

Solvable models in the spheroidal coordinates

峯 拓矢 (Takuya MINE)

京都工芸繊維大学 (Kyoto Institute of Technology)

2014 年 10 月 7 日 量子場の数理とその周辺 於 京都大学数理解析研究所

1 楕円座標

楕円座標 (elliptic coordinate) は 1868 年に Mathieu [Ma] が楕円膜の振動問題を解く際に導入した, 次式で定義される $\mathbb{R}^2$ 上の座標である.

楕円座標

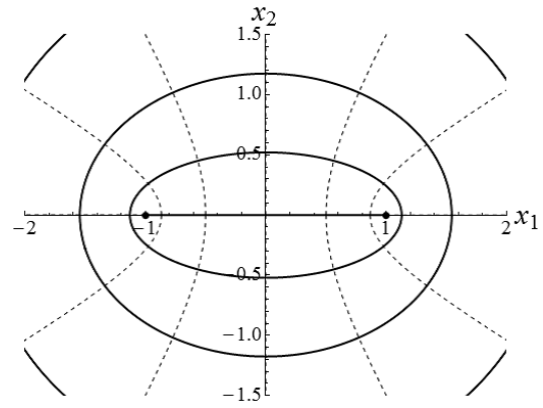
$$\begin{cases} x_1 = a \cosh \xi \cos \eta, \\ x_2 = a \sinh \xi \sin \eta, \\ (\xi \geq 0, -\pi < \eta \leq \pi). \end{cases}$$

a は正定数. 複素座標では

$$x_1 + ix_2 = a \cosh(\xi + i\eta).$$

ラプラシアン of 楕円座標表示は

$$\Delta = \frac{2}{a^2(\cosh 2\xi - \cos 2\eta)} \left(\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \right).$$



通常の極座標と比較すれば, ξ は動径方向, η は角度方向の変数に対応し, 方程式 $\xi = \text{定数}$ は共通の焦点を持つ楕円, $\eta = \text{定数}$ は同じ焦点の双曲線を表す. ラプラシアンの固有方程式 $-\Delta u = \lambda u$ において変数分離解 $u = f(\xi)g(\eta)$ を仮定すれば, 次の 2 つの方程式を得る.

$$f''(\xi) + 2q(\cosh 2\xi)f(\xi) = \mu f(\xi), \quad (1)$$

$$-g''(\eta) + 2q(\cos 2\eta)g(\eta) = \mu g(\eta). \quad (2)$$

ただし, $q = a^2\lambda/4$ であり, μ は変数分離法で現れる定数である. 方程式 (2) は **Mathieu の方程式** (Mathieu equation), 方程式 (1) は **変形された Mathieu の方程式** (modified Mathieu equation) と呼ばれ, 変数変換 $\eta = i\xi$ により互いに移り合う. 元の座標 (x_1, x_2) に関して u が連続であるためには, 解 $g(\eta)$ は η に関して周期 2π を持つ必要がある. 固定された q に対し, 可算個の μ の値のみに対して (2) は周期解を持つが, 偶関数の周期解を $\text{ce}_n(\eta, q)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), 奇関数の周期解を $\text{se}_n(\eta, q)$ ($n = 1, 2, \dots$) と表し, (整数次の) **Mathieu 関数** (Mathieu function) と呼ぶ. ただし, $L^2_\eta(-\pi, \pi)$ におけるノルムが

$\sqrt{\pi}$ となるように正規化しておく. さらに, $Ce_n(\xi, q) = ce_n(i\xi, q)$, $Se_n(\xi, q) = se_n(i\xi, q)/i$ を**変形された Mathieu 関数 (modified Mathieu function)** と呼ぶ.

したがって, $-\Delta$ に対する固有値 λ の一般固有関数として

$$u = Ce_n(\xi, q)ce_n(\eta, q) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (3)$$

$$u = Se_n(\xi, q)se_n(\eta, q) \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (4)$$

が得られた. これを用いると, 楕円領域内での Dirichlet (または Neumann) 境界条件下でのラプラシアン固有値問題を解くことができる. この解は 1868 年に Mathieu [Ma] によって得られたが, 固有関数系の完全性は 20 世紀半ばになって多助変数スペクトル解析 (multi-parameter spectral analysis) を用いて示された (Volkmer [V] 参照).

さらに, これらの一般固有関数を Fourier 解析に応用するには, McLachlan [Mc] による平面波の Mathieu 関数による展開公式が有用である.

定理 1 (McLachlan [Mc]). 配位空間の変数を $x = (x_1, x_2) = (a \cosh \xi \cos \eta, a \sinh \xi \sin \eta)$, フーリエ空間の変数を $p = (p_1, p_2) = (k \cos \tau, k \sin \tau)$ と表し, $q = a^2 k^2 / 4$ とおくと, 次の等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} e^{ip \cdot x} &= 2 \sum_{n=0}^{\infty} i^n \frac{Ce_n(\xi, q)}{C_n} ce_n(\eta, q) ce_n(\tau, q) \\ &\quad + 2 \sum_{n=1}^{\infty} i^n \frac{Se_n(\xi, q)}{D_n} se_n(\eta, q) se_n(\tau, q). \end{aligned} \quad (5)$$

ただし, C_n, D_n は Mathieu 関数およびその導関数の $\eta = 0, \pi/2$ における特殊値や Fourier 係数を用いて表される 0 でない実定数である. 収束は $(\xi, \eta, k, \tau) \in [0, \infty) \times T \times (0, \infty) \times T$ ($T = \mathbb{R}/(2\pi\mathbb{Z})$) 上広義一様である.

展開公式 (5) を Fourier 逆変換の公式に代入すれば, 任意の $u \in L^2(\mathbb{R}^2)$ を楕円波 (3), (4) の重ね合わせで表す公式が得られる. 特に, Gu-Qian [G-Q], 峯 [Mi] において研究された 2 焦点に量子化された磁束を持つ Aharonov-Bohm 磁場を持つ Schrödinger 作用素については, 公式 (5) を利用して散乱振幅を計算することが出来る. この他の楕円座標の有用な応用例としては, Seri [S] による 2 点に固定された点電荷の作る Coulomb 場における Schrödinger 作用素の共鳴 (resonance) の計算が挙げられる.

2 回転楕円体座標

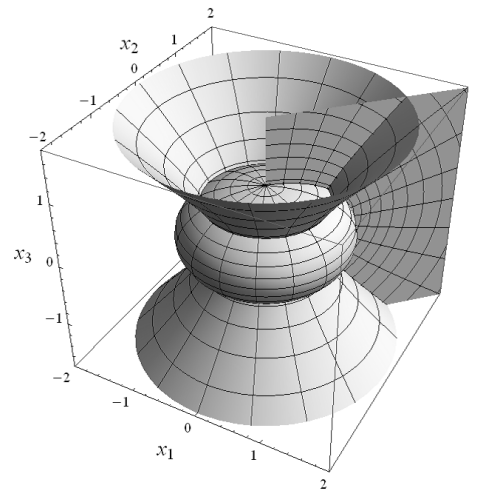
楕円座標を表す図において, 図を楕円の長軸に関して回転させて得られる座標が**長球座標 (扁長回転楕円体座標, prolate spheroidal coordinate)**, 短軸に関して回転させて得られる座標が**扁球座標 (扁平回転楕円体座標, oblate spheroidal coordinate)**である. ここでは扁球座標を紹介する (岩波数学公式集 III [Mo-U-I] 参照).

扁球座標 (扁平回轉橢円体座標)

$$\begin{cases} x_1 = a \cosh \xi \sin \eta \cos \phi, \\ x_2 = a \cosh \xi \sin \eta \sin \phi, \\ x_3 = a \sinh \xi \cos \eta, \end{cases}$$

$$(\xi \geq 0, 0 \leq \eta \leq \pi, -\pi < \phi \leq \pi).$$

$$\Delta = \frac{1}{a^2 \cosh \xi \sin \eta (\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta)} \cdot \left(\sin \eta \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\cosh \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) + \cosh \xi \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\sin \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \right) + \frac{\sinh^2 \xi + \cos^2 \eta}{\cosh \xi \sin \eta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right).$$



扁球座標を用いて 3 次元ラプラシアン固有方程式を変数分離法で解くと、解は**回轉橢円体波動関数 (spheroidal wave function)** で表され、さらに太さ 0 の輪の内部に量子化された磁束を持つ特異磁場に対する Schrödinger 作用素の一般固有関数を書き下すこともできる。これは、外村らによる Aharonov–Bohm 効果の検証実験に用いられた、超伝導体トーラスに閉じ込められた磁場に対する一つのモデル化と考えられる。この解に関してはまだ未知の部分が多く、今後の研究の進展が待たれるところである。

参考文献

- [G-Q] Zhi-Yu Gu and Shang-Wu Qian, Aharonov–Bohm scattering on parallel flux lines of the same magnitude, *J. Phys. A: Math. Gen.* **21** (1988), 2573–2585.
- [Ma] E. Mathieu, Mémoire sur le mouvement vibratoire d’une membrane de forme elliptique, *Journal de Liouville* **13** (1868), 137–203.
- [Mc] N. W. McLachlan, *Theory and Application of Mathieu Functions*, Oxford, at the Clarendon Press, 1947.
- [Mi] T. Mine, Solvable models in two-solenoidal Aharonov–Bohm magnetic fields on the Euclidean plane, in *Spectral and Scattering Theory and Related Topics*, ed. F. Hiroshima, RIMS Kôkyûroku Bessatsu B45, 2014, 45–68.
- [Mo-U-I] 森口繁一, 宇田川銑久, 一松信著, 岩波 数学公式 III 特殊函数, 岩波書店, 1960.
- [S] M. Seri, Resonances in the two centers Coulomb system, Ph. D. Thesis, 2012.
URL: <http://opus4.kobv.de/opus4-fau/frontdoor/index/index/docId/2385>
- [V] H. Volkmer, *Multiparameter Eigenvalue Problems and Expansion Theorems*, Lecture Notes in Mathematics **1356**, Springer, 1988.