時 間 の 数 理

廣 島 文 生*

2010 年 7 月 30 日・九大公開講座

* 九州大学大学院数理学研究院

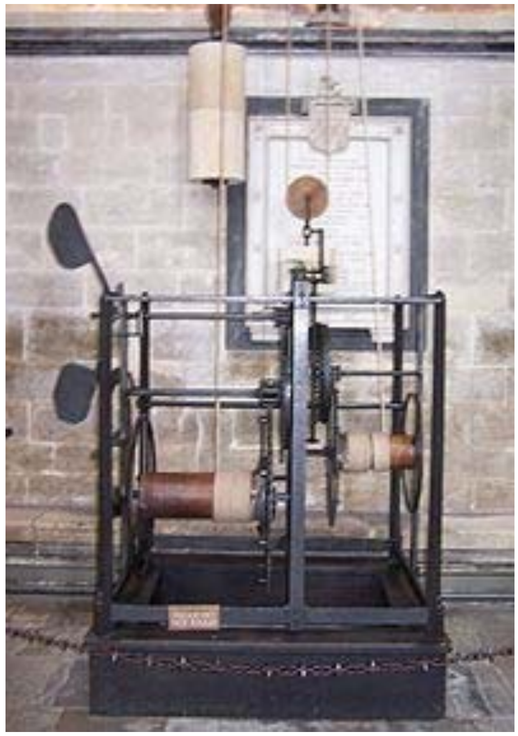
1　いろいろな時間

1.1　地球の歴史

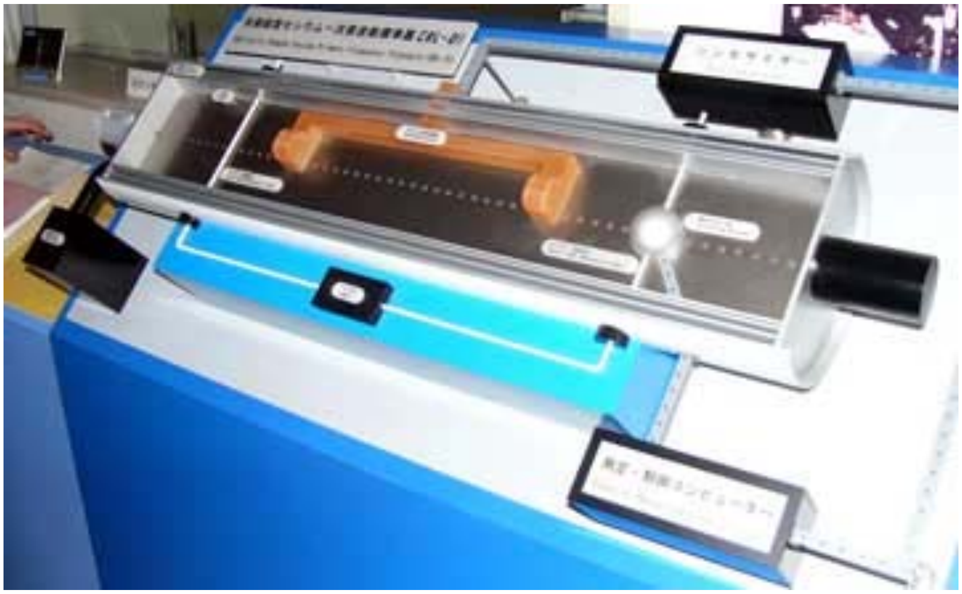
1. 46億年前　地球誕生
2. 35億年前　生命誕生
3. 15億年前　原生生物出現
4. 5億7500万年前　古生代始まる
5. 4億年前　生命陸上に上陸
6. 2億3000万年前　恐竜出現
7. 6500万年前　恐竜絶滅
8. 400万年前　アウストラロピテクス現れる

9. 2万年前　新人(我々)出現
10. 1万年前　農業起きる
11. 5000年前　アイスマン死亡(エジプト文明起こった頃)

●最古の時計(復元模型)



● セシウム原子時計・・・ 91億9263万1770Hzの放射

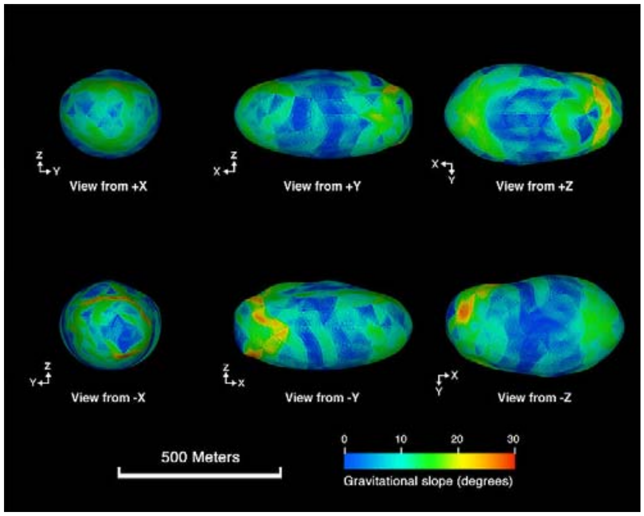


●はやぶさが小惑星「いとかわ」を観測

アレシボ電波望遠鏡（プエルト・リコ）

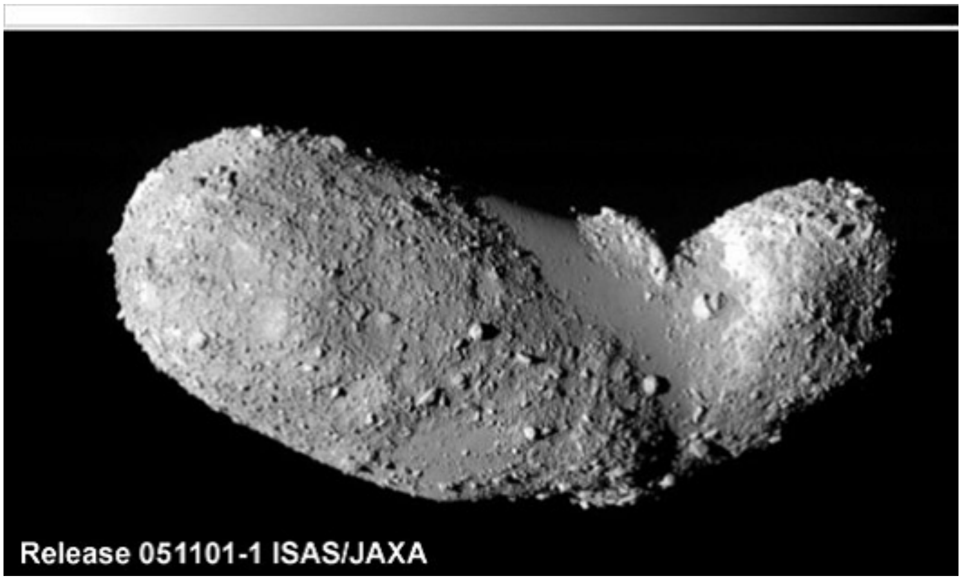
●小惑星「いとかわ」の形を計測

●**J.Ostro,** *Mateoritics and Planetaly Science* **39 (2004), 407–424.**

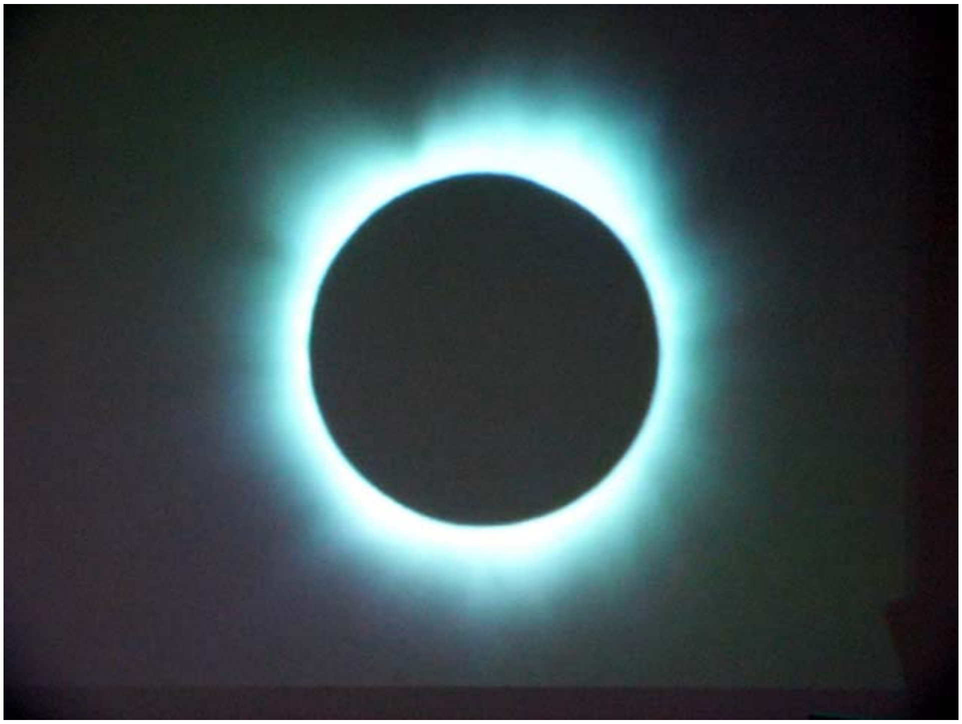


- **548 × 312 × 276 m ± 10%**
- **光速=299,792,458 m/s**

●はやぶさ··· 2003年5月9日打ち上げ$\Longrightarrow$ 2010年6月13日帰還



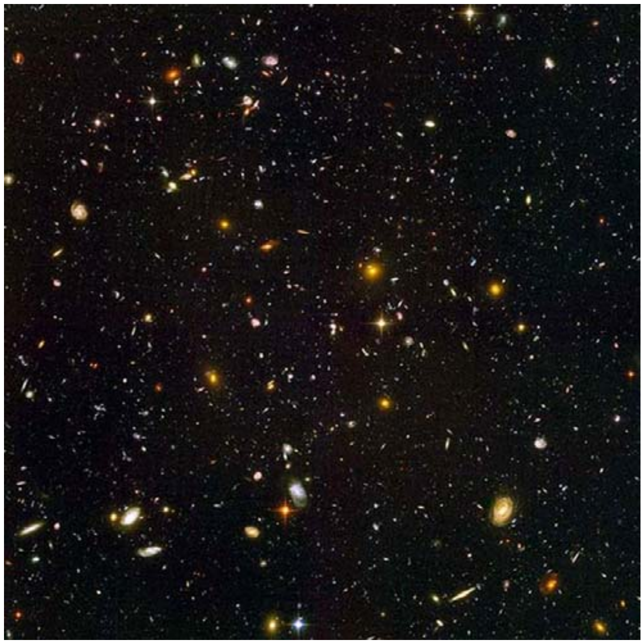
● $535 \times 294 \times 209$ m



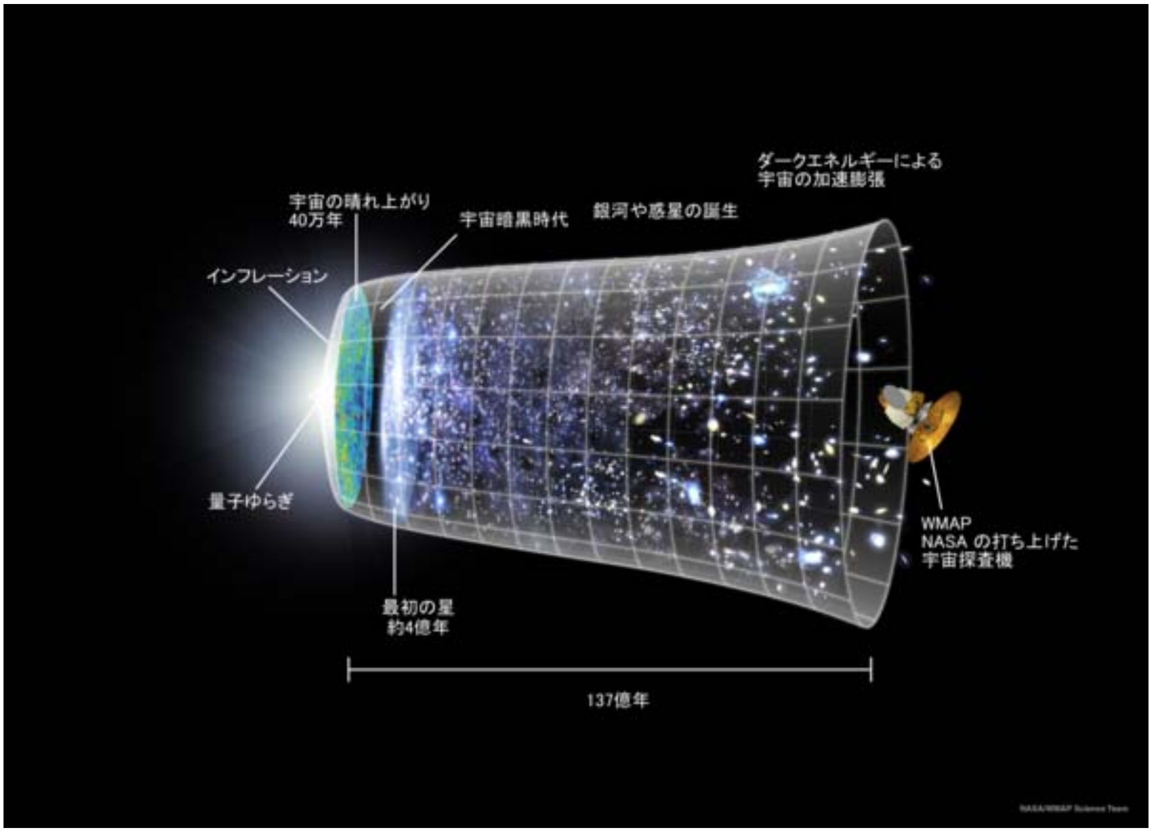
●日本最古の星食記録は舒明天皇12年春2月甲戌（西暦640年3月4日）

- セシウム原子時計をつかった検証。
- 20時間飛行で$\frac{4}{1億}$秒の遅れ。(1971年，J・ヘイフェル, R. キーティング)

● ハッブルがとらえた133億光年彼方の深宇宙



● 宇宙の年齢137億歳 $\approx 10^{10}$年


ダークエネルギーによる
宇宙の加速膨張
宇宙の晴れ上がり
40万年
宇宙暗黒時代
銀河や惑星の誕生
インフレーション
量子ゆらぎ
WMAP
NASA の打ち上げた
宇宙探査機
最初の星
約4億年
137億年

1. 10^{14} 年後 (100 兆年後), 宇宙はブラックホールと冷えた白色矮星 (黒色矮星) だけになる
2. 10^{18} 年後, ブラックホールだけになる
3. 10^{34} 年後, 陽子の崩壊がおき，光子と電子・陽電子，ニュートリノだけの世界になる
4. 10^{100} 年後, ブラックホールも徐々にエネルギーを失い，蒸発してしまう

$$\text{時間} \propto (\text{体重})^{1/4}$$

息をする時間，心臓が打つ時間，血液が体内を一巡する時間，寿命など

$$\text{寿命} \div \text{息をする時間} = \text{定数}(5\text{億})$$

●量子力学と関係した時間

W. パウリ曰く

「時間は物理的観測量ではない」

数学的議論

$\Longrightarrow$ 強時間作用素と弱時間作用素

2 量子力学

2.1 古典力学

E＝運動エネルギーK＋位置エネルギーV

1. 速度v, 質量mの物体の運動エネルギー

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

2. 位置xにある質量mの物体の位置エネルギー

$$V = gmh(x)$$

$h(x)\cdots$ **地表と物体の距離，**$g\cdots$ **重力定数**

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(x)$$

運動量$\cdots$ $p = mv$

$$E = \frac{1}{2m}p^2 + V(x) \tag{2.1}$$

例 位置エネルギーを無限遠点を基準にして考える。位置x**，速度**v**で自転する人工衛星のエネルギー**

$$E = \frac{1}{2m}p^2 - \frac{gmM}{|x|} \tag{2.2}$$

$M \cdots$ **地球の質量**

$$v = c = \text{光速} = 3 \times 10^8,$$
$$g = 6.6 \times 10^{-11},$$
$$M = 6 \times 10^{24} (MKS\text{単位系})$$

$E = 0$ **となる** $r = |x|$ **を求めると**

$$r = \frac{2gM}{c^2} \simeq \frac{8 \times 10^{14}}{9 \times 10^{16}} \simeq 1 \times 10^{-2} = 1cm$$

量子力学$\cdots$ pやxを「作用素」という概念に置きかえる：<u>作用素 : 関数 $\to$ 関数</u>

1. $P : f \to -i\dfrac{df}{dx}$

2. $S : f \to Vf$

3. $\Delta : f \to \dfrac{d^2 f}{dx^2}$

4. $Q : f \to xf$

●量子化

$$p \to P, \qquad V(x) \to V(Q). \tag{2.3}$$

$$E \to H = \frac{1}{2m}P^2 + V(Q). \tag{2.4}$$

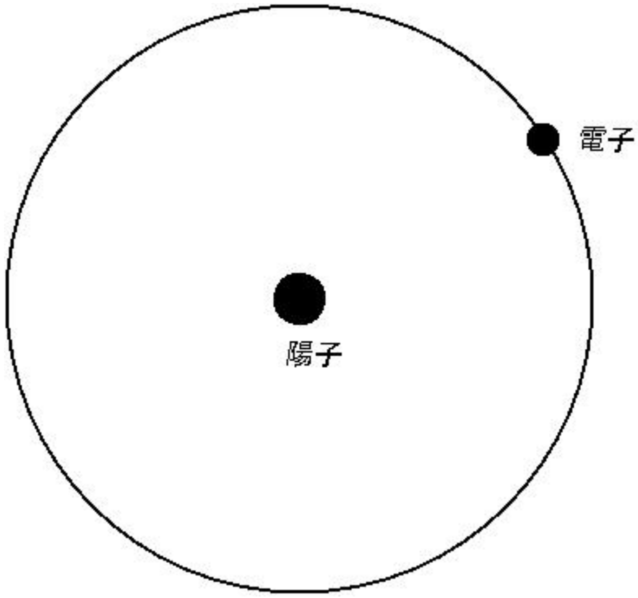
●シュレディンガー作用素

$$H : f \to -\frac{1}{2m}\frac{d^2 f}{dx^2} + Vf \tag{2.5}$$

$$H = -\frac{1}{2m}\Delta + V \tag{2.6}$$

古典的なエネルギーEに対応する

水素原子内の電子は陽子の周りを回っているという古典的な描像がある



$$H = -\frac{1}{2m}\Delta - \frac{1}{|x|} \tag{2.7}$$

●固有値問題

$$H\phi = E\phi, \quad E \in \mathbb{R}, \tag{2.8}$$

「複素数値関数$\phi = \phi(x)$はxでの電子の確率振幅を表し，この電子のエネルギーはE」

●量子力学において電子の位置や運動量は特定されるものではない。

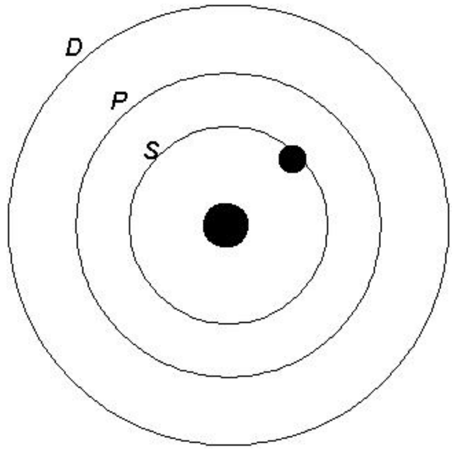
1. 電子が$A \subset \mathbb{R}^3$に存在する確率

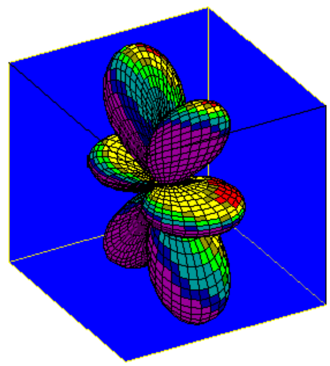
$$\sigma(A) = \int_A |\phi(x)|^2 dx \tag{2.9}$$

2. E は連続な値をとらない！

$$H\phi_j = E_j\phi_j. \tag{2.10}$$

● 水素内電子の軌道





3　時間作用素

3.1　時間発展とシュレディンガー 方程式

●時刻ゼロで確率振幅$\phi(x)$の電子は時刻tではどのような確率振幅$\phi(x,t)$をもつか？

●1926年，シュレデインガーはϕが次の方程式を満たすことを発見した：

●シュレディンガー方程式

$$i\frac{d}{dt}\phi(x,t) = H\phi(x,t), \quad \phi(x,0) = \phi(x). \tag{3.1}$$

●数学的に解く

$$\phi(x,t) = e^{-itH}\phi(x) \tag{3.2}$$

$$i\frac{d}{dt}\underline{e^{-itH}\phi} = H\underline{e^{-itH}\phi}, \ \ \phi(x,0) = \phi(x)$$

●e^{-itH} の正体は作用素

$$e^{-itH} : \text{関数} \to \text{関数}$$

● P とQの関係?

$$PQf = -i(xf)' = -if - ixf' = -if + QPf$$

つまり

$$PQf - QPf = -if$$

●記号 $[A, B] = AB - BA \Longrightarrow$

$$[P, Q]f = -if \tag{3.3}$$

$$[P, Q] = -i \tag{3.4}$$

(3.4) を正準交換関係（CCR）という。

ハイゼンベルグの不確定性原理

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \hbar/2\pi. \tag{3.5}$$

●電子の運動量pと位置xを同時に測定した時のそれぞれの不確定さΔp とΔxの積は$\hbar/2\pi$以下にすることはできない。

●数学的な解釈

$$[P, Q] = -i\hbar \Longrightarrow \sigma(P)\sigma(Q) \geq \hbar/2\pi. \tag{3.6}$$

$\sigma(X)\cdots$ X**の標準偏差**

●エネルギーE と時間tの不確定性関係

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar/2\pi \tag{3.7}$$

●量子力学$\cdots$

$$\{運動量と位置\} VS \{エネルギーと時間\}$$

は至る場面で対をなしている。

シュレディンガー方程式

$$i\frac{d}{dt}\phi = H\phi$$

$\Longrightarrow$

$$H = i\frac{d}{dt} \tag{3.8}$$

$[P, Q] = -i$ **から類推されるように**

$$[i\frac{d}{dt}, -t] = -i$$

定義 3.1 （弱時間作用素）次の関係式を満たす対称作用素 T_H を H に付随した <u>弱時間作用素</u> **とよぶ。**

$$[H, T_H] = -i \tag{3.9}$$

●$[A, B] = -i$ を満たす作用素のペアは P,Q 以外に存在するか?

●von Neumann の主張$\cdots$ $A = P$, $B = Q$ に限られる！ただし...

●ワイルの関係式

$$e^{-itP}e^{-isQ} = e^{ist}e^{-isQ}e^{-itP} \tag{3.10}$$

$$\text{ワイル関係式} \Longrightarrow \mathrm{CCR} \tag{3.11}$$

(3.11) の逆は，一般にはいえない。

定理 3.2 [von Neumannの定理] **もしペア**A, B**がワイル関係式を満たすならば**$A \cong P,\ B \cong Q$**である。**

定理 3.3 下から有界なシュレディンガー 作用素H**とワイル関係式を満たす作用素**T_H**は存在しない。**

ワイル関係式

$$e^{-itA}e^{-isB} = e^{ist}e^{-isB}e^{-itA}$$

を $s = 0$ **で微分する**

$$Be^{-itA} = e^{itA}(B + t) \tag{3.12}$$

これを弱ワイル関係式という。

$$\text{ワイル関係式} \Longrightarrow \text{弱ワイル関係式} \Longrightarrow \text{CCR}$$

定義 3.4（強時間作用素）次の関係式を満たす作用素 T **を強時間作用素という：**

$$Te^{-itH} = e^{-itH}(T + t).$$

4　時間作用素の解析

4.1　作用素の分類

$$L^2 = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,\middle|\, \int |\phi(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

- **L^2 は線形空間**
- **内積 $(\cdot, \cdot)$：**

$$(f, g) = \int \bar{f}(x) g(x) dx.$$

- **ノルム $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$**
- 作用素 : $L^2 \to L^2$.

$D(T)$ は T の定義域。作用素 T に対して

$$(f, Tg) = (T^* f, g), \quad g \in D(T),$$

をみたす T^* を T の双対という。

定義 4.1

1. (対称作用素) $T = T^*$, $D(T) \subset D(T^*)$
2. (自己共役作用素) $T = T^*$, $D(T) = D(T^*)$

定義 4.2 2つの作用素 X と Y が $D(X) \subset D(Y)$ かつ $Xf = Yf$, $f \in D(X)$ となるとき Y は X の拡大であるといい $X \subset Y$ とかく。

●$T-\lambda$が逆作用素を持たないときλを T のスペクトルという。

$\mathrm{Spec}(T)\cdots$ Tのスペクトル全体

定理 4.3 $\mathrm{Spec}(T)\subset\mathbb{R}\iff T$は自己共役

●Tが自己共役なとき，それを物理的観測量とよぶ。

1. ラプラシアン,

$$\mathrm{Spec}(-\Delta) = [0, \infty)$$

2. 水素原子内の電子,

$$\mathrm{Spec}\left(-\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{|x|}\right) = \left\{-\frac{1}{2n^2}\right\}_{n=1}^{\infty} \cup [0, \infty)$$

3. 調和振動子 $-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2$**,**

$$\mathrm{Spec}\left(-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2\right) = \left\{n + \frac{1}{2}\right\}_{n=0}^{\infty}$$

定理 4.4（強時間作用素の存在）$\{H, T\}$ が弱ワイル関係式を満たせば，H の固有値は存在しない。

定理 4.5（強時間作用素の非自己共役性）$\{H, T\}$ が弱ワイル関係式をみたすとき，T は対称作用素であり自己共役作用素ではない。

4.4 いろいろな時間作用素

4.4.1 ラプラシアン

$H = -\frac{1}{2m}\Delta$

$$T = \frac{m}{2}(P^{-1}Q + QP^{-1}). \tag{4.1}$$

AB 作用素とよばれている。自己共役拡大を持たない

定理 4.6 **$\{H, T\}$ が弱ワイル関係式を満たしているとする。このとき**

$$[T, f(H)] = if'(H) \tag{4.2}$$

相対論的なシュレディンガー 作用素

$$H_R = \sqrt{-\Delta + m^2}$$

(4.3)

$$T = \frac{1}{2}\left(\sqrt{-\Delta + m^2}P^{-1}Q + QP^{-1}\sqrt{-\Delta + m^2}\right)$$

これもや対称作用素で自己共役拡大をもたない

調和振動子

$$H = -\frac{1}{2m}\Delta + \frac{1}{2}m\omega^2|x|^2$$

ここでパラメーターωを導入した。

●Hは固有値のみをスペクトルにもつので強時間作用素を持たない。

●形式的にHの弱時間作用素は

$$T_\omega = \frac{1}{2\omega}\arctan(m\omega QP^{-1}) + \frac{1}{2\omega}\arctan(m\omega P^{-1}Q)$$

●$\omega \to 0$のとき$T_\omega \to AB$作用素

4.4.4 水素原子内の電子の弱時間作用素

$$H=-\frac{1}{2}\Delta-\frac{1}{|x|}$$

●Hはスペクトルに固有値をもつので，強時間作用素は存在しない。

●弱時間作用素Tを構成したい。現在までのところその存在は証明されていない。

お疲れさまでした!!