_X)^*(x')$$

で定める. このとき $\boldsymbol{T}_S(X)$ は演算 $\cdot_S$ に関して $(\eta\times 1_X)_!(1)$ を単位元にもつ環となる.

$f:X\to Y$ を G-map とする. Green functor の場合と同様に $f^*:\boldsymbol{T}_S(Y)\to\boldsymbol{T}_S(X)$, $f_!:\boldsymbol{T}_S(X)\to\boldsymbol{T}_S(Y)$ を $(1_S\times f)^*$, $(1_S\times f)_!$ でそれぞれ定める.

写像 $f_\star:\boldsymbol{T}_S(X)\to\boldsymbol{T}_S(Y)$ を定義するため canonical exponential diagram

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & S\times X \arrow[l, "a"'] & X\times_Y \Pi_f(S\times X) \arrow[l, "e"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & & \Pi_f(S\times X). \arrow[ll, "q"] \end{tikzcd}$$

を作る. ${}_f:\Pi_f(S\times X)\to S\times Y$ を

$${}_f\left(y,f^{-1}(y)\xrightarrow{s}S\times X\right)=\left(\prod_{x\in f^{-1}(y)}\tilde{s}(x),y\right),$$

(ここで, $\tilde{s}$ は s と射影 $S\times X\to S$ の合成とする) で与えられる $S\times Y$ 上の G-set とする. このとき $f_\star:\boldsymbol{T}_S(X)\to\boldsymbol{T}_S(Y)$ を合成写像

$$\boldsymbol{T}(S\times X)\xrightarrow{e^*}\boldsymbol{T}\left(X\times_Y\Pi_f(S\times X)\right)\xrightarrow{f'_\star}\boldsymbol{T}\left(\Pi_f(S\times X)\right)\xrightarrow{\mu_{f!}}\boldsymbol{T}(S\times Y)$$

で定義する.

Theorem ([Tam], [OY11]) S を可換な *G-monoid*, $\boldsymbol{T}$ を任意の *Tambara functor* とする. このとき, 上の $\boldsymbol{T}_S(X)$, f^*, $f_!$, $f_\star$ は *Tambara functor* を構成する.

謝辞

柳田伸顕氏からは, 新たな丹原関手の例に関するコメントをいただいた. 佐々木洋城氏からは, 激励をいただいた. 集会の運営に尽力され, 講演の機会を与えてくださった研究代表者のお二人に, 心より感謝申し上げる.

References

[Bo00] S. Bouc, Burnside rings, Handbook of algebra, Vol. 2, 739–804,

[Bo03] S. Bouc, Hochschild constructions for Green functors, Comm. Algebra **31** (2003) 419–453.

[Br05] M. Brun, Witt vectors and Tambara functors, *Adv. Math.* **193** (2005), 233–256.

[Dr72] A. W. M. Dress, Contributions to the theory of induced representations, Algebraic K-theory, II, 183–240, Lecture Notes in Math., **342**, Springer, Berlin, 1973.

[El06] J. Elliott, Constructing Witt-Burnside rings, *Adv. Math.*, (2006), 319–363.

[ML98] S. Mac Lane, Categories for the Working Mathematician, 2nd edition, GTM **5**, Springer, (1998).

[Na09] H. Nakaoka, Tambara functors on profinite groups and generalized Burnside functors, *Comm. Algebra*, **37** (2009), 3095–3151.

[Na11] H. Nakaoka, Tambarization of a Mackey functor and its application to the Witt-Burnside construction, *Adv. Math.*, **227** (2011), 2107–2143.

[OY01] F. Oda and T. Yoshida, Crossed Burnside Rings I. The Fundamental Theorem , *J. Algebra* **236** (2001), 29–79.

[OY04] F. Oda and T. Yoshida, Crossed Burnside rings II. The Dress construction of a Green functor, *J. Algebra* **283** (2004), 58–82.

[OY11] F. Oda and T. Yoshida, The crossed Burnside rings III. The Dress construction for a Tambara functor, *J. Algebra* **327** (2011), 31–49.

[Tam] D. Tambara, Multiplicative transfer and Mackey functor, unpublished.

[Ta93] D. Tambara, On multiplicative transfer, *Comm. Algebra* **21** (1993) 1393–1420.

[TW95] J. Thévenaz and P.J. Webb, The structure of Mackey functors, *Trans. Amer. Math. Soc.* **347** (1995), 1865–1961.

[We00] P. Webb, A guide to Mackey functors, Handbook of algebra, Vol. 2, 805–836,