正準交換関係 (CCR) の階層性

廣島文生
九州大学大学院・数理学研究院

文部科学省委託事業
「数学アドバンストイノベーションプラットフォーム」
キックオフミーティング
西新プラザ　2017 年 7 月 21 日

不確定性原理 P, Q

・運動量 P vs 位置 Q
・Heisenberg: "正準交換関係"(1925) と"不確定性原理" (1927) の発見

$$[P, Q] = -i\hbar \qquad \Delta P \cdot \Delta Q \geq \hbar/2$$

・von Neumann: "正準交換関係 $\to$ 不確定性原理" の導出
・von Neumann の一意性定理

$$P \cong -i\hbar \frac{d}{dx}, \qquad Q \cong x$$

その後: 小澤の不等式 (Ozawa 03)

$$\varepsilon(Q)\eta(P) + \varepsilon(Q)\sigma(P) + \sigma(Q)\eta(P) \geq \hbar/2$$

$\to$ 重力波の検出可能性 $\to$2015 年 9 月 14 日観測成功！

不確定性原理 E, T

・エネルギー vs 時間

$$\Delta E \cdot \Delta T \geq \hbar/2$$

時間とエネルギーの測定

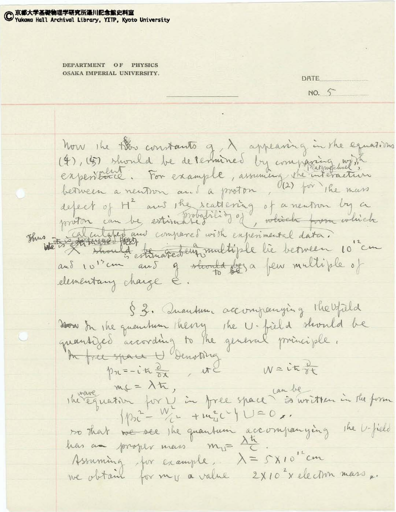
(1) アインシュタイン・ボーア論争
その後: 小澤の不等式による AB 論争の新解釈
(2) 湯川秀樹の中間子理論 m:中間子質量
$mc^2 \times \frac{\text{原子核の直径 } f}{c} \approx \hbar/2 \to m = \frac{\lambda\hbar}{c}(\lambda = \frac{1}{2f}) = 200 \times$ 電子質量

$E \to$ ハミルトニアン H　　$T \to$ "時間作用素"

・エネルギーと時間の正準交換関係

$$[H, T] = -i\hbar$$

湯川秀樹の手書き原稿:湯川記念館資料室より抜粋



DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 5

Now the ~~two~~ constants g, λ appearing in the equations (4), (5) should be determined by comparing with experiment. For example, assuming the "Platzwechsel" interaction (2) for the mass defect of H^2 and the scattering of a neutron by a proton can be estimated probability of, ~~which from~~ which calculated and compared with experimental data.

Thus ~~it is estimated that~~ λ ~~should be a few~~ is estimated to multiple lie between 10^{12} cm and 10^{13} cm and g ~~should be~~ to be a few multiple of elementary charge e.

§ 3. Quantum accompanying the U-field

~~Now~~ In the quantum theory the U-field should be quantized according to the general principle.

~~In free space U~~ Denoting

$$p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \text{ etc} \qquad W = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$m_U c = \lambda\hbar,$$

the wave equation for U in free space can be ~~is~~ written in the form

$$\{p_x^2 - W^2/c^2 + m_U^2c^2\}U = 0,$$

so that ~~we see~~ the quantum accompanying the U-field has ~~an~~ proper mass $m_U = \frac{\lambda\hbar}{c}$.

Assuming, for example, $\lambda = 5\times10^{12}$ cm

we obtain for m_U a value $2\times10^2\times$ electron mass.

CCR 表現と時間作用素

A. Arai and FH, Ultra-weak time operators of Schrödinger operators, Annals Henri Poincaré 2017.

A, B は複素ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の線形作用素で次の CCR(正準交換関係) を稠密な部分空間 $\mathscr{D} \subset D(AB) \cap D(BA)$ の上で満たす:

$$[A, B] = -i1$$

このとき $(\mathscr{H}, \mathscr{D}, \{A, B\})$ を **CCR 表現**という.
[注] $\dim \mathscr{H} = \infty$, A, B の少なくともどちらか一方は非有界作用素

自由度 d への拡張

線形作用素の族 A_j, B_j は次のような稠密な部分集合

$$\mathscr{D} \subset \cap_{j,k=1}^{d} [D(A_j B_k) \cap D(B_k A_j) \cap D(A_j A_k) \cap D(B_j B_k)]$$

の上で CCR

$$[A_j, B_k] = -i\delta_{jk} 1, \quad [A_j, A_k] = 0 = [B_j, B_k]$$

を満たすとき $(\mathscr{H}, \mathscr{D}, \{A_j, B_j | j = 1, \ldots, d\})$ を CCR 表現という.

Schrödinger 作用素の時間作用素

・Schrödinger 作用素

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + V(x) \quad \text{on} \quad L^2(\mathbb{R}^d)$$

の CCR 表現を考察する.

・対称作用素また自己共役作用素 T_H で CCR

$$[H, T_H] = -i1$$

を満たすものが存在すると期待する.

・T_H は H の**時間作用素**と呼ばれる. 形式的には

$$T_H = i\frac{d}{dH}$$

困難なところ

$H\phi = E\phi \to [H,T]\phi = (H-E)T\phi = -i\phi \to T\phi = -i(H-E)^{-1}\phi$.
故に $\phi \notin D(T)$ が任意の固有ベクトル ϕ で成り立つ.

正準交換関係の階層性

超強時間作用素 (Weyl) $\subset$ **強時間作用素** (弱 Weyl)

$\subset$ **時間作用素** (CCR)

$\subset$ **弱時間作用素** (弱 CCR) $\subset$ **超弱時間作用素** (双線形形式)

時間作用素構成のアイデア: $H = H_{ac} \oplus H_{sc} \oplus H_p$.

(1) H_{sc} の非存在 $\rightarrow H = H_{ac} \oplus H_p$. (2) H_{ac} の**強時間作用素**の存在.
(3) H_p の**超弱時間作用素**の存在.

参考文献

D. M. Rosenbaum, Super Hilbert space and the quantum-mechanical time operators, *JMP* **19** (1969), 1127–1144.
I. Fujiwara, Rational construction and physical signification of the quantum time operator, *Prog. Theor. Phys.* **64** (1980), 18–27.
T. Goto, K. Yamaguchi and N. Sudo, On the time operator in quantum mechanics, *Prog. Theor. Phys.* **66** (1981), 1525–1538, II, 1915–1925.
K. Schmüdgen, On the Heisenberg commutation relation. I, *JFA* **50** (1983), 8–49, II, *Publ. RIMS, Kyoto* **19** (1983), 601–671.
G. Dorfmeister and J. Dorfmeister, Classification of certain pairs of operators (P,Q) satisfying $[P,Q]=-i\mathrm{Id}$, *JFA* **57** (1984), 301–328.
M. Miyamoto, A generalised Weyl relation approach to the time operator and its connection to the survival probability, *JMP* 42 (2001), 1038–1052.
E. A. Galapon, Self-adjoint time operator is the rule for discrete semi-bounded Hamiltonians, *Proc. R. Soc. Lond.* **A 458** (2002), 2671–2689.
A.Arai,Generalized weak Weyl relation and decay of quantum dynamics. RMP 17 (2005), 1071-1109.
A.Arai,Spectrum of time operators. LMP 80 (2007),211-221.
A.Arai and Y.Matsuzawa,Time operators of a Hamiltonian with purely discrete spectrum. RMP 20 (2008),951-978.
A.Arai, On the uniqueness of weak Weyl representations of the canonical commutation relation. LMP 85 (2008),15-25.
A.Arai and Y.Matsuzawa,Construction of a Weyl representation from a weak Weyl representation of the canonical commutation relation. LMP 83 (2008),201-211.
G. Muga, R. S. Mayato and I. Egusquiza, *Time in Quantum Mechanics - Vol.1,2*, 2nd Ed., Springer, 2008.
A.Arai, Necessary and sufficient conditions for a Hamiltonian with discrete eigenvalues to have time operators. LMP 87 (2009),67-80.

Weyl 関係と時間作用素

[Weyl 関係] 自己共役作用素のペア (A,B) が **Weyl 関係**

$$e^{-itA}e^{-isB} = e^{ist}e^{-isB}e^{-itA}$$

を満たすとき Weyl 表現 という.
[弱 Weyl 関係] 自己共役作用素 A と対称作用素 B のペア (A,B) が

$$e^{-itA}D(B) \subset D(B)$$
$$Be^{-itA}\psi = e^{-itA}(B+t)\psi$$

を $\psi \in D(B)$ で満たすとき**弱 Weyl 表現**という (Miyamoto 01).
・形式的に Weyl 表現, 弱 Weyl 表現の t,s での微分を考えれば次の定理が得られる.

定理

Weyl 関係 $\Longrightarrow$ 弱 Weyl 関係 $\Longrightarrow$CCR

定義 強時間作用素と超強時間作用素

・(H,T) が Weyl 表現のとき自己共役作用素 T を**超強時間作用素**という.
・(H,T) が弱 Weyl 表現のとき対称作用素 T を**強時間作用素**という.

[注 1] (H,T) が Weyl 表現ならば $H \cong \oplus P_n$, $T \cong \oplus Q_n$.
[注 2] T が強時間作用素のとき $\sigma(H)$ は絶対連続スペクトルのみ.
[注 3] **H が固有値を持つとき H の強時間作用素は存在しない.**

$f(P)$ の強時間作用素

以下 $P_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$, $Q_j = x_j$ とする.

例 1 $[\frac{1}{2m}P^2, T_{AB}] = -i1$

$$T_{AB} = \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{d}(P_j^{-1}Q_j + Q_j P_j^{-1})$$

例 2 $[f(P), T_f] = -i1$

$$T_f = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}(f_j(P)^{-1}Q_j + Q_j f_j(P)^{-1})$$

(FH-Kuribayashi-Matsuzawa(09))

線形形式と時間作用素

H が固有値を持つ場合はどうするか？

定義 弱時間作用素と超弱時間作用素

（1） 稠密な部分空間 $\exists\mathscr{D} \subset D(T) \cap D(H)$ で

$$(H\phi, T\psi) - (T\phi, H\psi) = -i(\phi, \psi), \quad \phi, \psi \in \mathscr{D}$$

を満たすとき (弱 CCR) 対称作用素 T は**弱時間作用素**という.

（2） 対称双線形形式

$$\mathfrak{t} : \mathscr{D}_1 \times \mathscr{D}_2 \to \mathbf{C}$$

が稠密な部分空間 $\exists\mathscr{E} \subset D(H) \cap \mathscr{D}_1 \cap \mathscr{D}_2$ 上で双線形形式 CCR

$$\mathfrak{t}[H\phi, \psi] - \mathfrak{t}[\phi, H\psi] = -i(\phi, \psi) \quad \psi, \phi \in \mathscr{E}.$$

を満たすとき**超弱時間作用素**という.

正準交換関係の階層性

自己共役作用素 H に対して, いわゆる"時間作用素 T_H"を定義したい. 以下のような階層性が存在する.

超強時間作用素 (Weyl) $\subset$ **強時間作用素** (弱 Weyl)

$\subset$ **時間作用素** (CCR)

$\subset$ **弱時間作用素** (弱 CCR) $\subset$ **超弱時間作用素** (双線形形式 CCR)

[注]T が超強時間作用素のとき $H \cong \oplus P_n$ と $T \cong \oplus Q_n$ が成り立つ.
[注] T が弱時間作用素 ならば $\mathfrak{t}_T : \mathscr{H} \times D(T) \to \mathbf{C}$:

$$\mathfrak{t}_T[\phi, \psi] = (\phi, T\psi), \quad \phi \in \mathscr{H}, \psi \in D(T)$$

は超弱時間作用素.

絶対連続スペクトルと強時間作用素

2 つの自己共役作用素 H,H'. H の強時間作用素 T_H から H' の強時間作用素 $T_{H'}$ を散乱理論を応用して構成する方法.

漸近完全性・散乱理論

H, H' は次を満たす. (1)$\exists W_\pm = \text{s-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH'} J e^{-itH} P_{ac}(H)$.
(2) $\lim_{t\to\pm\infty} \|Je^{-itH} P_{ac}(H)\psi\| = \|P_{ac}(H)\psi\|$. (3)$\mathrm{Ran}(W_\pm) = \mathscr{H}_{ac}(H')$.
このとき $U_\pm = W_\pm \lceil \mathscr{H}_{ac}(H) : \mathscr{H}_{ac}(H) \to \mathscr{H}_{ac}(H')$ はユニタリーで $H'_{ac} = U_\pm H_{ac} U_\pm^{-1}$.

[例] $H = -\frac{1}{2}\Delta$ と $H' = H + V$ が漸近完全性の条件を満たせば, $T_{H'} = U_\pm T_{AB} U_\pm^{-1}$ は H'_{ac} の強時間作用素.

絶対連続スペクトルと強時間作用素

2 つの自己共役作用素 H, H'. H の強時間作用素 T_H から H' の強時間作用素 $T_{H'}$ を散乱理論を応用して構成する方法.

漸近完全性・散乱理論

H, H' は次を満たす. (1)$\exists W_\pm = \text{s-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH'} J e^{-itH} P_{ac}(H)$.
(2) $\lim_{t\to\pm\infty} \|Je^{-itH}P_{ac}(H)\psi\| = \|P_{ac}(H)\psi\|$. (3)$\mathrm{Ran}(W_\pm) = \mathscr{H}_{ac}(H')$.
このとき $U_\pm = W_\pm \lceil \mathscr{H}_{ac}(H) : \mathscr{H}_{ac}(H) \to \mathscr{H}_{ac}(H')$ はユニタリーで $H'_{ac} = U_\pm H_{ac} U_\pm^{-1}$.

定理 Arai (06), 強時間作用素

(1)–(3), H_{ac} の強時間作用素 T が存在すると仮定する. このとき $T'_\pm = U_\pm T U_\pm^{-1}$ は H'_{ac} の強時間作用素. つまり $\{H_{ac}, T\}$ が弱 Weyl 関係を満たせば $\{H'_{ac}, T'\}$ も弱 Weyl 関係を満たす.

[例] $H = -\frac{1}{2}\Delta$ と $H' = H + V$ が漸近完全性の条件を満たせば, $T_{H'} = U_\pm T_{AB} U_\pm^{-1}$ は H'_{ac} の強時間作用素.

離散スペクトルと超弱時間作用素

[問題] $H = H_{ac} \oplus H_{sc} \oplus H_p$ で H_{ac} の強時間作用素 $T_{H_{ac}}$ は散乱理論で構成できる. それでは H_p の時間作用素?

定理 Galapon (02), Arai-Matsuzawa (08)

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正規直交系. $\sigma(H_p) = \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $H_p e_j = E_j e_j$, E_j は単純で $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{E_j^2} < \infty$ とする. このとき

$$T\phi = i \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m \neq n} \frac{(e_m, \phi)}{E_n - E_m} \right) e_n, \quad \phi \in D = LH\{e_n - e_m\}$$

は $[H_p, T]\phi = -i\phi$. つまり $(\mathscr{H}, D, \{H_p, T\})$ は CCR 表現.

離散スペクトルと超弱時間作用素

[問題] $H = H_{ac} \oplus H_{sc} \oplus H_p$ で H_{ac} の強時間作用素 $T_{H_{ac}}$ は散乱理論で構成できる. それでは H_p の時間作用素?

定理 Galapon (02), Arai-Matsuzawa (08)

$\{e_n\}_{n=1}^\infty$ は正規直交系. $\sigma(H_p) = \{E_n\}_{n=1}^\infty$ で $H_p e_j = E_j e_j$, E_j は単純で $\sum_{j=1}^\infty \frac{1}{E_j^2} < \infty$ とする. このとき

$$T\phi = i \sum_{n=1}^\infty \left(\sum_{m \neq n} \frac{(e_m, \phi)}{E_n - E_m} \right) e_n, \quad \phi \in D = LH\{e_n - e_m\}$$

は $[H_p, T]\phi = -i\phi$. つまり $(\mathscr{H}, D, \{H_p, T\})$ は CCR 表現.

定理 Arai+FH (17), 超弱時間作用素

[$E_n \to \infty$] $\lim_{n\to\infty} E_n = \infty$ のとき**時間作用素** $\exists T$.

[$E_n \to 0$] $E_n < 0$, $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$, $0 \notin \sigma(H_p)$ のとき**超弱時間作用素** $\exists T$.

H の超弱時間作用素

自己共役作用素 $H = H_{ac} \oplus H_{sc} \oplus H_p$ は $S(\mathscr{H})$ に含まれる $\Longleftrightarrow$

(H.1) $\sigma(H_{sc}) = \emptyset$.

(H.2) $\sigma(H_{ac}) = [0, \infty)$ かつ H_{ac} の $\exists$ 強時間作用素 T_{ac}.

(H.3) $\sigma(H_p) = \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_1 < E_2 < \cdots < 0$, $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$

(**その結果** $0 \notin \sigma(H_p)$).

定理 Arai-FH(17), 超弱時間作用素

$H \in S(\mathscr{H})$ のとき $\exists$ 超弱時間作用素 $\mathfrak{t}_H$.

証明 $H = H_p \oplus H_{ac}$.

- H_{ac} は**強時間作用素** T_{ac} を持つ (仮定)
- H_p は**超弱時間作用素** $\mathfrak{t}_p$ を持つ
- $\mathfrak{t}_H : (\mathscr{H}_{ac}(H) \oplus \mathscr{D}_p) \times (D(T_{ac}) \oplus \mathscr{D}_p) \to \mathbf{C}$ を次で定義すれば

$$\mathfrak{t}_H[\phi_1 \oplus \phi_2, \psi_1 \oplus \psi_2] = (\phi_1, T_{ac}\psi_1) + \mathfrak{t}_p[\phi_2, \psi_2].$$

これは H の超弱時間作用素.

A.Parmeggiani and M.Wakayama, Non-commutative harmonic oscillators. I. Forum Math. 14 (2002), 539-604, II, Forum Math. 14 (2002),669-690.

例 1 非可換調和振動子 ($E_n \to \infty$)

A と J は 2×2 行列:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \geq 0, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Let $\alpha\beta > 1$. このとき **非可換調和振動子**

$$H(\alpha,\beta) = A \otimes (\frac{1}{2}P^2 + \frac{1}{2}Q^2) + J \otimes (QP + \frac{1}{2})$$

$\Longrightarrow \exists$ 時間作用素

例 2 Agmon ポテンシャル $(E_n \to 0)$

$d \geq 3$, $U \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$, $U \leq 0$, 連続, 回転対称と仮定し $U(x) = -1/|x|^\alpha$ が $|x| > R$ で成り立つとする. ここで $0 < \alpha < 1$ かつ $R > 0$.

$$V(x) = \frac{U(x)}{(1+|x|^2)^{1/2+\varepsilon}},$$

$2\varepsilon + \alpha < 2$ のとき H は $S(\mathscr{H})$ なので H は超弱時間作用素を持つ.

例 2 Agmon ポテンシャル $(E_n \to 0)$

$d \geq 3$, $U \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$, $U \leq 0$, 連続, 回転対称と仮定し $U(x) = -1/|x|^\alpha$ が $|x| > R$ で成り立つとする. ここで $0 < \alpha < 1$ かつ $R > 0$.

$$V(x) = \frac{U(x)}{(1+|x|^2)^{1/2+\varepsilon}},$$

$2\varepsilon + \alpha < 2$ のとき H は $S(\mathscr{H})$ なので H は超弱時間作用素を持つ.

例 3 水素原子 $(E_n \to 0)$

水素原子 $H_{\mathrm{hyd}} = -\Delta - \gamma/|x|$ は自己共役で $D(H_{\mathrm{hyd}}) = D(-\Delta)$. クーロンポテンシャル $-\gamma/|x|$ は $d = 3$ で Agmon ポテンシャルではない. しかし H_{hyd} は $S(\mathscr{H})$ なので超弱時間作用素を持つ.

まとめ

(1) $H=-\frac{1}{2}\Delta+V(x)$ の超弱時間作用素 $\mathfrak{t}$ は

$$\mathfrak{t}(H\phi,\psi)-\mathfrak{t}(H\psi,\phi)^*=-i(\phi,\psi)$$

(2) $\mathfrak{t}$ の定義域は稠密.
(3) $H=H_{ac}\oplus H_{sc}\oplus H_p$
(3-1) $\sigma(H_{sc})=\emptyset$ と $0\notin\sigma(H_p)$ を仮定する.
(3-2) $\#\sigma(H_p)=\infty$ または $\#\sigma(H_p)=0$ を仮定する.
(3-3) H_p の超弱時間作用素または時間作用素が存在する.
(3-4) H_{ac} の強時間作用素が散乱理論から構成できる.
(4) 非可換調和振動子の時間作用素が存在する.
(5) 超弱時間作用素が存在する V の例を与えた.
(6) 水素原子 H_{hyd} の超弱時間作用素が存在する.