無限解析大意レポート問題

3 問以上解答して 8 月 3 日までに提出すること．レポート問題は

$$http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/\sim hiroshima/lecture.html$$

に置いてあります．以下 $\mathcal{H}$ は複素数体上のヒルベルト空間とする．

問 1. $M \subset \mathcal{H}$ を閉集合とする．このとき $\mathcal{H} = M + \oplus M^\perp$ となることを示せ．

問 2. T は $\mathcal{H}$ 上の可閉作用素とし, $G(T) = \{(x, Tx) \in \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} | x \in D(T)\}$ とする．このとき以下の (1)-(3) を全て満たす作用素 $\bar{T}$ が存在することを示せ．

(1) $\bar{T}$ は閉作用素.

(2) $\overline{G(T)} = G(\bar{T})$

(3) $T \subset \bar{T}$ で, $\bar{T}$ は T の最小閉拡大.

問 3. T は対称閉作用素とし, $(f, G)_T = (f, g)_\mathcal{H} + (T^*f, T^*g)_\mathcal{H}$ で $D(T^*)$ に内積を定める．このとき次を示せ．

$$D(T^*) = D(T) \oplus_T K_+ \oplus_T K_-$$

ここで $\oplus_T$ は $(\cdot, \cdot)_T$ に関する直和, $K_\pm = Ker(i \mp T^*)$.

問 4. 対称閉作用素 T の不足指数 (n, m) が $0 < n = m$ なとき T の自己共役拡大が存在することを示せ．また $n = m = 0$ なとき自己共役であることを示せ．さらに $0 = n < m$ なとき自己共役拡大が存在しないことを示せ．

問 5. $\mathcal{I} = \{A \in B(\mathcal{H}) | \exists A^{-1} \in B(\mathcal{H})\}$ とする．

(1) $\mathcal{I} \subset B(\mathcal{H})$ が作用素ノルムで開集合であることを示せ．

(2) 写像 $\mathcal{I} \ni A \to A^{-1} \in \mathcal{I}$ が連続であることを示せ．

問 6. E をスペクトル測度とする．$U_t = \int e^{i\lambda t} dE_\lambda$ とする．このとき $(1) U_t$ はユニタリー, $(2) U_0 = I$, (3) $U_t U_s = U_{t+s}$, (4) $t \mapsto U_t$ は強連続であることを示せ．

問 7. Riesz-Markov-角谷の定理を自分で調べて証明せよ．