

解析学 I 演習 1 回目 2015/4/13

以下の問で、何も断りがなければ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間を表すものとする。

1. 関数 $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ を $f(x) = 1$ (x が有理数), $f(x) = 0$ (x が無理数) とするとき, f はリーマン可積分でないことを示せ.
2. $A \subset X$ とする. このとき $\{\emptyset, X, A, A^c\}$ は σ -field になることを示せ.
3. (a) $\mathcal{B}_\alpha$ (α はインデックス) が σ -field のとき $\cap_\alpha \mathcal{B}_\alpha$ も σ -field になることを示せ.
(b) $\mathcal{A}$ は X の部分集合の族とする. $\cap\{\mathcal{B}; \mathcal{B} \supset \mathcal{A}, \mathcal{B} \text{ は } X \text{ の } \sigma\text{-field}\}$ は $\mathcal{A}$ を含む最小の σ -field になることを示せ.
4. $X = \mathbb{R}^2$ として $\mathcal{B} = \{A \times \mathbb{R}; A \subset \mathbb{R}\}$, $\mathcal{F} = \{\mathbb{R} \times B; B \subset \mathbb{R}\}$ とする.
(a) $\mathcal{B}, \mathcal{F}$ とともに σ -field であることを示せ.
(b) $\mathcal{B} \cup \mathcal{F}$ は σ -field か?
5. $f : X \rightarrow Y$ とする. $\mathcal{B} = \{f^{-1}(A); A \in 2^Y\}$ とするとき $\mathcal{B}$ は σ -field になることを示せ. ただし, $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ とする.
6. (a) $A, B \in \mathcal{B}$, $B \subset A$ のとき $\mu(B) \leq \mu(A)$ を示せ. また $\mu(B) < \infty$ ならば $\mu(A \setminus B) = \mu(A) - \mu(B)$ を示せ.
(b) $A_n \in \mathcal{B}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき $\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$ を示せ.
7. $A_n \in \mathcal{B}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ が単調増加的であるとする. このとき $\mu(\cup_{n=1}^\infty A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ を示せ. また $B_n \in \mathcal{B}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ が単調減少的で, $\mu(B_1) < \infty$ とする. このとき $\mu(\cap_{n=1}^\infty B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n)$ を示せ.
8. $A_n \in \mathcal{B}$, $n = 1, 2, 3, \dots$ とする. このとき $\mu(\cup_{n=1}^\infty \cap_{k=n}^\infty A_k) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ と $\mu(\cap_{n=1}^\infty \cup_{k=n}^\infty A_k) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$ を示せ. また $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) < \infty$ とする. このとき $\mu(\cap_{n=1}^\infty \cup_{k=n}^\infty A_k) = 0$ を示せ.

9. (a) $\bar{\mathcal{B}} = \{A \cup z; A \in \mathcal{B}, \mathcal{B} \ni \exists N \supset z \text{ st } \mu(N) = 0\}$ が σ -field になることを示せ.
- (b) $\bar{\mu}(A \cup z) = \mu(A)$ が well-defined かつ $\bar{\mathcal{B}}$ 上の測度になることを示せ.
- (c) $(X, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$ が完備になることを示せ.
10. $X = \mathbb{N}$, $\mathcal{B} = 2^X$, $a_n > 0$ とする. $\mu(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \mathbb{1}_A(n)$ とおく. このとき μ は測度になることを示せ.

11. $A, B \subset X, B \subset A$ とする. $\sigma(\{A, B\})$ を求めよ.
12. ボレル σ -field は完備でないことを示せ.
13. $\mathbb{R}$ の开区間全体を O , $[a, b)$ なる半开区間全体を S , 区間 $((a, b], (a, b), [a, b), [a, b])$ 全体を I とする. $\sigma(O) = \sigma(S) = \sigma(I) = \mathcal{B}(\mathbb{R})$ を示せ¹.
14. $\mathcal{F}$ を X の集合族とする. $A_n \subset A_{n+1} \rightarrow \cup_n A_n \in \mathcal{F}$, かつ $B_n \supset B_{n+1} \rightarrow \cap_n B_n \in \mathcal{F}$ を満たすとき, $\mathcal{F}$ を単調族という. 次を示せ.
 - (a) σ -field は単調族である.
 - (b) $\mathcal{A}$ を X の任意の集合族とする. $\mathcal{A}$ を含む最小の単調族が存在する.
15. $\mathcal{F}$ を集合 X の有限加法的集合族とする. X の集合族 $\mathcal{A}$ を含む最小の単調族を $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ と表す.
 - (a) $\mathcal{M}(\mathcal{F})$ が σ -field になることを示せ.
 - (b) $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{M}(\mathcal{F})$ を示せ.
16. $\mathcal{F}$ が集合 X の有限加法的集合族かつ単調族ならば σ -field になることを示せ.
17. $(X, \mathcal{B}_X, \mu_X)$ $(Y, \mathcal{B}_Y, \mu_Y)$ を 2 つの測度空間とする. $A \times B \in \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ を長方形とよぶ. $\mathcal{F}$ を互いに共通部分をもたない有限個の長方形の和として表される集合全体とする. このとき $\mathcal{F}$ は有限加法的集合族になることを示せ.
18. $\mathcal{F}$ を有限加法的集合族, μ を $\mathcal{F}$ 上の Jordan 測度とする. 次が同値であることを示せ.
 - (a) μ は $\mathcal{F}$ 上の測度.
 - (b) $B_n \subset B_{n+1}, B_n \in \mathcal{F}$, かつ $\cup_n B_n \in \mathcal{F}$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = \mu(\cup_n B_n)$.
 - (c) $B_n \supset B_{n+1}, B_n \in \mathcal{F}$, かつ $\cap_n B_n = \emptyset, \mu(B_1) < \infty$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(B_n) = 0$.

¹ $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ はボレル σ -field を表す.

解析学 I 演習 3 回目 2015/4/27

以下の問では何も断らなければ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間を表す.

25. $\mathcal{F} \subset 2^X$ が $A_j \in \mathcal{F}, j = 1, \dots, n$, ならば $\cap_{j=1}^n A_j \in \mathcal{F}$ を満たすとき π 系という.
 $\mathcal{L} \subset 2^X$ が (1) $\emptyset \in \mathcal{L}$, (2) $A \in \mathcal{L}$ ならば $A^c \in \mathcal{L}$, (3) $A_n \in \mathcal{L}, A_n \cap A_m = \emptyset$
 ならば $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{L}$ を満たすとき λ 系という. いま, $\mathcal{F}$ は π 系, $\mathcal{L}$ を λ 系とし,
 $\mathcal{F} \subset \mathcal{L}$ とする. このとき $\sigma(\mathcal{F}) \subset \mathcal{L}$ を示せ¹.
26. $X = \{0, \dots, 9\}$ とし, $P_k : (0, 1) \rightarrow X$ を $a = 0.a_1a_2\dots$ のとき $P_ka = a_k$ と定める.
 ただし, $0.5000\dots$ は $0.4999\dots$ と表す約束にする. $Y = \cup_{k=1}^{\infty} \{P_k^{-1}(K); K \subset X\}$
 として Y を含む最小の σ -field を $\mathcal{B}(Y)$ としたとき $\mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}((0, 1))$ を示せ.
 ここで $\mathcal{B}((0, 1))$ は $(0, 1)$ を $\mathbb{R}$ の部分位相空間と見なしたときの Borel σ -field で
 ある.
27. μ^* を X の外測度とする. このとき任意の $A \subset X$, 任意の μ^* -可測な集合 B に対
 して $\mu^*(A \cup B) + \mu^*(A \cap B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ を示せ.
28. $\mu(X) = 1$ とする. いま $A_n \in \mathcal{B}, n = 1, 2, 3, \dots$, は $\mu(A_n) = 1$ と仮定する. このと
 き $\mu(\cap_n A_n) = 1$ を示せ.
29. X と Y を位相空間とする. $\mathcal{B}(X)$ と $\mathcal{B}(Y)$ を各々 Borel σ -field とする. このと
 き $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) \subset \mathcal{B}(X \times Y)$ を示せ. また X, Y が第二可算公理をみたすとき
 $\mathcal{B}(X) \otimes \mathcal{B}(Y) = \mathcal{B}(X \times Y)$ を示せ.
30. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を次で定める.

$$X = \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$\mathcal{B} = \{A \subset X; (1) 0 \in A \text{ かつ } \#A^c < \infty, \text{ または } (2) 0 \notin A \text{ かつ } \#A < \infty\},$$

$$\mu(A) = \#A (= \infty \text{ を許す})$$

(a) $\mathcal{B}$ は有限加法的であることを示せ. つまり $A_n \in \mathcal{B} \rightarrow \cup_{n=1}^N A_n \in \mathcal{B}$.

¹ $\pi - \lambda$ 定理という.

(b) μ が有限加法的であることを示せ. つまり $A_n \in \mathcal{B}, A_n \cap A_m = \emptyset \rightarrow \mu(\cup_{n=1}^N A_n) = \sum_n \mu(A_n)$.

(c) 外測度 μ^* を求めよ.

31. 閉区間 $[a, b]$, 半開区間 $[a, b)$ は Lebesgue 可測であることを示せ.

32. 次が同値であることを示せ.

(a) $E \subset \mathbb{R}$ が Lebesgue 可測.

(b) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\lambda^*(O \setminus E) < \epsilon$ となる²開集合 $O \supset E$ が存在する.

(c) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\lambda^*(E \setminus F) < \epsilon$ となる閉集合 $F \subset E$ が存在する.

33. $\lambda^*(E) < \infty$ とする. 次が同値であることを示せ.

(a) E が Lebesgue 可測.

(b) 任意の $\epsilon > 0$ に対して, $\lambda^*(E \setminus K) < \epsilon$ となるコンパクト集合 $K \subset E$ が存在する.

34. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の可算個の開集合の共通部分として書ける集合全体を G_δ で表し, 可算個の閉集合の和として書ける集合全体を F_σ で表す. 次が同値であることを示せ.

(a) $E \subset \mathbb{R}$ が Lebesgue 可測.

(b) $G \in G_\delta$ で $E \subset G, \lambda^*(G \setminus E) = 0$ となるものが存在する.

(c) $F \in F_\sigma$ で $F \subset E, \lambda^*(E \setminus F) = 0$ となるものが存在する.

35. $A \cap B = \emptyset$ でも, 一般に $\lambda^*(A \cup B) = \lambda^*(A) + \lambda^*(B)$ とならないことを示せ.

36. $E \subset \mathbb{R}$ を Lebesgue 可測集合とする. $\alpha \in \mathbb{R}$ とする. このとき $E + \alpha$ も Lebesgue 可測であり $\lambda(E + \alpha) = \lambda(E)$ を示せ. また αE も Lebesgue 可測で $\lambda(\alpha E) = |\alpha| \lambda(E)$ を示せ.

² $\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{j=1}^{\infty} |I_j|; I_j \text{ は開区間で } A \subset \cup_j I_j\}$

37. $E \subset \mathbb{R}$ を Lebesgue 可測集合で $\lambda(E) < \infty$ とする.

(a) $\phi(x) = \lambda(E \Delta (E + x)) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は一様連続であることを示せ.

(b) $0 < \lambda(E) < \infty$ なる Lebesgue 可測集合 E に対して

$$0 \in \{x \in \mathbb{R}; \phi(x) < \lambda(E)\} \subset E - E$$

を示せ. ここで $E - E = \{x - y; x, y \in E\}$.

(c) $E - E$ は 0 の近傍であることを示せ. つまり, 0 を含む開集合 A で $A \subset E - E$ となるものが存在する.

38. 加法についての群 $\mathbb{R}$ の部分群 $\mathbb{Q}$ の商群 $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ を考える. $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ を構成する同値類 $[x]$ から 1 点ずつ代表元を取り出し, その集合を A とする. つまり $\mathbb{R} = \bigcup_{r \in A} (r + \mathbb{Q})$. A が Lebesgue 可測でないことを示せ. (参考書を見て調べよ.)

39. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を C^1 級関数とする. A が Lebesgue 可測なら $f(A)$ も Lebesgue 可測であり, また $\lambda(A) = 0$ なら $\lambda(f(A)) = 0$ となることを示せ.

19. 17と同じ設定で, $A_n \times B_n$, $n = 1, \dots, m$, を互いに共通部分をもたない長方形とする. このとき $\mu(\cup_{n=1}^m A_n \times B_n) = \sum_n \mu_X(A_n) \cdot \mu_Y(B_n)$ と定めると, μ は $\mathcal{F}$ 上の Jordan 測度になることを示し, さらに μ が測度であることも示せ.
注意: $\mathcal{F}$ は σ -field ではない.
20. μ^* を X 上の外測度とする. このとき $\mu^*(E) = 0$ なる集合 E は μ^* -可測になることを示せ.
21. μ^* を X 上の外測度とする. μ^* -可測なる集合全体を $\mathcal{E}$ とする. このとき $\mathcal{E}$ は σ -field になることを示せ. また $\mu^*|_{\mathcal{E}}$ が $\mathcal{E}$ 上の測度になることを示せ.
22. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ を測度空間とする.
- (a) $\mu^*(A) = \inf \sum_n \mu(A_n)$ と定義する. ただし $\inf$ は $A \subset \cup_n A_n$, $A_n \in \mathcal{B}$, となる集合族 $\{A_n\}$ についてとる. このとき μ^* は外測度になることを示せ.
- (b) $\mathcal{E}$ を μ^* -可測な集合全体とする. このとき $\mathcal{E}$ は σ -field かつ $\mathcal{E} \supset \mathcal{B}$ を示せ.
- (c) $\tilde{\mu} = \mu^*|_{\mathcal{E}}$ が $\mathcal{E}$ 上の測度になり, さらに μ の拡大になっていることを示せ.
23. 設定と記号は22と同じとする. μ は σ -有限とする. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ の完備可を $(X, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$ とする. このとき $(X, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu}) = (X, \mathcal{E}, \tilde{\mu})$ を示せ.
24. 集合関数 $m^*: \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を² $m^*(M) = \inf \{\sum_n |I_n|; M \subset \cup_n I_n\}$ で定める. ここで I_n は開区間を表し, $|I_n|$ は開区間の長さを表す, i.e., $|(a, b)| = b - a$.
- (a) m^* は外測度になることを示せ.
- (b) $m^*(A + x) = m^*(A)$ を示せ. ここで $A + x = \{y + x; y \in A\}$.
- (c) $m^*(I) = |I|$ を示せ. ここで $I = (a, b], (a, b), [a, b), [a, b]$.

² $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ は $\mathbb{R}$ のべき集合族 $2^{\mathbb{R}}$ を表す.

解析学 I 演習 4 回目 2015/5/11

以下の問では何も断らなければ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間を表し, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ は Lebesgue 測度空間を表す.

40. Hopf の拡張定理を自分の言葉で証明せよ.

41. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ の外測度 $\mu^*(A) = \inf \sum_n \mu(A_n)$ に対して, $\mu^*(A) = \mu(E)$ となる, $A \subset E$, $E \in \mathcal{B}$ が存在することを示せ.

42. $\mathcal{F} = \{\cup_j^{\text{有限和}} I_j | I_j \text{ は互いに交わらない区間}\}$. $\mu : \mathcal{F} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を $\mu(I) = b - a$, $I = (a, b), [a, b), (a, b], [a, b]$ とする. 外測度 μ^* を $A \in 2^{\mathbb{R}}$ に対して $\mu^*(A) = \inf \sum_n \mu(A_n)$ と定める. $\inf$ は $A \subset \cup A_j$ でとる. $\mathcal{E}$ を μ^* -可測集合全体とする. $(\mathbb{R}, \mathcal{E}, \mu^*|_{\mathcal{E}}) = (\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ を示せ.

43. $(X, \mathcal{B}_X, \mu), (Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$ を測度空間とする. $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y$ を互いに交じり合わない長方形の和で表される集合の族とする. $\gamma : \mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を $\mathcal{B}_X \times \mathcal{B}_Y \ni \cup_{j=1}^n (A_j \times B_j)$ に対して $\gamma(\cup_{j=1}^n (A_j \times B_j)) = \sum_{j=1}^n \mu(A_j) \times \nu(B_j)$ と定義する. γ が測度になることを示せ.

44. (X, d) を距離空間とする. $A, B \subset X$ の距離を

$$\rho(A, B) = \inf\{d(x, y); x \in A, y \in B\}$$

とする. $\rho(A, B) > 0$ ならば $\mu^*(A \cup B) = \mu^*(A) + \mu^*(B)$ となる X 上の外測度 μ^* を距離外測度という. μ^* を距離外測度とする. このとき X の閉集合は μ^* -可測であることを示せ.

45. X をコンパクト距離空間とする. $\mathcal{B}$ を X の Borel σ -field, μ を $\mu(X) < \infty$ となる測度とする. 外測度 μ^* を $\mu^*(A) = \inf \sum_n \mu(A_n)$ で定める. このとき μ^* は距離外測度になることを示せ.

46. $(X, \mathcal{F}, \mu_0)$ で, $\mathcal{F}$ は field, μ_0 は測度とする. Hopf の拡張定理により $(X, \mathcal{B}(\mathcal{F}), \mu)$ が測度空間になる μ が存在する. $\mu^*(A) = \inf\{\mu_0(B); A \subset B \in \mathcal{F}\}$ とする¹. また $\mu^\#(A) = \inf\{\mu(B); A \subset B \in \mathcal{B}(\mathcal{F})\}$ とする². このとき $\mu^\# = \mu^*$ を示せ.
47. $(X, \mathcal{F})$ で, $\mathcal{F}$ は field とする. μ, ν は σ -field $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ 上の測度とする. $X = \cup_j A_j$, $A_j \in \mathcal{F}$, $\mu(A_j) < \infty$ とする. このとき $\mathcal{F}$ 上で $\mu = \nu$ ならば $\mu = \nu$ が $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ でも成立することを示せ.
48. 関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ が $f^{-1}(A) \in \mathcal{L}, \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})^3$, となるとき, ルベーク可測関数という. f, g がルベーク可測関数とする. このとき次の問に答えよ.
- (a) $f + g$ がルベーク可測になることを示せ.
- (b) fg がルベーク可測になることを示せ.
49. $f_n, n = 1, 2, 3, \dots$, はルベーク可測関数とする. このとき次の問に答えよ.
- (a) $\sup_n f_n(x)$ がルベーク可測関数になることを示せ.
- (b) $\limsup_n f_n(x)$ がルベーク可測関数になることを示せ.
50. $f_n, n = 1, 2, 3, \dots$, はルベーク可測関数とする. もし $g(x) = \lim_n f_n(x)$ が全ての x で存在するとき g はルベーク可測関数になることを示せ.

¹ μ_0 の外測度.

² μ の外測度.

³Borel σ -field

解析学 I 演習 5 回目 2015/5/18

以下の問では何も断らなければ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間を表し, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ は Lebesgue 測度空間を表す.

51. $f: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ に対して次が同値であることを示せ.

- (a) f は $\mathcal{B}$ 可測
- (b) $[f < a] \in \mathcal{B} \ \forall a \in \mathbb{R}$
- (c) $[f \leq a] \in \mathcal{B} \ \forall a \in \mathbb{R}$
- (d) $[f > a] \in \mathcal{B} \ \forall a \in \mathbb{R}$
- (e) $[f \geq a] \in \mathcal{B} \ \forall a \in \mathbb{R}$
- (f) $f^{-1}(A) \in \mathcal{B} \ \forall \text{開集合 } A \subset \mathbb{R}$

52. 連続関数 $f: (X, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ は $\mathcal{B}$ 可測であることを示せ.

53. $(Y, \mathcal{B}_Y)$ と $(X, \mathcal{B}_X)$ を可測空間とする. 集合 $E \subset X \times Y$ に対して

$E_x = \{y \in Y; (x, y) \in E\}$, $E^y = \{x \in X; (x, y) \in E\}$ とする. $E \in \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ のとき $E_x \in \mathcal{B}_Y \ (\forall x \in X)$, $E^y \in \mathcal{B}_X \ (\forall y \in Y)$ を示せ.

54. (a) $(X, \mathcal{B}, \mu)$ で定義された 2 つの関数 f, g に対して $f \sim g$ を

$N = \{x \in X; f(x) \neq g(x)\} \in \mathcal{L}$ かつ $\mu(N) = 0$ とする. これが同値関係になることを示せ.

(b) $f_1 \sim g_1, f_2 \sim g_2$ のとき, $f_1 \wedge f_2 \sim g_1 \wedge g_2$ を示せ. $f_1 \vee f_2 \sim g_1 \vee g_2$ を示せ.

55. $M \in \mathcal{L}$, $\lambda(M) > 0$ とする. $M - M = \{x - y; x, y \in M\}$ は $(-\epsilon, \epsilon)$ という形の空でない開区間を含むことを示せ.

56. $X = [0, 1)$ とする. $\mathcal{F}$ を $[a, b)$ の形の和集合全体とする.

(a) $\mathcal{F}$ が field であることを示せ.

(b) $\mu(\emptyset) = 0, \mu([a, b)) = \infty$ とする. μ が $\mathcal{F}$ 上の測度になることを示せ. また $(X, \mathcal{F}, \mu)$ は σ -finite でないことを示せ.

(c) $\mathcal{F}$ を含む最小の σ -field を $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ とする. μ の $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ への異なる拡大 μ_1, μ_2 の例を挙げよ.

57. (a) $\alpha \in \bar{\mathbb{R}}$ とする. $f = \alpha$ a.e. となる関数はルベーグ可測であることを示せ.

(b) $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数 f が単調非減少ならば, f はルベーグ可測になることを示せ.

58. $\mathbb{R}$ 上で定義された実数値関数 f が右連続ならば, f ルベーグ可測になることを示せ.

59. (a) $\mathbb{Q} \in \mathcal{L}$ かつ $\lambda(\mathbb{Q}) = 0$ を示せ.

(b) カントール集合 C (定義は各自調べよ) は $\#C = \infty$ (非可算無限個) で $C \in \mathcal{L}$ かつ $\lambda(C) = 0$ となることを証明せよ.

60. $f_C : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $f_C(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\alpha_n 3^{-n}$ ($x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n 2^{-n}$) で定義する.

(a) f_C が単調増加であることを示せ. (特に f_C はルベーグ可測)

(b) $V \subset \mathbb{R}$ をルベーグ可測でないとする. このとき $B = f_C(V) \subset \mathbb{R}$ はルベーグ可測だが Borel 可測でないことを示せ.

(c) ルベーグ可測な定義関数 $\mathbb{1}_B$ と, f_C の合成関数 $\mathbb{1}_B \circ f_C$ がルベーグ可測でないことを示せ.

解析学 I 演習 6 回目 2015/5/25

以下の問では何も断らなければ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間を表し, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ はルベーグ測度空間を表す.

61. $(X, \mathcal{F}, \mu)$ で $\mathcal{F}$ は field, μ は Jordan 測度とする. μ は σ -finite とする, i.e., $X = \cup X_n$, $\mu(X_n) < \infty$. このとき次が同値であることを示せ.

(a) μ は測度である.

(b) i. $B_n \in \mathcal{F}$, $B_n \downarrow$, $\cap B_n = \emptyset$, $\mu(B_1) < \infty$ ならば $\lim \mu(B_n) = 0$

ii. $\mu(B) = \infty$ となる $B \in \mathcal{F}$ に対して $\lim \mu(B \cap X_n) = \infty$.

62. $(X, \mathcal{B}_X, \mu)$, $(Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$ はともに σ -finite な測度空間とする. $\mathcal{F}$ を互いに共通部分を持たない有限個の長方形の和集合の族とする. これは field であった.

$X = \cup_p X_p$, $Y = \cup_q Y_q$ で X_p も Y_q も増大列で測度有限とする. いま, X_p , Y_q 上の σ -field と測度を $\mathcal{B}_X^p = \{A \cap X_p; A \in \mathcal{B}_X\}$, $\mathcal{B}_Y^q = \{B \cap Y_q; B \in \mathcal{B}_Y\}$, $\mu_p(\cdot) = \mu(\cdot \cap X_p)$, $\nu_q(\cdot) = \nu(\cdot \cap Y_q)$ として, 2 つの有限測度空間 $(X_p, \mathcal{B}_X^p, \mu_p)$, $(Y_q, \mathcal{B}_Y^q, \nu_q)$ について考える. $\mathcal{F}_{pq}$ を互いに共通部分を持たない $X_p \times Y_q$ の有限個の長方形の和集合の族とする.

(a) $\cup_{p,q} \mathcal{F}_{pq} = \mathcal{F}$ を示せ.

(b) $\gamma_{pq} : \mathcal{F}_{pq} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を講義で定義した $\gamma : \mathcal{F} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ と同様に定義する¹. $E = \cup_{p,q} E_{pq} \in \cup_{p,q} \mathcal{F}_{pq}$ に対して $\Gamma(E) = \sum_{pq} \gamma_{pq}(E_{pq})$ と定義する. このとき $F_n \in \mathcal{F}$, $F_n \downarrow$, $\cap_n F_n = \emptyset$, $\Gamma(F_1) < \infty$ ならば $\lim_n \Gamma(F_n) = 0$ を示せ.

(c) $\Gamma(F) = \infty$ ならば $\lim_n \Gamma(F \cap Z_n) = \infty$ を示せ. ここで $Z_n = X_n \times Y_n$.

(d) Γ が $(X \times Y, \mathcal{F})$ 上の測度になることを示せ. ヒント 61 を参照せよ.

¹これは測度になる. 先週講義でやった.

63. X, Y を位相空間とする. X, Y の Borel σ 体を $\mathcal{B}(X), \mathcal{B}(Y)$ とする. また, 直積位相空間 $X \times Y$ の Borel σ 体を $\mathcal{B}(X \times Y)$ とする.
- (a) X の開集合 A に対して $\Phi(A) = \{B \subset Y; A \times B \in \mathcal{B}(X \times Y)\}$ が σ 体であることを示し, さらに $\mathcal{B}(Y) \subset \Phi(A)$ を示せ.
- (b) 任意の $A \in \mathcal{B}(X), B \in \mathcal{B}(Y)$ に対して $A \times B \in \mathcal{B}(X \times Y)$ を示せ.
64. $\mathbb{R}^d$ の立方体 $\prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$ の面 $\{a_1\} \times \prod_{i=2}^d [a_i, b_i]$ の $\mathbb{R}^d$ でのルベーグ測度がゼロであることを示せ.
65. $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ を滑らかな曲線とする. つまり γ は連続微分可能. このとき $A = \gamma([0, 1])$ の $\mathbb{R}^2$ でのルベーグ測度がゼロであることを示せ.
66. $A \in \mathcal{L}$ は $\lambda(A) = 0$ とする. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ は $|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|$ を満たしているとする. このとき $\lambda(f(A)) = 0$ を示せ.
67. $U \subset \mathbb{R}$ は開集合で, $A \subset U$ が $\lambda(A) = 0$ とする. $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ は連続微分可能とする. このとき $\lambda(f(A)) = 0$ を示せ.
68. 問 66, 問 67 は d 次元 $\mathbb{R}^d$ でも成立することを示せ.
69. 拡大された実数 $\bar{\mathbb{R}}$ に値をとる可測な関数 $f, g : (X, \mathcal{B}) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ について次をしめせ.
- (a) $[f > g] \in \mathcal{B}$ である.
- (b) $[f \geq g] \in \mathcal{B}$ である.
- (c) $[f = g] \in \mathcal{B}$ である.
- (d) $\alpha \in \mathbb{R}$ に対して $f + \alpha, \alpha f$ は可測である.
- (e) $f + g$ も可測である.
- (f) fg も可測である.

70. $f : (X, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ は可測関数で $f \geq 0$ とする. $A = f^{-1}([\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}))$, $A_\infty = f^{-1}([f \geq n])$ とする.

(a) $\phi_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \mathbb{1}_{A_k} + \mathbb{1}_{A_\infty}$ が可測であることを示せ.

(b) $\phi_n(x) \rightarrow f(x)$ ($n \rightarrow \infty$) を示せ.

71. $\mathcal{F} = \{E_1, \dots, E_n\}$ を $\mathbb{R}$ の有限分割とする. つまり $E_i \cap E_j = \emptyset$, $\cup_j E_j = \mathbb{R}$. $\mathcal{B}$ を $\mathcal{F}$ を含む最小の σ -field とする. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して次が同値であることを示せ.

(a) f は $\mathcal{B}$ 可測である.

(b) f は 各 E_j 上で一定値でする.

72. 命題 『 $f : (X, \mathcal{B}) \rightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ が可測であるための必要十分条件は各点で f に収束する単関数列 f_n が存在することである.』これを示せ.

73. 区間 $I = [0, 1]$ 上の関数列 $f_n(x)$ を次のように定義する. 自然数 $1, 2, 3, 4, \dots$ を

$$1; 2, 3; 4, 5, 6, 7; \dots, 2^k, \dots, 2^{k+1} - 1; \dots$$

と区分けして自然数 n が $n = 2^k + l$, $l = 0, \dots, 2^k - 1$, と表されるとき $f_n(x)$ を $f_n(x) = 1$ ($l/2^k \leq x \leq (l+1)/2^k$), $f_n(x) = 0$ (その他) とする. 次に答えよ.

(a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda(\{x \in I; |f_n(x)| > \epsilon\}) = 0$ を示せ.

(b) $f_n(x)$ は $n \rightarrow \infty$ で $\forall x \in I$ で収束しないことを示せ.

(c) 適当な部分列 n_k をとれば, $f_{n_k}(x)$ ほとんど至るところで収束することを示せ.

74. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ は C^1 級とする. このとき $\lambda(\{f(x); x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0\}) = 0$ を示せ.

75. $f : (X, \mathcal{B}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ は $\mathcal{B}$ 可測関数とする.

(a) $\mathcal{F} = \{E \subset \mathbb{R}; f^{-1}(E) \in \mathcal{B}\}$ は $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ を含む σ -field になることを示せ.

(b) $g : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ が Borel 可測ならば $g \circ f$ は $\mathcal{B}$ 可測になることを示せ.

76. $f, g : (X, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}$ は $\mathcal{B}$ 可測であるとする. このとき $h : (X, \mathcal{B}) \rightarrow \mathbb{R}^2$, $h(x) = (f(x), g(x))$ も $\mathcal{B}$ 可測になることを示せ.

77. ルベーグ可測関数 f に対して $A = \{a \in \mathbb{R}; \lambda(f^{-1}((a, \infty))) = 0\}$ とおく. $A \neq \emptyset$ とする. 次が同値であることを示せ.

(a) $f(x) \leq b$ がほとんど至るところで成立する.

(b) $\inf A \leq b$.

解析学 I 演習 8 回目 2015/6/8

以下の問では何も断らなければ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間を表し, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ は Lebesgue 測度空間を表す.

86. (Egorov の定理の一般化) (Y, d) を距離空間とする. $f_n : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Y, d)$ は可測関数列. f_n が可測関数 $f : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow (Y, d)$ に概収束すれば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して (1) $\mu(X \setminus E) < \epsilon$, (2) $f_n \rightarrow f$ は E 上で一様収束する, ような $E \in \mathcal{B}$ が存在することを示せ.
87. (Lusin の定理の一般化) $(X, \mathcal{U})$ を正規空間とする. $(X, \mathcal{B}(X), \mu)$ は有限測度空間で, しかも $E \in \mathcal{B}(X)$ について $\mu(E) = \sup\{\mu(F); F \subset E, F \text{ は閉}\}$ が成り立つとする. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は可測とする. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, (1) $\mu(X \setminus F_\epsilon) < \epsilon$, (2) f は F_ϵ 上で連続, となる閉集合 F_ϵ が存在することを示せ.
88. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は有限測度空間とする. $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ が $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ に概収束すれば, それは測度収束することを示せ.
89. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の可測関数列 $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ が可測関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ に測度収束すれば, $\{f_n\}$ に概収束する部分列が存在することを示せ.
90. (a) $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ を考える. $f_n(x) = \mathbb{1}_{(-\infty, n]}(x)$ と定義する. このとき f_n は 恒等的に 1 に等しい関数 f に各点収束するが, 測度収束しないことを示せ.
- (b) $X = (0, 1]$ とし, ルベーグ測度 λ を考える. $f_{k,i}(x) = \mathbb{1}_{(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k}]}(x)$, $i = 1, 2, \dots, k$ とする. 関数列 $f_{1,1}, f_{2,1}, f_{2,2}, f_{3,1}, f_{3,2}, f_{3,3}, \dots$ はゼロに測度収束するが, X のいかなる点でも収束しないことを示せ.
91. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ はルベーグ可測で, ほとんどいたるところ有限な値をとるとする. 任意の $\epsilon > 0, \delta > 0$ に対して, $\lambda(\{x \in [a, b]; |f(x) - \chi(x)| > \epsilon\}) < \delta$ となる単関数 χ が存在することを示せ. また, $\lambda(\{x \in [a, b]; |f(x) - g(x)| > \epsilon\}) < \delta$ となる連続関数 g が存在することを示

解析学 I 演習 7 回目 2015/6/1

以下の問では何も断らなければ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間を表し, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ は Lebesgue 測度空間を表す.

78. 問 70 及び講義では $f \geq 0$ を仮定した. 一般の $\bar{\mathbb{R}}$ 値可測関数 f について f に各点収束する単関数列 f_n が存在することを示せ.
79. $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ が有界な可測関数であるとする. つまり, $\sup_{x \in X} |f(x)| < \infty$. このとき, f に一様に収束する単関数列 f_n が存在することを示せ.
80. $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ をルベーグ可測関数列とする. ϵ_n, δ_n は $\lim_n \epsilon_n = 0, \sum_n \delta_n < \infty$ を満たしているとする. f_n が $\lambda(\{x \in \mathbb{R}; |f_n(x)| > \epsilon_n\}) < \delta_n$ を満たせば, $f_n(x)$ は a.e. に 0 に収束することを示せ. ヒント: 問 8 を参照せよ.
81. $f : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ はルベーグ可測とする. $f = g$, a.e. ならば g もルベーグ可測になることを示せ.
82. (a) 完備測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上で定義された可測関数 $f_n : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ について $f_n(x) \rightarrow f(x)$ a.e ならば f も可測であることを示せ.
- (b) 有限測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上で定義された可測関数 $f_n : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ について $f_n(x) \rightarrow f(x)$ a.e ならば f_n は f に測度収束することを示せ.
83. 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上で定義された可測関数 $f_n : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ について $f_n(x) \rightarrow f(x)$ が測度収束するならば $f_{n'} \rightarrow f$ a.e となる部分列 n' が存在することを示せ.
84. 測度空間 $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は σ -finite で, その完備化を $(X, \bar{\mathcal{B}}, \bar{\mu})$. $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ は $A \in \mathcal{B}$ の上で定義された $\bar{\mathcal{B}}$ 可測な関数とする. このとき A の上の $\bar{\mathcal{B}}$ 可測な関数 $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ で $|g(x)| \leq |f(x)|, \bar{\mu}(E(f \neq g)) = 0$ となるものが存在することを示せ.
85. $f : (0, 1] \times (0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ は $f(\cdot, y)$ は (y を止めるごとに) ルベーグ可測で, $f(x, \cdot)$ は (x を止めるごとに) 単調増加関数とする. このとき f はルベーグ可測であることを示せ.

解析学 I 演習 9 回目 2015/6/15

以下の問では何も断らなければ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間を表し, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ は Lebesgue 測度空間を表す.

92. $f : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ は非負値可測関数とする. f の各点に下から近づく単関数列 $\phi_n(x) \uparrow f(x)$ によって $\int_X f(x) d\mu = \lim_n \int_X \phi_n(x) d\mu$ と定義した. $\int_X f(x) d\mu$ の定義が単関数列の選択によらないことを示せ.

93. $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ は可測関数とする. 以下を示せ.

(a) $f \leq g$ ならば $\int_X f d\mu \leq \int_X g d\mu$.

(b) $\int_X f + g d\mu = \int_X f d\mu + \int_X g d\mu$.

(c) $\alpha \int_X f d\mu = \int_X \alpha f d\mu, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

94. $E \in \mathcal{B}$ の上で, f は有界かつ g が可積分であるとする. $m = \inf_{x \in E} f(x)$, $M = \sup_{x \in E} f(x)$ とおく. このとき $m \leq c \leq M$ で $\int_E f(x)|g(x)| d\mu = c \int_E |g(x)| d\mu$ となる c が存在することを示せ.

95. f はルベーグ可測とする. このとき以下を示せ.

(a) $\int_{\mathbb{R}} f(x+y) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda$

(b) $\int_{\mathbb{R}} f(-x) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f(x) d\lambda$

96. f はルベーグ可積分とする. このとき $\lim_{|y| \rightarrow 0} \int |f(x+y) - f(x)| d\lambda = 0$ を示せ.

97. $f : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を可測関数, $N \in \mathcal{B}$ はゼロ集合 $\mu(N) = 0$. このとき $\int_N f(x) d\mu = 0$ を示せ.

98. $f : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を非負の可測関数とし $\int_X f(x) d\mu = 0$ とする. このとき $f = 0$, a.e. を示せ.

99. (Fatou の補題) $f_n : (X, \mathcal{B}, \mu) \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を非負の可測関数列とする. このとき $\liminf_n \int_X f_n(x) d\mu \geq \int_X \liminf_n f_n(x) d\mu$ を示せ.

解析学 I 演習 10 回目 2015/6/22

以下の問では何も断らなければ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間を表し, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ は Lebesgue 測度空間を表す.

100. (a) $E \in \mathcal{L}$ 上で $f(x) \geq 0$ となるルベーグ可測関数 f に対して

$$E_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \in E, 0 \leq y \leq f(x)\} \in \mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$$

になることを示せ.

- (b) 2次元のルベーグ測度を $\lambda \otimes \lambda$ とする. このとき次を示せ.

$$\lambda \otimes \lambda(E_f) = \int_E f(x) d\lambda(x).$$

101. $A, B \in \mathcal{B}$, $A \cap B = \emptyset$ で可測関数 f は A, B 上で可積分なとき, f は $A \cup B$ 上でも可積分で

$$\int_A f d\mu + \int_B f d\mu = \int_{A \cup B} f d\mu$$

となることを示せ.

102. 可測関数 f に対して $\int_X |f(x)| d\mu(x) < \infty$ と $|\int_X f(x) d\mu(x)| < \infty$ が同値であることを示せ.

103. 可測関数 f が可積分とする. 可測関数 g が $f = g$, a.e. のとき g も可積分であることを示せ.

104. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ がルベーグ可積分ではないが, 広義リーマン可積分であることを示せ.

105. 非負可測関数列 $f_n : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ が可測関数 $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ に概収束し, しかも $0 \leq f_n \leq f(\forall n)$ となるとき次を示せ.

$$\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

106. 非負可測関数の非減少列 $f_n : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ が可測関数 $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ に概収束するとき次を示せ.

$$\int_X \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_X f_n d\mu.$$

解析学 I 演習 11 回目 2015/7/6

以下の問では何も断らなければ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間を表し, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ は Lebesgue 測度空間を表す.

112. $(X, \mathcal{B}_X, \mu), (Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$ を σ 有限な測度空間とする. $E \in \mathcal{B}_X \otimes \mathcal{B}_Y$ とする.

(a) Section $E_x = \{y \in Y; (x, y) \in E\}$ が可測であることを示せ.

(b) $X \ni x \mapsto \nu(E_x) \in \bar{\mathbb{R}}$ が可測であることを示せ.

(c) $\int_X \nu(E_x) d\mu = \mu \otimes \nu(E)$ を示せ.

113. $(X, \mathcal{B}_X), (Y, \mathcal{B}_Y)$ を σ 有限な可測空間とする. $f: X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を非負可測関数とする.

(a) $y \mapsto f(x, y)$ が任意の $x \in X$ ごとに可測であることを示せ.

(b) $y \mapsto \int_X f(x, y) d\mu$ が可測であることを示せ.

114. Fubini の定理 (講義でやった) を自分の言葉で示せ.

115. $(X, \mathcal{B}_X, \mu), (Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$ を σ 有限な測度空間とする. $f: X \times Y \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ を可測関数とする. このとき $\int_X \left\{ \int_Y |f(x, y)| d\nu \right\} d\mu$ または $\int_Y \left\{ \int_X |f(x, y)| d\mu \right\} d\nu$ が有限ならば f は $X \times Y$ 上で可積分であり

$$\int_{X \times Y} f(x, y) = \int_X \left\{ \int_Y f(x, y) d\nu \right\} d\mu = \int_Y \left\{ \int_X f(x, y) d\mu \right\} d\nu$$

が成り立つことを示せ.

116. 可測関数列 $f_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ は, 可測関数 $f: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ に $f_n \rightarrow f$ a.e. とする. 非負可測関数列 $g_n: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ と非負可測関数 $g: X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ が存在して次を満たすとする.

(0) g は可積分, (1) $\int_X |g_n(x) - g(x)| d\mu \rightarrow 0$, (2) $|f_n(x)| \leq g_n(x)$ a.e. このとき

$\int_X f_n(x) d\mu \rightarrow \int_X f(x) d\mu$ を示せ¹.

¹Lebesgue の収束定理の拡張

117. 可積分な関数列 $f_n : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ は可測関数 $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ に $f_n \rightarrow f$ a.e. とする. いま, $C > 0$ が存在して $\int_X |f_n(x)| d\mu < C$ が全ての n で成立しているとする. このとき

$$\int_X |f_n(x) - f(x)| d\mu \rightarrow 0 \quad \text{と} \quad \int_X |f_n(x)| d\mu \rightarrow \int_X |f(x)| d\mu$$

が同値であることを示せ.

118. ϕ は可積分関数で $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1$ とする. $\phi_\epsilon(x) = \epsilon^{-1} \phi(x/\epsilon)$ とする. f は $x = a$ で連続な有界可測関数とする. このとき $\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi_\epsilon(x - a) f(x) dx = f(a)$ を示せ.

119. $(1 + |x|)f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上の可積分関数であるとする. このとき $F(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$ は連続で微分可能で, その微分が $-i \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} x f(x) dx$ に等しいことを示せ.

120. $f(x)$ が $\mathbb{R}$ 上の可積分関数であるとする. このとき $F(k) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ikx} f(x) dx$ は連続で $\lim_{|k| \rightarrow \infty} F(k) = 0$ となることを示せ².

121. $f_n(x) = n^\alpha (x \in [1/(n+1), 1/n])$, $f_n(x) = 0 (x \notin [1/(n+1), 1/n])$ とする.

(a) $\alpha \leq 2$ のとき $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$ を求めよ.

(b) $1 \leq \alpha \leq 2$ のとき $f_n(x) \leq \phi(x)$ で $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx < \infty$ となる $\phi(x)$ が存在しないことを示せ.

122. $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の可測関数 $f(x, t)$, $t \in (a, b)$ は x の関数として可積分, t の関数として微分可能で, $|f_t(x, t)| \leq \phi(x) \quad \forall (x, t) \in X \times (a, b)$ で ϕ が X 上で可積分とする. このとき $F(t) = \int_X f(x, t) d\mu$ は微分可能で $F'(t) = \int_X f_t(x, t) d\mu$ を示せ.

123. $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$ とする. $\Gamma(s)$ は $s > 0$ で何回でも微分可能であり, $d^n \Gamma(s)/ds^n = \int_0^\infty e^{-x} x^{s-1} (\log x)^n dx$ となることを示せ.

124. $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^\infty x^n$ の両辺を積分して調和級数 $\sum_{n=1}^\infty 1/n$ が発散することを示せ.

²Riemann-Lebesgue の定理という.

125. $0 < \alpha < 1$ とし, $q_n \in \mathbb{Q} \cap (0, 1)$ は $(0, 1)$ 内の全ての有理数を整列させたものとする. このとき $\sum_n 2^{-n} |x - q_n|^{-\alpha} < \infty$ a.e. を示せ.

126. $x \in [0, 1]$ を三進展開 $x = \sum_{n=1}^{\infty} 3^{-n} a_n$ する. N を $a_n = 1$ となる最小の n とし, b_n を $n < N$ のときに $b_n = a_n/2$, また $b_N = a_N$ と定める. $[0, 1]$ 上の関数を $C(x) = \sum_{n=1}^N 2^{-n} b_n$ とする³

(a) C は $[0, 1]$ 上, 単増で連続であることを示せ.

(b) C は $[0, 1]$ 上, $C'(x) = 0$ a.e. を示せ.

(c) $C(1) - C(0) = 1$ を示せ.

³カントールの三進関数という.

107. 可測関数列 $f_n : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ に対して $f_n(x) \leq \psi(x)$ a.e. を満たす可積分関数 ψ が存在するならば次を示せ.

$$\limsup_n \int_X f_n(x) d\mu \leq \int_X \limsup_n f_n(x) d\mu.$$

108. 非負可測関数 $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ に対して

$$\mathcal{B} \ni E \mapsto \nu(E) = \int_E f(x) d\mu$$

は $(X, \mathcal{B})$ 上の測度になることを示せ.

109. $f_n(x) \geq 0$ は可測関数とする. このとき, 次を示せ.

$$\int_X \sum_{n=1}^{\infty} f_n(X) d\mu(X) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n(X) d\mu(X).$$

110. 可測関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ は可積分とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対して十分小さな $\delta > 0$ を選び $\mu(E) < \delta \implies \left| \int_E f(x) d\mu \right| < \epsilon$ と出来ることを示せ.

111. f を $E \in \mathcal{L}$ の上でルベーグ可積分とする. このとき, 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある有界集合の外で恒等的にゼロになるような $\mathbb{R}$ 上の連続関数 (もちろんルベーグ可測) f_ϵ で

$$\left| \int_E f(x) d\lambda(x) - \int_E f_\epsilon(x) d\lambda(x) \right| < \epsilon$$

となるものが存在することを示せ.

解析学 I 演習 12 回目 2015/7/13

以下の問では何も断らなければ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間を表し, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ は Lebesgue 測度空間を表す.

127. $f_n(x) = x \sum_{k=1}^n e^{-kx}$ とする.

(a) $\int_0^\infty f_n(x) dx$ の値を求めよ.

(b) $\int_0^\infty \frac{x}{e^x - 1} dx$ の値を求めよ.

128. $f(t) = \int_0^\infty \sin(tx^n) e^{-x} dx$ ($t \in \mathbb{R}$) とする. 任意の $n > 0$ に対して $f(t)$ が微分できることを示せ.

129. $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n \sin x$ とする.

(a) $(1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x$ ($x > 0$) を示せ.

(b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\pi/2} f_n(x) dx$ の値を求めよ.

130. f を $[0, 1]$ 上の正值有界ルベーグ可測関数とする. $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n \log(1 + \frac{f(x)}{n}) dx$ の値を求めよ.

131. $f(x) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\sin nx}{2^n}$ が C^1 級であることを示せ.

132. $\lim_{n \rightarrow \infty} n \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$ の値を求めよ.

133. f を区間 $[a, b]$ 上のルベーグ可測関数とする. $\int_a^x f(t) dt = 0$ ($\forall x \in [a, b]$) ならば $f = 0$ a.e. を示せ.

134. f を区間 $[a, b]$ 上のルベーグ可積分関数とする. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ が連続であることを示せ.

135. f を区間 $[a, b]$ 上のルベーグ可積分関数とする. $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ は微分可能 a.e. で $F'(x) = f(x)$ a.e. であることを示せ.

136. $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ は単調増加関数とする. このとき, f はほとんどいたるところで微分 $f'(x)$ が存在した. $f'(x)$ がほとんどいたるところで有限の値であることを示せ.

137. $F(t) = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{\sin x}{x} dx$ とする.

(a) $|F(t)| < \infty$ を示せ.

(b) $F'(t) = -\frac{1}{t^2 + 1}, t > 0$, を示せ.

(c) $\lim_{t \rightarrow +0} F(t) < \infty$ で $\lim_{t \rightarrow +0} F(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ を示せ.

138. 単調増加関数 $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ に対して $f^*(x) = f(x+0)$ と定義する.

(a) f^* は右連続な単調増加関数であることを示せ.

(b) $E = \{x \in \mathbb{R}; f, g \text{ が連続}\}$ とする. $f = g$ が E 上で成立していると仮定する. このとき $f^* = g^*$ を示せ.

139. f は $[a, b]$ 上で可積分とする. $E = \left\{x \in [a, b]; \frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)\right\}$ とする. $x \in E$ に対して $\lim_{x \in I, |I| \rightarrow 0} \frac{1}{|I|} \int_I f(t) dt = f(x)$ が成立することを示せ. ただし I は区間で, $|I|$ は I の長さ.

140. f は $[a, b]$ 上で可積分とする. このとき $\lim_{x \in I, |I| \rightarrow 0} \frac{1}{|I|} \int_I |f(t) - f(x)| dt = 0$ a.e. が成立することを示せ¹. ただし I は区間で, $|I|$ は I の長さ.

¹このような点 x をルベグ点という.

解析学 I 演習 13 回目 2015/7/17

以下の問では何も断らなければ $(X, \mathcal{B}, \mu)$ は測度空間を表し, $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ は Lebesgue 測度空間を表す. また, 明らかなきは, ルベーク可測を単に可測という.

141. (a) $E \subset \mathbb{R}$ は (1 次元) ルベーク可測とする. このとき $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x - y \in E\}$ は (2 次元) ルベーク可測であることを示せ.

(b) $f: \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ が可測なとき, $f(x - y)$ は $\mathbb{R}^2$ 上で可測であることを示せ.

(c) $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ が可積分ならば $y \mapsto f(x - y)g(y)$ は, ほとんどいたるところの x に対して, 可積分であることを示せ.

(d) (c) の条件下で $h(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x - y)g(y)dy$ が可積分であることを示せ.

142. λ を $\mathbb{R}$ のルベーク測度とする. $A, B \subset \mathbb{R}$ をルベーク可測集合とする. このとき $\int_{\mathbb{R}} \lambda([A - x] \cap B)d\lambda = \lambda(A)\lambda(B)$ を示せ. ただし $[A - x] = \{y - x; y \in A\}$.

143. $[a, b]$ 上の関数が有界変動であるための必要十分条件が単調増加関数の差で表されることである, これを示せ.

144. f が $[a, b]$ 上の有界変動関数ならば任意の $c \in (a, b)$ に対して $f(c - 0)$ と $f(c + 0)$ が存在することを示せ. また, f の不連続点は高々可算個であることを示せ.

145. f を $(X, \mathcal{B}, \mu)$ 上の可積分関数とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して $\mu(E) < \delta$ ならば $|\int_E f d\mu| \leq \epsilon$ となることを示せ.