## 数学概論 III 演習 1

以下の問で距離空間 $(X,d)$ が与えられたときは $d$ から決まる位相 $\mathcal{U}_d$ で $X$ に位相を定義し $(X,d)$ を位相空間とみなすものとする.

1. $(X,d)$ を距離空間とする. 次が成立することを示せ.
   (i) $|d(x,y)-d(z,y)| \le d(x,z)$
   (ii) $|d(x,y)-d(z,w)| \le d(x,z)+d(y,w)$

2. $(X,d)$ を距離空間とする. $\mathcal{F}$ を $X$ の閉部分集合族とする. 次を示せ.
   (1) $\emptyset, X \in \mathcal{F}$, (2) $F_1, F_2 \in \mathcal{F}$ ならば $F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$, (3) $F_\lambda \in \mathcal{F}$ ならば $\cap_\lambda F_\lambda \in \mathcal{F}$.

3. 距離空間において, 開集合 $A_\lambda$ の無限個の共通部分 $\bigcap_\lambda A_\lambda$ が開集合にならない例をあげよ. また閉集合 $B_\lambda$ の無限個の交わり部分 $\bigcup_\lambda B_\lambda$ が閉集合にならない例をあげよ.

4. $(X,d)$ を距離空間とする. $X$ の部分集合 $A$ と $X$ の点 $x$ を考える. 点 $x$ から $A$ への距離 $d(x,A)$ を $d(x,A)=\inf\{d(x,y) \mid y \in A\}$ で定める. $d(x,A)=0$ であるが $x \in A$ とならない例をあげよ.

5. 記号は 4. と同じとする.
   (i) $d(x,A) \le d(x,y)+d(y,a)$ が $\forall a \in A$ で成立することを示せ.
   (ii) $|d(x,A)-d(y,A)| \le d(x,y)$ を示し $d(x,A)$ は $x$ の連続関数であることを示せ.

6. 記号は 4. と同じとする. 部分集合 $A \subset X$ に対してその $\epsilon$-近傍を $U(A,\epsilon)=\{x \in X | d(x,A) < \epsilon\}$ と定める. $U(A,\epsilon)$ が開集合になることを示せ.

7. $(X,d)$ を距離空間とする. $Y \subset X$ とし $y, y' \in Y$ に対して $d_Y(y,y') = d(y,y')$ と定める. このとき $(Y,d_Y)$ も距離空間になることを示せ.

8. $p \geq 1$ とする．$d_p(x,y) = \left( \sum_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^p \right)^{1/p}$ が $\mathbb{R}^n$ 上の距離になることを示せ.

9. $d(x,y) = \left| \dfrac{x}{1+|x|} - \dfrac{y}{1+|y|} \right|$ が $\mathbb{R}$ 上の距離となることを示せ.

10. $X$ を集合とする．実数値関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を $d(x,y) = 1 (x \neq y)$, $d(x,y) = 0 (x = y)$, と定める．$d$ が距離になることを示せ.

11. $(X,d)$ を距離空間で有界でないとする．このとき $X$ の無限個の元を含む部分集合 $D$ で $d(x,y) \geq 1$, $\forall x, y \in D$, となる $D$ が存在することを示せ.

12. (i) $d(x,y) = \left| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \right|$ は $(0,1]$ 上の距離を定めることを示せ.
(ii) 次の不等式を満たすような定数 $C_1$ および $C_2$ が存在するかどうか調べよ.

$$d(x,y) \leq C_1 |x-y|, \qquad |x-y| \leq C_2 d(x,y)$$

13. $X = (0,1]$, $d(x,y) = \left| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \right|$ とする.
(i) $X$ の数列 $x_n$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ が $d$ でコーシー列であれば $\dfrac{1}{x_n}$ は実数列として収束することを示せ.
(ii) $X$ の数列 $x_n$ $(n = 1,2,3,\cdots)$ が，$d$ に関してコーシー列なら収束することを示せ.

14. $X = [1,\infty)$, $d(x,y) = \left| \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} \right|$ とおく．この距離 $d$ に関してコーシー列は常に収束するかどうか判定せよ.

15. $(X,d)$ を距離空間とする．このとき $\rho(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ も $X$ 上の距離になることを示せ.

16. $(X,d)$ を距離空間とし，$\rho(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ とおく．$(X,d)$ における開集合と $(X,\rho)$ における開集合が一致することを示せ.

17. $(X, d)$ を距離空間とし, $\rho(x, y) = \dfrac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$ とおく. $X$ が有界であることと $ad(x, y) \leq \rho(x, y) \leq bd(x, y)$, $\forall x, y \in X$, となる正の定数 $a, b$ が存在することが同値であることを示せ.

18. 実数の無限列 $x = (x_1, x_2, \cdots, )$ 全体の作る空間を $X$ とおく. このとき $d(x, y) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$ が $X$ 上の距離になることを示せ.

19. 自然数の無限列 $x = (x_1, x_2, \cdots, )$ 全体の作る空間を $X$ とおく. このとき

$$d(x, y) = \begin{cases} \dfrac{1}{k} & x_k \neq y_k \text{ かつ } x_n = y_n (n < k) \\ 0 & x_n = y_n \forall n \end{cases}$$

と定めるとき. $d$ は $X$ 上の距離になることを示せ. さらに不等式 $d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$ が成立することを示せ.

20. $A$ を距離空間 $(X, d)$ の部分集合とする. $A$ の内部 $A^\circ$ は $A$ に含まれる最大の開集合であることを示せ.

21. $A$ を距離空間 $(X, d)$ の部分集合とする. $\bar{A}$ は $A$ を含む最小の閉集合であることを示せ.

22. 距離空間の部分集合 $A$ が閉集合であるための必要十分条件は $\bar{A} = A$ であることを示せ.

23. 距離空間の部分集合 $A$ が開集合であるための必要十分条件は $A^\circ = A$ であることを示せ.

24. $\mathbb{R}^n$ の開区間 $(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せ. また閉区間 $[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることを示せ.

## 数学概論 III 演習 2

25. $d(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ 上のユークリッドの距離とする．関数 $\rho : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を次で定義する．

$$\rho(x,y) = \begin{cases} d(0,x) + d(0,y) & x_1y_2 \neq x_2y_1 \\ d(x,y) & x_1y_2 = x_2y_1 \end{cases}$$

(a) $\rho$ が距離になることを示せ．

(b) $p = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ とする．$\{x \in \mathbb{R}^2; \rho(p,x) < 1\}$ を求めよ．

(c) $(\mathbb{R}^2, \rho)$ の位相はユークリッド空間の位相と一致しないことを示せ．

26. $\mathbb{R}^2$ 内の原点を通る直線全体を $X$ とおく．$l_1, l_2 \in X$ の間の角度を $d(l_1, l_2)$ $(0 \leq d(l_1,l_2) \leq \pi/2)$ とおく．$d$ は $X$ の距離を定めることを示せ．

27. 距離空間 $(X,d)$ において点列 $\{x_n\}$ が $\displaystyle\sum_{m=1}^{\infty} d(x_m, x_{m+1}) < \infty$ となるとき $\{x_n\}$ はコーシー列になることを示せ．

28. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の以下のような部分集合について，それぞれの閉包，内部，境界をそれぞれ求めよ．

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; a < x < b, c \leq y \leq d\}$

(b) $\{(x;y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(0,0)\}$

29. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の以下のような部分集合について，それぞれの閉包，内部，境界をそれぞれ求めよ．

(a) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x, y \in \mathbb{Q}\}$

(b) $A_n = \{(x, 1/n) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq 1\}$ とするとき $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$．

30. 単位円周 $S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;x^2+y^2=1\}$ を考える．$S^1\ni p,q$ の距離 $d(p,q)$ を $p$ から $q$ への短い方の弧の長さとする．

    (a) $p=(\cos\theta_p,\sin\theta_q)$, $q=(\cos\theta_q,\sin\theta_q)$ とした場合，$d(p,q)$ はどのように表示されるか.

    (b) 距離 $d$ で定まる $S^1$ の開集合は $\mathbb{R}^2$ のユークリッドの距離で定まる $S^1$ の開集合 (相対位相のこと[1]) となり，逆に $\mathbb{R}^2$ のユークリッドの距離で定まる $S^1$ の開集合は $d$ で定まる $S^1$ の開集合であることを示せ.

31. 有理数全体 $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の開集合でも閉集合でもないことを示せ.

32. 射影 $\pi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ を $\pi((x,y))=x$ で定める．$\mathbb{R}^2$ の開集合 $U$ に対し $\pi(U)$ は $\mathbb{R}$ 上の開集合であることを示せ.

33. $\mathscr{U}=\{U\subset\mathbb{R};x\in U$ ならば $\exists\epsilon>0\ st\ [x-\epsilon,x+\epsilon]\subset U\}$ はユークリッド空間としての $\mathbb{R}$ の位相と一致することを示せ.

34. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とする．$A,B$ を $X$ の開集合，閉集合とするとき，$A\setminus B$ は開集合，$B\setminus A$ は閉集合になることを示せ.

35. $X=\{a,b\}$ の全ての位相を求めよ.

36. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ に対して $\{U(x,r);x\in\mathbb{Q}^n,r\in\mathbb{Q},r>0\}$ は基となることを示せ．ただし $U(x,r)$ は中心 $x$ 半径 $r$ の開球である.

37. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ に対して全ての開区間の集まり $\{(a,b);a,b\in\mathbb{R}\}$ は基になることを示せ.

38. $\mathscr{U}_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$, を位相の族とする．このとき $\cap_\lambda\mathscr{U}_\lambda$ も位相になることを示せ．また $\mathscr{U}$, $\mathscr{V}$ を位相としたとき $\mathscr{U}\cup\mathscr{V}$ が位相にならない例をあげよ.

---
[1] $U\subset S^1$ が相対位相で開集合とは $U=S^1\cap V$, $V$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合，と表せること

39. $X=\{a,b,c,d,e\}$ とするとき $\{\{a\},\{a,b,c\},\{c,d\}\}$ を含む最も弱い位相を求めよ.

40. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とし $A_\lambda \subset X$, $\lambda \in \Lambda$ とする．このとき $(\cap_\lambda A_\lambda)^\circ \subset \cap_\lambda A_\lambda^\circ$ となることを示せ．また等号が成立しない例をあげよ.

41. 40. と同じ状況で $\cup_\lambda \overline{A_\lambda} \subset \overline{\cup_\lambda A_\lambda}$ となることを示せ．また等号が成立しない例をあげよ.

42. $\mathscr{U}=\{\mathbb{R}\setminus$ 有限個の点 $\}\cup\emptyset$ は $\mathbb{R}$ に位相を定めることを示せ.

43. $\mathbb{R}^2$ の部分集合 $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; xy\neq 0\}$ は開集合であり, かつ閉集合ではないことを示せ.

44. 半開区間の族 $S=\{[a,b); a<b\}$ が生成する $\mathbb{R}$ 上の位相を $\mathscr{U}$ とおく．この位相がユークリッドの位相より真に強いことを示せ.

## 数学概論 III 演習 3

45. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とする. $Y \subset X$ に対して $\mathscr{U}_Y = \{A \cap Y; A \in \mathscr{U}\}$ とする. $(Y, \mathscr{U}_Y)$ が位相空間になることを示せ.

46. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間, $x \in X$ とする. $V(x) = \{A \in \mathscr{U}; x \in A\}$ は $x$ の基本近傍系になることを示せ. また $\mathscr{B}$ を基とするとき, $B(x) = \{A \in \mathscr{B}; x \in A\}$ は $x$ の基本近傍系になることを示せ.

47. 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ が第 2 可算公理を満たせば第 1 可算公理を満たすことを示せ.

48. 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ が第 2 可算公理を満たせば可分であることを示せ.

49. 第 2 可算公理を満たさないが第 1 可算公理を満たす位相空間の例をあげよ[1].

50. $(X, d)$ を可分な距離空間とする. このとき $(X, d)$ は第二可算公理を満たすことを示せ.

51. $X$ を集合とする. $x \in X$ ごとに $X$ の部分集合族 $V(x)(\neq \emptyset)$ が存在して次を満たすと仮定する.

    (a) $A \in V(x)$ ならば $x \in A$.

    (b) $A, B \in V(x)$ ならば $W \in V(x)$ で $A \cap B \supset W$ となるものが存在する.

    (c) $A \in V(x)$ ならば $W \in V(x)$ で $\forall y \in W$ に対して $A_y \subset A$, $A_y \in V(y)$ となるものが存在する.

    このとき $N(x) = \{A \subset X; \exists B \in V(x), B \subset A\}$ を $x \in X$ の近傍系とする $X$ の位相 $\mathscr{U}$ が存在することを示せ.

[1]難しめの位相空間論の教科書に出ている.

52. $\mathbb{R}$ をユークリッド空間とみなして, $[a, b)$ の閉包が $[a, b]$ になることを示せ.

53. $a_n$, $n = 1, 2, 3, ..,$ を収束する実数列とする．このとき $\mathbb{R}$ の部分集合としての $A = \{a_n; n = 1, 2, ..\}$ の閉包を求めよ.

54. $\mathbb{R}$ の部分集合族 $\mathscr{U} = \{(-\infty, t); t \in \mathbb{R}\}$ から生成される位相が $\mathscr{U} \cup \{\emptyset, \mathbb{R}\}$ であることを示せ.

55. $\mathbb{R}$ の部分集合族 $\{(-\infty, t); t \in \mathbb{R}\} \cup \{(t, \infty); t \in \mathbb{R}\}$ から生成される位相はユークリッド空間の位相と等しいことを示せ.

56. 集合族 $\{(a_1, b_1) \times \cdots \times (a_n, b_n); a_j, b_j \in \mathbb{Q}, , j = 1, ..., n\}$ はユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の基 (base) であることを示せ.

57. $l_n$ を原点を通る $\mathbb{R}^2$ 内の傾き $n$ の直線とする．$A = \mathbb{R}^2 \setminus (\cup_{n=1}^{\infty} l_n)$ とする．$A^\circ$, $\bar{A}$, $\partial A$ を求めよ.

58. $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A, A_n \subset \mathbb{R}$ とする．次を示せ[2]：

    (a) $\phi(\cup A_n) = \cup \phi(A_n)$

    (b) $\phi(\cap A_n) \subset \cap \phi(A_n)$

    (c) $\phi^{-1}(\cup A_n) = \cup \phi^{-1}(A_n)$

    (d) $\phi^{-1}(\cap A_n) = \cap \phi^{-1}(A_n)$

    (e) $\phi^{-1}(A^c) = \phi^{-1}(A)^c$

59. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) \geq 0\}$ とする．$A^\circ \neq \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) > 0\}$ となる $f$ の例をあげよ.

60. $\theta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ とする．$A = \{e^{2\pi n\theta i} \in \mathbb{C}; n \in \mathbb{N}\}$ とする．$\mathbb{C}$ を $\mathbb{R}^2$ と同一視してユークリッド空間とみなす．$\bar{A} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ を示せ.

[2] $\cap = \cap_{n=1}^{\infty}$, $\cup = \cup_{n=1}^{\infty}$.

61. $X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;0<|x|+|y|<1\}$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ から相対位相を入れて位相空間とみなす．以下の $X$ の部分集合は閉集合, 開集合, 或はそのどちらでもないか答えよ．

(a) $A=\{(x,0)\in X;0<x<1\}$

(b) $B=\{(x,y)\in X;0<x^2+y^2\leq 1/2\}$

62. $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;0\leq x\}$ と $B=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;0\leq x,x^2+y^2<1\}$ を考える．

(a) $B$ は $\mathbb{R}^2$ の開集合でも閉集合でもないことを示せ．

(b) $A$ に相対位相をいれて位相空間とみなすとき $B$ は $A$ の開集合であることを示せ．

63. $(X,d)$ を距離空間とする．$A\subset X$ を閉部分集合とする．このとき $\partial A$ に内点が存在しないことを示せ.

64. $(X,d)$ を距離空間とする．$A\subset X$ とする．$\bar{A}$ に相対位相をいれて位相空間とみなす．このとき次が同値であることを示せ.

(a) $A$ が $\bar{A}$ の開集合である.

(b) $A=U\cap F$ となる $X$ の開集合 $U$ と $X$ の閉集合 $F$ が存在する.

65. $X=\mathbb{C}$ とする．$\mathscr{U}=\{\emptyset,A\subset X;\#A^c<\infty\}$ とすれば $\mathscr{U}$ は $X$ に位相を定めることを示せ．また 任意の空でない $U_1,U_2\in\mathscr{U}$ に対して $U_1\cap U_2\neq\emptyset$ となることを示せ[3].

66. $p$ を素数とする．$n\in\mathbb{Z}$ は $p$ と互いに素な整数 $n'$ と整数 $e\geq 0$ を用いて $n=n'p^e$ と表せる．このとき $v_p(n)=2^{-e}$, $v_p(0)=0$ と定める．$d:\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\to\mathbb{R}$ を $d(n,m)=v_p(n-m)$ と定めると, $d$ は $\mathbb{Z}$ 上の距離関数になることを示せ.

[3]問 42 を解答した人は解かないように.

67. 記号は上と同じとする．$0 < \epsilon < 1$ に対して $m = [-\log_2 \epsilon]$ とおく．ただし $[x]$ は $x$ 以上で最小の整数を表すとする．このとき不等式 $d(0,n) \leq \epsilon$ が成立することは $n$ が $p^m$ で割り切れることと同値であることを示せ．また $\{l \in \mathbb{Z}; d(n,l) < \epsilon\} = \{n + kp^m; k \in \mathbb{Z}\}$ を示せ.

68. $\mathbb{Z}$ の部分集合 $H = \{x_0 + ks; k \in \mathbb{Z}\}$ を考える.

   (a) $\mathbb{Z}$ に離散位相をいれて位相空間とみなすとき $\bar{H} = H$ を示せ.

   (b) $\mathbb{Z}$ に全問の距離 $d$ を導入して距離空間とみなす．$p$ と $s$ が互いに素であるとき $\bar{H} = \mathbb{Z}$ となることを示せ.

69. $X = \mathbb{R}^\infty = \{(x_1, x_2, ...); x_j \in \mathbb{R}, j = 1, 2, ...\}$ とする．$d : X \times X \to \mathbb{R}$ を $d(x,y) = \sup_n(\min\{|x_n - y_n|, 1\})$ で定める．$d$ が距離関数になることを示し，$d_\infty(x,y) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1+|x_n - y_n|}$ と同値でないことを示せ (問 18 参照).

70. 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ の部分集合 $A \subset X$ に相対位相を定めて位相空間とする.

   (a) $A$ が開集合であるとき, $A$ の開集合 $O$ は $X$ の開集合である.

   (b) $A$ が閉集合であるとき, $A$ の閉集合 $F$ は $X$ の閉集合である.

**数学概論 III 演習 4**

71. $(X, \mathscr{U})$, $(Y, \mathscr{V})$ を位相空間とする．次の (1), (2) が同値であることを示せ．(1) $f : X \to Y$ が連続である．(2) $f$ が任意の点 $x \in X$ で連続である．

72. 位相同型 $\cong$ は同値関係であることを示せ．

73. $f : \mathbb{R} \to S^1$ を $x \mapsto (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ で定める．$f(\sqrt{2}\mathbb{Z})$ が $S^1$ で稠密であることを示せ．

74. $X$ を集合とする．$(X, \mathscr{U}_\infty)$ は離散位相空間, $(X, \mathscr{U}_0)$ を密着位相空間とする．$id : (X, \mathscr{U}_\infty) \to (X, \mathscr{U}_0)$ を $idx = x$ と定める．$\#X \geq 2$ のとき $id$ は同相写像にならないことを示せ．

75. $S^1 \setminus \{(0, 1)\} \cong \mathbb{R}$ 示せ[1].

76. $(0, 1)$ を ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の位相空間としての部分空間とする．$\mathbb{R} \cong (0, 1)$ 示せ．

77. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $M = \left\{(-1)^n(1 - \frac{1}{n}); n = 1, 2, 3, ..\right\}$ の集積点を全て求めよ．

78. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}; n, m = 1, 2, 3, ..\}$ の集積点を全て求めよ．

79. $D = \left\{\dfrac{m}{2^n}; n \in \mathbb{N}, m \in \{1, 2, \cdots, 2^n - 1\}\right\}$ は $\mathbb{R}$ の閉区間 $[0, 1]$ で稠密になることを示せ．

80. $A_n = \left\{(x, \dfrac{1}{nx}) \in \mathbb{R}^2; x > 0\right\}$ とする．$A = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n}$ を求めよ．

81. 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ とその部分集合 $A$ と $B$ を考える．$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ が成立することを示せ．

[1] 講義ではアイデアだけ述べた．証明を完成させること．

82. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間, $Y \subset X$ を $X$ の位相空間としての部分空間とする．$A \subset Y$, $B \subset X$ に対して次を示せ:

(a) $\mathrm{Int}_Y A = \mathrm{Int}_X(A \cup (X \setminus Y)) \cap Y$ を示せ[2].

(b) $\partial_Y A \subset (\partial_X A) \cap Y$ [3].

(c) $\mathrm{Int}_X B \cap Y \subset \mathrm{Int}_Y(B \cap Y)$

83. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間, $Y \subset X$ を $X$ の位相空間としての部分空間とする．$A \subset Y$ に対して $A$ が $Y$ の閉集合であるための必要十分条件が $Y \cap (\bar{A} \setminus A) = \emptyset$ であることを示せ.

84. (a) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 $(0,1]^n$ は開集合でも閉集合でもないことを示せ.

(b) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の位相空間としての部分空間 $M = [0,1]^n$ を考える．このとき $M$ の部分集合 $(0,1]^n$ は $M$ の開集合になることを示せ.

85. $U \subset \mathbb{R}$ の元の個数は高々可算とする．このとき $U$ は空でない開集合を含まないことを示せ.

86. $\mathbb{Q}$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の位相空間としての部分空間とする．$p < q$ を無理数とする．$\{x \in \mathbb{Q}; p \leq x \leq q\}$ は $\mathbb{Q}$ の開集合かつ閉集合であることを示せ.

---

[2] $\mathrm{Int}_Y$ は位相空間 $Y$ の内点全体を表す.

[3] 位相空間 $Y$ の補集合 $Y^c$ の内点を $Y$ の外点という．$Y$ の内転でも外点でもない点を $Y$ の境界点という．$\partial_Y$ は位相空間 $Y$ の境界点全体を表す.

87. (a) $U$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合, $f : U \to \mathbb{R}^m$ を写像, $d(x,y)$ をユークリッドの距離とする. $\lim_{x\to a} f(x) = b$ と

$$\inf_{r>0}\left(\sup_{x\in U, 0<d(x,a)<r} d(f(x),b)\right) = 0$$

が同値であることを示せ.

(b) 加法 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x+y$, が連続であることを示せ.

88. $U \subset \mathbb{R}$ を開集合, $a \notin U$ とする. $d$ をユークリッドの距離とし, $f(x) = d(a,x)$ とする. このとき $f : U \to \mathbb{R}$ は最大値も最小値ももたないことを示せ.

89. $U$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合, $V$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^m$ の開集合とする. $f : U \to \mathbb{R}^m$, $g : V \to \mathbb{R}^l$ を連続写像とする. $f(U) \subset V$ ならば, 合成写像 $g \circ f : U \to \mathbb{R}^l$ は連続となることを示せ.

90. 連続写像 $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \to \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ は連続写像 $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ に延長できないことを示せ.

91. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ からユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ への写像

$$f(x,y) = \begin{cases} (x,-y), & y \geq 0 \\ (x,y), & y < 0 \end{cases}$$

に対して, $f(U)$ が開集合にならない開集合 $U \subset \mathbb{R}^2$ の例をあげよ.

92. 関数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto |x|$ に対して $\mathscr{U} = \{f^{-1}(A); A$ は $\mathbb{R}$ の開集合 $\}$ は $\mathbb{R}$ に位相を定めることを示せ. またこの位相はユークリッド空間としての $\mathbb{R}$ の位相と同じかどうか判定せよ.

93. $X = C^\infty[0,1]$ を閉区間 $[0,1]$ 上の無限回微分可能な関数全体とする[4]. $\|f\|_r = \sum_{j=0}^{r} \sup_{0\le t\le 1} |f^{(j)}(t)|$, $U_{r,\epsilon}(f) = \{g \in X; \|f-g\|_r < \epsilon\}$ とする. このとき集合族

$$\mathscr{U}_f = \{U_{r,\epsilon}(f); r = 0,1,2,...,\epsilon > 0\}$$

は次の (1)-(4) を満たすことを示せ. (1) $\mathscr{U} \neq \emptyset$, (2) 任意の $U \in \mathscr{U}_f$ に対して $U \ni f$, (3) $U, V \in \mathscr{U}_f$ ならば，適当な $W \in \mathscr{U}_f$ が存在して $W \subset U \cap V$, (4) $U \in \mathscr{U}_f$ ならば，適当な $W \subset U$, $W \in \mathscr{U}_f$ が存在して, 任意の $g \in W$ に対して $V \in \mathscr{U}_g$ であって $V \subset U$ なるものが存在する。

94. 記号は前問と同じとする. $X = C^\infty[0,1]$ 上に $\mathscr{U}_f$ が $f \in X$ の基本近傍系となるような位相が存在することを示せ.

95. 複素数係数 $n$ 変数多項式 $f(z_1,...,z_n)$ に対して

$$\mathscr{O}_f = \{z \in \mathbb{C}^n; f(z) \neq 0\}$$

とおき, $\mathscr{B} = \{\mathscr{O}_f; f\}$ とする. $\mathscr{O}_f, \mathscr{O}_g \in \mathscr{B}$ ならば $\mathscr{O}_f \cap \mathscr{O}_g \in \mathscr{B}$ を示せ. また $\mathscr{U} = \{\emptyset, \mathbb{C}^n, \cup_f \mathscr{O}_f; \mathscr{O}_f \in \mathscr{B}\}$ は $\mathbb{C}^n$ に位相を定めることを示せ. また $\{\emptyset, \mathbb{C}^n\} \cup \mathscr{B}$ が $\mathscr{U}$ の base になることを示せ.

[4] 端の点 $\{0,1\}$ があるので，正確には開区間 $(-\epsilon, 1+\epsilon)$ への拡張で無限回微分可能なものが存在する空間のこと.

# 数学概論 III 演習 5

96. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の位相空間としての部分空間 $X = [-1, 1]$ 上の関数 $f(x) = x^3$ は一様連続になることを示せ.

97. 距離空間 $(X, d), (Y, \rho), (Z, \sigma)$ の間の一様連続写像 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ の合成写像 $g \circ f$ は一様連続になることを示せ.

98. 距離空間 $(X, d), (Y, \rho)$ 上の一様連続写像 $f : X \to Y$ について考える．$\{x_n\}$ が $X$ のコーシー列ならば $\{f(x_n)\}$ は $Y$ のコーシー列になることを示せ.

99. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の位相空間としての部分空間 $X = (0, \infty)$ 上の関数 $f(x) = 1/x$ は一様連続にならないことを示せ.

100. $(X, d)$ を距離空間，$A \subset X$ とする．$f(x) = d(x, A)$[1] が $X$ で一様連続であることを示せ.

101. $\mathbb{R}$ に次の位相を考える．$A$ が閉集合であるとは，$A$ が有限集合または $\emptyset$ か $\mathbb{R}$ であることと定める．$B = [0, 1]$ とするとき $\overline{B}$，$B^\circ$，$\partial B$ を求めよ.

102. $2 \times 2$ 実行列全体を $M_2(\mathbb{R})$ であらわす．$M_2(\mathbb{R})$ の $4$ つの成分を $4$ 次元ユークリッド空間の成分とみなし位相空間とする．$GL_2(\mathbb{R}) \subset M_2(\mathbb{R})$ を正則な行列全体とする．$\overline{GL_2(\mathbb{R})} = M_2(\mathbb{R})$ を示せ.

103. $(X, \mathscr{U})$ は位相空間，$A \subset X$ は $X$ で稠密とする．さらに $A$ を $X$ の位相空間としての部分空間とみて $B \subset A$ は $A$ で稠密とする．$B$ は $X$ で稠密であるか判定せよ.

[1] $d(x, A) = \inf_{y \in A} d(x, y)$

104. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とする．$f : X \to \mathbb{R}$ が連続であるための必要十分条件が $f^{-1}(-\infty, a) \in \mathscr{U}$ かつ $f^{-1}(a, \infty) \in \mathscr{U}$ が任意の $a \in \mathbb{R}$ で成立することであることを示せ.

105. $(X, \mathscr{U})$ と $(Y, \mathscr{V})$ を位相空間とする．$X = \cup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$, $A_\lambda \in \mathscr{U}$, と表されているとする．$f : X \to Y$ は, 全ての $\lambda \in \Lambda$ に対して 制限 $f\lceil_{A_\lambda} : A_\lambda \to Y$ が連続ならば，$X$ で連続であることを示せ.

106. $X = \{a, b, c, d\}$ は $\mathscr{U} = \{\emptyset, X, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c, d\}\}$ を開集合系にもつ位相空間とする．$f : X \to X$ を $f(a) = b$, $f(b) = d$, $f(c) = b$, $f(d) = c$ とする．このとき $f$ は $c$ で連続でなく，$d$ で連続であることを示せ.

107. $(X, \mathscr{U})$ と $(X, \mathscr{V})$ を位相空間とする. 恒等写像 $i : (X, \mathscr{U}) \to (X, \mathscr{V})$ が連続であるための必要十分条件は $\mathscr{U} \subset \mathscr{V}$ はであることを示せ.

108. $(X, \mathscr{U})$ と $(Y, \mathscr{V})$ を位相空間とする．$X$ は可分とする．$f : X \to Y$ が連続かつ全射ならば $Y$ も可分であることを示せ.

109. $(X, \mathscr{U}), (Y, \mathscr{V})$ を位相空間とする．$f : X \to Y$ が閉写像であるための必要十分条件は $\overline{f(A)} = f(\overline{A})$, $\forall A \subset X$. また写像 $g : X \to Y$ が開写像であるための必要十分条件は $\mathrm{int} f(A) \supset f(\mathrm{int} A)$,$\forall A \subset X$. これらを示せ.

110. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$, は閉写像になるが開写像にならないことを示せ.

111. $(X, \mathscr{U})$, $(Y, \mathscr{V})$ を位相空間とし $A \in \mathscr{U}$ を位相空間としての $X$ の部分空間とする．$f : X \to Y$ が開写像ならば制限 $f\lceil_A : A \to Y$ も開写像になることを示せ.

112. 写像 $f:\mathbb{R}\to S^1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2=1\}$, $x\mapsto(\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ は開写像であるが，閉写像でないことを示せ．ただし $S^1$ を $\mathbb{R}^2$ の位相空間としての部分空間とみなす.

113. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とする．$f,g:X\to\mathbb{R}$ は連続とする．このとき $f+g$, $fg$, $f/g$(ただし, $g(x)\neq 0\ \forall x\in X$ と仮定する) も連続であることを示せ.

114. (a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$f(x)=\begin{cases} x\sin(1/x), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

とする．$f$ が連続であることを示せ.

(b) $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ を

$$g(x)=\begin{cases} \sin(1/x), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

とする．$g$ が連続でないことを示せ.

115. $(X,d)$ は距離空間とする．$X$ の部分集合 $A$ は可算集合であり，更に $\bar{A}=X$ とする．このとき $X$ は第二可算公理をみたすことを示せ.

116. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ を考える．写像 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ が同相写像であるための必要十分条件は，$f$ が全射で，更に狭義単調増加連続関数あるいは狭義単調減少連続関数であることを示せ.

117. $[a,b]\cong[c,d]$, $a<b, c<d$, を示せ[2].

118. $(a,b)\cong(c,d)$, $a<b, c<d$, を示せ.

119. $[0,1]$ から $(0,1)$ への全射な連続写像は存在しないことを示せ.

[2] もちろん $[a,b]$, $(a,b)$ などはユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の位相空間としての部分空間.

120. $(0,1)$ から $[0,1]$ への全射な連続写像が存在することを示せ.

121. $\mathbb{R} \cong (a,b)$, $a<b$, を示せ.

122. $[a,b) \cong (c,d]$, $a<b$, を示せ.

123. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0<x<1\} \cong \mathbb{R}^2$ を示せ。

124. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 1<x^2+y^2<2\} \cong \mathbb{R} \times S^1$ を示せ[3].

125. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; x^2+y^2<1\} \cong \mathbb{R}^2$ を示せ。

126. $(X,\mathscr{U})$ は位相空間，$A \subset X$ とする. 関数 $f: X \to \mathbb{R}$ が $A$ 上連続であるとは，$A$ を $X$ の位相空間としての部分空間として, $f$ の $A$ への制限が連続であることとする.

   (a) $A, B \in \mathscr{U}$ で $X = A \cup B$ となるとき $f$ が $A$ および $B$ 上連続ならば $f$ は $X$ 上で連続であることを示せ.

   (b) (a) において $A$ と $B$ は $X$ の開集合でない場合に $X = A \cup B$ であっても $f$ は $X$ 上で連続でない例をあげよ.

127. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ を $f(t) = (\cos t, \sin t)$ と定める. $f$ の $(0, \pi/2)$ への制限は埋め込みであることを示せ. また $f$ の $[0, 2\pi)$ への制限は埋め込みでないことを示せ.

128. $n$ 次元球面を $S^n(\subset \mathbb{R}^{n+1})$ で表わす. $S^n \setminus \{(0,...,0,1)\} \cong \mathbb{R}^n$ を示せ.

[3]位相空間の積空間は今度の講義で定義します. もちろん各人で調べて解くことは奨励します. 講義を待つ必要はありません.

## 数学概論 III 演習 6

以下の問で, $\mathbb{R}^n$ はユークリッド空間を表し, $S^n = \{x \in \mathbb{R}^n; |x| = 1\}$ は $\mathbb{R}^{n+1}$ の部分空間としての位相空間とする.

129. $X$ は集合, $(Y, \mathscr{V})$ を位相空間, $f : X \to Y$ とする. このとき, $f^{-1}(\mathscr{V}) = \{f^{-1}(A); A \in \mathscr{V}\}$ (ただし $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ とする) は $X$ の位相を定めることを示せ.

130. 問 129 と同じ設定で, $f : (X, f^{-1}(\mathscr{V})) \to (Y, \mathscr{V})$ は連続になることを示せ. また, $f^{-1}(\mathscr{V})$ は $f$ を連続にする $X$ の位相で最弱であることを示せ.

131. $Y$ は集合, $(X, \mathscr{U})$ を位相空間, $f : X \to Y$ とする. このとき, $\mathscr{V} = \{A \subset Y; f^{-1}(A) \in \mathscr{U}\}$ (ただし $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ とする) は $Y$ の位相を定めることを示せ.

132. 問 131 と同じ設定で, $f : (X, \mathscr{U}) \to (Y, \mathscr{V})$ は連続になることを示せ. また, $\mathscr{V}$ は $f$ を連続にする $Y$ の位相で最強であることを示せ.

133. $(X_\lambda, \mathscr{U}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, を位相空間の族とする. 積空間 $(X, \mathscr{U}) = \prod_\lambda (X_\lambda, \mathscr{U}_\lambda)$ を考える. $\{\prod_\lambda A_\lambda; A_\lambda \in \mathscr{U}_\lambda$かつ有限個の$\lambda$を除いて $A_\lambda = X_\lambda\}$ が $\mathscr{U}$ の基になることを示せ.

134. $(\mathbb{R}^2, \mathscr{U}_2) = (\mathbb{R}, \mathscr{U}_1) \times (\mathbb{R}, \mathscr{U}_1)$ を示せ. ここで $\mathscr{U}_n$ は ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の位相を表す.

135. $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{m+n}$ を示せ.

136. 射影 $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を $p(x, y) = x$ で定義する. これは開写像だが閉写像でないことを示せ.

137. 区間 $I = [0,1]$ に同値関係

$$x \sim y \Longleftrightarrow \begin{cases} x = y, x, y \in (0,1) \\ \{x,y\} = \{0,1\}, \{x,y\} = \{1,0\} \end{cases}$$

を定める．$f : I \to S^1$ を $x \mapsto \cos(2\pi x) + i\sin(2\pi x)$ で定め，$\bar{f} : I/\sim \to S^1$ を $\bar{f}([x]) = f(x)$ で定める．このとき (1)-(4) を示せ.

(1) $f$ は連続.

(2) $\bar{f}$ は well-defined.

(3) $\bar{f}$ は bijective.

(4) $\bar{f}$ は連続.

138. 区間 $[0,1]$ に問 137 の同値関係を定める．このとき $S^1 \cong [0,1]/\sim$ を示せ.

139. $z \in \mathbb{R}^n$ とするとき写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x + z$, は同相写像になることを示せ.

140. $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to S^1$, $x \mapsto x/|x|$ は連続な全射になることを示せ.

141. $(X, \mathscr{U})$, $(Y, \mathscr{V})$ を位相空間とする．$A \subset X$, $B \subset Y$ のとき $\mathrm{Int}A \times \mathrm{Int}B = \mathrm{Int}(A \times B)$ を示せ[1]

142. $(X_\lambda, \mathscr{U}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, を位相空間の族とする．$\mathrm{Int}(\prod_\lambda A_\lambda) \subset \prod_\lambda \mathrm{Int}A_\lambda$ を示せ.

143. $(X, \mathscr{U})$, $(Y, \mathscr{V})$ を位相空間とする．$A \subset X$, $B \subset Y$ のとき $\partial(A \times B) = (\partial A \times \bar{B}) \cup (\bar{A} \times \partial B)$ を示せ.

[1] $\mathrm{Int}(A \times B)$ は $A \times B$ を積空間 $(X, \mathscr{U}) \times (Y, \mathscr{V})$ の部分集合と見なしたときの内部を表す．以下の問も同様に解釈する.

144. $(X_\lambda, \mathscr{U}_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, を密着位相空間の族とする．このとき $\prod_\lambda (X_\lambda, \mathscr{U}_\lambda)$ も密着位相空間になることを示せ.

145. $(X_\lambda, \mathscr{U}_\lambda)$ を位相空間の族, $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$ を写像の族, $\lambda \in \Lambda$, とする. $p_\lambda : X = \prod_\lambda X_\lambda \to X_\lambda$, $q_\lambda : Y = \prod_\lambda Y_\lambda \to Y_\lambda$, を射影とする．写像 $f : X \to Y$ を $q_\lambda(f(x)) = f_\lambda(p_\lambda(x))$ が成立するように定義する[2]．このとき, $f$ が連続 $\Longleftrightarrow$ $f_\lambda$, $\forall\lambda \in \Lambda$, が連続, を示せ.

146. 問 145 と同じ記号で, $f : X \to Y$ が同相写像 であるための必要十分条件が $f_\lambda : X_\lambda \to Y_\lambda$, $\forall\lambda \in \Lambda$, が同相写像であることを示せ.

147. $X$ は $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合で, $\mathbb{R}^n$ の部分空間としての位相空間とする. 写像 $f : X \to \mathbb{R}^m$ は連続とする．このとき $f$ は閉写像であることを示せ.

148. 2 次元球面 $S^2$ から $p = (0, 0, 1)$ を除いた集合 $S^2 \setminus \{p\}$ を考える. $f : S^2 \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto \left(\dfrac{x}{1-z}, \dfrac{y}{1-z}\right)$, は同相写像であることを示せ.

149. $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \cong \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 > 1\}$ を示せ.

150. $(X_n, d_n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を距離空間の族とする．任意の $n$ に対して, $d_n(x, y) < 1$, $\forall x, y \in X_n$, を仮定する．直積空間 $X = \prod_n X_n$ に距離 $d$ を次式で定める.

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} d_n(x_n, y_n).$$

この距離 $d$ で定まる位相は $X$ の直積位相と同じであることを示せ.

151. 複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合 $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C} | \mathrm{Im} z > 0\}$ を上半平面と呼ぶ. $f(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ とする．$f$ による上半平面の像 $f(\mathbb{C}_+)$ を求め，$f$ は $\mathbb{C}_+$ から $f(\mathbb{C}_+)$ への同相写像であることを示せ.

[2]積写像という.

152. $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Z}$ とする．$S^1 \cong \mathbb{R}/\!\sim$ を示せ[3].

153. $x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}$ とする．$\mathbb{R}/\!\sim$ は密着位相空間になることを示せ.

154. $\mathbb{R}$ の部分空間としての位相空間 $X = [0,1]$ と $Y = [0,1) \cup \{1.00001\}$ が位相同型になるかどうか判定せよ.

155. $X = S^1 \times S^1$ とする．写像 $t : X \to X$ を

$$t((x,y),(u,v)) = ((x,-y),(-u,-v))$$

と定める．$X \ni P, Q$ に対して $P \sim Q \iff P = Q$ または $P = t(Q)$ と定める．このとき (a),(b),(c) を示せ.

(a) $t \circ t = 1_X$ を示せ.

(b) $\sim$ は同値関係であることを示せ.

(c) $P$ の同値類を $\pi[P]$ で表わす．$\pi[P]$ は 2 元からなる集合であることを示せ[4].

156. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とし，$f : X \to X$ を連続な写像とする．ある自然数 $n$ で $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n}$ が $X$ から $X$ への同相写像になるとき $f$ も同相写像になることを示せ.

[3]この場合 $\mathbb{R}/\sim$ に代わって $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ という記号が用いられ，一次元トーラスとよばれる.
[4]位相空間 $X/\sim$ はクラインの壺といわれている.

## 数学概論 III 演習 7

157. $(X,d)$ を距離空間, $F \subset X$ を閉集合とする．写像 $D : X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x,F)$ に対して $|D(x)-D(y)| \leq d(x,y)$ を示せ．また $D$ が連続であることを示せ.

158. $(X,d)$ を距離空間, $F \subset X$ を閉集合とする．$d(x,F)=0 \Longleftrightarrow x \in F$ を示せ.

159. $(X,\mathscr{U})$, $(Y,\mathscr{V})$ を位相空間とする．$\sim_X$, $\sim_Y$ を各々$X$,$Y$ 上の同値関係, $\pi_X : X \to X/\sim_X$, $\pi_Y : Y \to Y/\sim_Y$ を自然な射影とする．積写像 $\pi_X \times \pi_Y : X \times Y \to X/\sim_X \times Y/\sim_Y$ が定める $X \times Y$ 上の同値関係を $\sim$ とおく．つまり $(x,y) \sim (x',y') \Longleftrightarrow \pi_X \times \pi_Y(x,y) = \pi_X \times \pi_Y(x',y')$．このとき

$$Q : X \times Y/\sim \to X/\sim_X \times Y/\sim_Y$$

を $Q([x,y]) = \pi_X \times \pi_Y(x,y)$, $[x,y] \in X \times Y/\sim$, と定める.

(a) $Q$ が well defined であることを示せ.

(b) $Q$ が連続な bijective であることを示せ[1].

160. (a) $\mathbb{R}$ の部分空間としての位相空間 $X=[0,1]$ と $A=(0,1)$ について考える．$A$ を一点につぶしてえられる空間 $X/A$ は 3 点からなる集合であることを示せ.

(b) $X/A$ の開集合を全て書き下せ.

[1]一般には同相写像ではない

161. $X=\{z\in\mathbb{C}|1\le|z|\}$, $A=\{z\in\mathbb{C}||z|=1\}$とする.

(a) $f(z)=(|z|-1)z$とおく. $f:X\setminus A\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$はbijectiveであることを示せ.

(b) $A$を一点につぶしてえられる空間$X/A$は複素平面$\mathbb{C}$と位相同型であることを$f$を使って示せ.

162. 平面$\mathbb{R}^2$に同値関係$(x,y)\sim(x',y')$を$(x,y)=(x',-y')$または$(x,y)=(x',y')$で定める. $\mathbb{R}^2/\!\sim\,\cong\{(x,y)\in\mathbb{R}^2)|0\le y\}$を示せ.

163. 平面$\mathbb{R}^2$に同値関係$(x,y)\sim(x',y')$を$(x,y)=(y',x')$または$(x,y)=(x',y')$で定める. $\mathbb{R}^2/\!\sim\,\cong\{(x,y)\in\mathbb{R}^2)|x\le y\}$を示せ.

164. $\mathbb{R}$に同値関係$x\sim y$を$x-y\in\mathbb{Q}$で定める.

(a) $\mathbb{R}$から商空間$\mathbb{R}/\!\sim$への自然な射影を$\pi$とおく. $\mathbb{R}/\!\sim$の空でない開集合$U$に対して$W=\pi^{-1}(U)$とおく. $x\in W$なら任意の$q\in\mathbb{Q}$に対して$x+q\in W$を示せ.

(b) $W=\mathbb{R}$を示せ.

165. $(X,\mathscr{U})$を位相空間とする. $X$が$T_1$空間であるための必要十分条件が任意の$x\in X$に対して$\{x\}=\cap\{U;U$は$x$の開近傍$\}$であることを示せ.

166. $T_1$空間$(X,\mathscr{U}),(Y,\mathscr{V})$の直積空間は$(X,\mathscr{U})\times(Y,\mathscr{V})$は$T_1$空間になることを示せ.

167. $\mathbb{R}$の部分集合$A=(0,1)$を一点につぶしてできる商空間$\mathbb{R}/A$の自然な射影を$\pi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}/A$とするとき, $\pi(A)$が閉集合でないことを示せ[2].

[2] $\mathbb{R}/A$は$T_1$空間ではない.

168. 距離空間 $(X, d)$ はハウスドルフ空間であることを示せ.

169. 次の包含関係を示せ:

$$\text{正規空間} \subset \text{正則空間} \subset \text{ハウスドルフ空間}\,(T_2) \subset T_1 \subset T_0$$

170. $(X, \mathscr{U})$ をハウスドルフ空間とするとき, 部分空間としての位相空間 $A \subset X$ もハウスドルフ空間になることを示せ.

171. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とする. $X$ がハウスドルフ空間であるための必要十分条件が任意の $x \in X$ に対して $\{x\} = \cap\{\bar{U}; U$ は $x$ の開近傍 $\}$ であることを示せ.

172. ハウスドルフ空間 $(X, \mathscr{U}), (Y, \mathscr{V})$ の直積空間 $(X, \mathscr{U}) \times (Y, \mathscr{V})$ はハウスドルフ空間になることを示せ.

173. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間, $(Y, \mathscr{V})$ をハウスドルフ空間とし, $f : X \to Y$ を連続な写像とする. このとき $D = \{(x, f(x)) \in X \times Y; x \in X\}$ は $X \times Y$ の閉集合になることを示せ.

174. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間, $(Y, \mathscr{V})$ をハウスドルフ空間とし, $f, g : X \to Y$ を連続な写像とする. $A = \{x \in X | f(x) = g(x)\}$ が閉集合であることを示せ.

175. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間, $(Y, \mathscr{V})$ をハウスドルフ空間とし, $f : X \to Y$ を連続な写像とする. $X$ 上の同値関係 $\sim$ を $x \sim y \iff f(x) = f(y)$ と定義するとき $X/\sim$ はハウスドルフ空間になることを示せ.

176. $(X, \mathscr{U})$, $(Y, \mathscr{V})$ を位相空間, $f : X \to Y$ を連続な単射とする. $X \times X$ の対角成分を $\Delta_X$, $Y \times Y$ の対角成分を $\Delta_Y$ とする.

(a) $f \times f : X \times X \to Y \times Y$, $(x, y) \mapsto (f(x), f(y))$ とすれば, $\Delta_X$ が $f \times f$ による $\Delta_Y$ の逆像であることを示せ.

(b) $Y$ がハウスドルフ空間ならば $X$ もハウスドルフ空間になることを示せ.

177. 自然数 $\mathbb{N}$ について, 空集合および有限集合の補集合の全体を $\mathscr{U}$ とおく.

(a) $\mathscr{U}$ が位相であることを示せ.

(b) $(\mathbb{N}, \mathscr{U})$ は $T_1$ であるが $T_2$ でないことを示せ.

**数学概論 III 演習 8**

178. $(X,\mathscr{U})$ が $T_1$ 空間であるための必要十分条件は任意の $x\in X$ に対して $\{x\}$ が閉集合になることである. これを示せ.

179. $(X,\mathscr{U})$ が $T_3$ 空間であるための必要十分条件は任意の $x\in X$ と $x\in A$ となる $A\in\mathscr{U}$ に対して $B\in\mathscr{U}$ で $x\in B\subset\bar{B}\subset A$ となるものが存在することである. これを示せ.

180. $(X,\mathscr{U})$ が $T_4$ 空間であるための必要十分条件は任意の $F\subset X$ と $F\subset A$ となる $A\in\mathscr{U}$ に対して $B\in\mathscr{U}$ で $F\subset B\subset\bar{B}\subset A$ となるものが存在することである. これを示せ.

181. 距離空間は正規空間になることを示せ.

182. $(X,\mathscr{U})$ を正規空間とする. $F,G\subset X$ は閉集合で $F\cap G=\emptyset$ とする. このとき $f:X\to Y$ で (1) 連続, (2) $0\le f(x)\le 1$, (3) $x\in F\to f(x)=0$, (4) $x\in G\to f(x)=1$ を満たすものが存在することを示せ[1].

183. $(X,\mathscr{U})$ は位相空間とし、直積空間 $X\times X$ を考える. $W\subset X\times X$ に対して $W^*=\{(x,y)\in X\times X;(y,x)\in W\}$ とおく. $W$ が開集合であることと $W^*$ が開集合であることが同値であることを示せ.

184. $(X,\mathscr{U})$ と $(Y,\mathscr{V})$ を位相空間とする. $f:X\to Y$ は連続写像, 全射で, 開かつ閉写像とする. $X$ が正則空間のとき $Y$ が Hausdorff 空間になることを示せ.

185. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間, $(Y,\mathscr{V})$ を Hausdorff 空間とする. $f,g:X\to Y$ を連続写像とする. $X$ で稠密な部分集合 $D$ が存在して[2] $f=g$ が $D$ 上で成立しているとき $f=g$ が $X$ 上でも成立することを示せ.

[1] Urysohn の補題
[2] $\bar{D}=X$ となること.

186. $(X, \mathscr{U})$ を $T_3$ 空間とする．このとき $x, y \in X$ に対して $y \in \overline{\{x\}} \iff x \in \overline{\{y\}}$ が成り立つことを示せ.

187. $(X, \mathscr{U})$ を $T_3$ 空間とする．このとき $x, y \in X$ に対して $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ または $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}} = \emptyset$ が成り立つことを示せ.

188. 正則空間 $(X_\lambda, \mathscr{U}_\lambda)$ の直積空間 $(\prod_\lambda X_\lambda, \prod_\lambda \mathscr{U}_\lambda)$ は正則空間になることを示せ.

189. $(X, \mathscr{U})$ を正則空間, $A \subset X$ を閉集合とする．$A$ を一点につぶしてえられる空間 $X/A$ と自然な射影 $\pi : X \to X/A$ について考える.

    (a) $\pi$ が閉写像であることを示せ.

    (b) $X/A$ が Hausdorff 空間になることを示せ.

190. 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ は $T_1$ 空間で $X$ は有限集合とする．このとき $\mathscr{U}$ は離散位相になることを示せ.

191. $(X, \mathscr{U})$ を正規空間, $(Y, \mathscr{V})$ を位相空間とする．$f : X \to Y$ は連続で全射かつ閉写像とする．このとき $Y$ は正規空間になることを示せ.

192. $(X, d)$ を距離空間とする．このとき $X$ は正規空間になることを示せ.

193. 実数 $\mathbb{R}$ に部分集合族 $U(x) = \{[x, a); x < a\}$ が $x \in \mathbb{R}$ の近傍系になるような位相 $\mathscr{S}$ を入れる.

    (a) $(\mathbb{R}, \mathscr{S})$ は $T_1$ 空間になることを示せ.

    (b) $(\mathbb{R}, \mathscr{S})$ は $T_4$ 空間になることを示せ[3].

194. 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ の任意の開集合が $T_4$ 空間ならば任意の部分空間も $T_4$ 空間になることを示せ.

[3] $(\mathbb{R}, \mathscr{S})$ を Sorgenfrey 直線という．つまり Sorgenfrey 直線は正規空間である.

195. $n \times n$ 実正方行列全体 $M_n(\mathbb{R})$ 上にノルム $\|A\| = \{|a_{ij}|\}$ を定めて距離空間とみなす. $n \times n$ 実正則行列全体 $GL(n, \mathbb{R})$ を $M_n(\mathbb{R})$ の部分空間とみなす.

(a) 写像 $D : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ を $(g) = detg$ で定めれば連続になることを示せ.

(b) $GL_+(n, \mathbb{R}) = \{g \in GL(n, \mathbb{R}); detg > 0\}$ とすれば $GL_+(n, \mathbb{R})$ は $GL(n, \mathbb{R})$ の開かつ閉集合になることを示せ.

(c) 写像 $f : GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ を $f(g) = g^{-1}$ で定める. このとき $f$ が連続になることを示せ.

(d) 写像 $M : GL(n, \mathbb{R}) \times GL(n, \mathbb{R}) \to GL(n, \mathbb{R})$ を $M(g_1, g_2) = g_1 g_2$ で定める. このとき $M$ が連続になることを示せ.

**数学概論 III 演習 9**

196. 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ が距離空間 $(Y, d)$ と位相同型ならば, $(X, \mathscr{U})$ は距離付け可能であることを示せ.

197. 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ は距離付け可能であるとする. $f : (X, \mathscr{U}) \to (Y, \mathscr{V})$ を同相写像とする. このとき $(Y, \mathscr{V})$ も距離付け可能であることを示せ[1].

198. 可分な距離空間 $(X, d)$ は $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ に埋め込まれることを示せ. ただし $[0, 1]$ は $\mathbb{R}$ の位相空間としての部分空間である.

199. $(X, d)$ を距離空間とする. このとき第 2 可算公理を満たすことと可分であることが同値であることを示せ.

200. 第 2 可算公理をみたす正則空間は正規空間になることを示せ.

201. $(X, d)$ を距離空間とする. $\tilde{d}(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$ とする. このとき $\tilde{d}$ も距離関数になり, さらに $\tilde{d}$ は $d$ と同値な距離関数になることを示せ.

202. $(X_k, d_k)$, $k = 1, ..., n$, を距離空間とする. 直積空間 $X = \prod_k^n X$ 上に $d : X \times X \to \mathbb{R}$ を $d(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} d_k(x_k, y_k)^2}$ で定めれば, $d$ も $X$ 上の距離関数になり, さらにそれが定める位相が直積位相と同じになることを示せ.

203. 2 つの距離空間 $(X, d), (X, d')$ に対して $d(x, y) \leq d'(x, y)$, $x, y \in X$, が成立しているとき $d$ から導入される位相 $\mathscr{U}$ は $d'$ から導入される位相 $\mathscr{U}'$ よりも弱いことを示せ.

[1] 同相写像で不変な性質を位相的性質という. 距離付け可能性は位相的性質である.

204. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分集合族 $A_n = \{1/n\} \times \mathbb{R}$, $n = 1, 2, 3, ...$, をそれぞれ一点につぶして得られる商空間 $X$ [2] は $T_1$ 空間であるが Hausdorff 空間でないことを示せ.

205. 実数全体 $\mathbb{R}$ を考える. $A \subset \mathbb{R}$ が閉集合であるとは, $\#A < \infty$ または $A = \emptyset$ または $A = \mathbb{R}$ として $\mathbb{R}$ の位相を定める. この位相で $\mathbb{R}$ は Hausdorff 空間かどうか判定せよ.

206. 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ の点列 $\{x_n\}_n$ が $x$ に収束するとは, 「$x$ の任意の開近傍 $U$ に対してある自然数 $N$ があり $N \leq n$ ならば $x_n \in U$ となる」と定義する. このとき $\lim_{n} x_n = x$ と書く. $X$ が Hausdorff 空間のとき $\lim_{n} x_n = x$ かつ $\lim_n x_n = y$ ならば $x = y$ となることを示せ.

207. 実数全体 $\mathbb{R}$ の開集合系を $\mathscr{U} = \{(a, \infty)\ (a \in \mathbb{R}), \mathbb{R}, \emptyset\}$ で定める. $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ とするとき, この位相で極限 $\lim_{n \to \infty} x_n = y$ をみたす $y$ を全て求めよ.

208. 有理数全体を $\mathbb{Q}$ とする. $\mathbb{Q}$ に

$$
\begin{aligned}
\mathscr{U}(x) &= \left\{(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}; n = 1, 2, 3, ...\right\}, x \neq 0, \\
\mathscr{U}(0) &= \left\{((-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) \cap \mathbb{Q}) \setminus \{\frac{1}{m}; m = 1, 2, 3, ...\}; n = 1, 2, 3, ...\right\}
\end{aligned}
$$

が近傍系になるような位相 $\mathscr{U}$ を導入する. このとき $(\mathbb{Q}, \mathscr{U})$ は Hausdorff 空間であるが距離付け可能でないことを示せ.

209. 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ が可分なとき, 任意の $A \in \mathscr{U}$ $(A \neq \emptyset)$ に相対位相を導入してできた位相空間[3] $(A, \mathscr{U}_A)$ も可分になることを示せ.

210. 可分な距離空間 $(X, d)$ の任意の部分集合 $A$ は可分になることを示せ.

[2] $\mathbb{R}^2$ の同値関係を $x \sim y \iff x = y$ または $\exists\, n\ st\ x, y \in A_n$ とする. このとき $X = \mathbb{R}^2/\sim$ のこと.

[3] $\mathscr{U}_A = \{A \cap B; B \in \mathscr{U}\}$

211. 可算個の可分な位相空間 $(X_n, \mathscr{U}_n)$, $n = 1, 2, 3, ...,$ の直積空間 $X = \prod_n X_n$ も可分になることを示せ.

212. 正規空間 $(X, \mathscr{U})$ の閉集合 $F$ 上の連続関数 $F \to [0, 1]^n$ は $X$ 全体に拡張出来ることを示せ[4].

213. 正規空間 $(X, \mathscr{U})$ の閉集合 $F$ 上の連続関数[5] $f : F \to S^n$ は $F$ を含むある開集合まで拡張出来ることを示せ.

[4] Tietze の拡張定理という.

[5] $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ は $n$ 次元球面をあらわす.

## 数学概論 III 演習 11

214. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ が連結であることを示せ.

215. $(X, \mathscr{U})$, $(Y, \mathscr{V})$ を位相空間, $f : X \to Y$ を連続な写像とする. $X$ が連結なとき $(F(X), \mathscr{V}_{F(X)})$[1]も連結になることを示せ.

216. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $(a, b)$ が連結であることを示せ.

217. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とし, $A \subset X$ は連結な部分集合とする. このとき $A \subset B \subset \bar{A}$ となる $B$ も連結になることを示せ.

218. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分集合 $[a, b]$ が連結であることを示せ.

219. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の連結集合 $A$ は $[a, b], [a, b), (a, b], (a, b)$ のいずれかの形になることを示せ.

220. $\mathbb{R}$ の連結集合は弧状連結かつ局所連結[2] であることを示せ.

221. $n$ 次元球面 $S^n (\subset \mathbb{R}^{n+1})$ が連結であることを示せ.

222. $\mathbb{R}^2$ から原点を除いた空間は連結であることを示せ.

223. $(X, \mathscr{U})$ は連結な位相空間とする. $X = F \cup G$, $F \cap G = \emptyset$, $F, G$ は閉集合となるとき $F$ または $G$ が空集合になることを示せ.

224. $X = \{a, b, c, d\}$ に位相を $\mathscr{U} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, X\}$ で定める. $(X, \mathscr{U})$ は連結になることを示せ.

225. $X = \{a, b, c\}$ に位相を $\mathscr{U} = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{c\}, X\}$ で定める. $X$ の連結成分を求めよ.

---

[1] $\mathscr{V}_{F(X)}$ は $\mathscr{V}$ から導かれた $F(X)$ の相対位相を表す.

[2] 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ は各点 $x \in X$ の開近傍 $U$ に対して $x$ の連結な開近傍 $V$ で $V \subset u$ なるものが存在するとき局所連結という.

226. 弧状連結なら連結であることを示せ.

227. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^2$ が同相でないことを示せ.

228. $[0,1]$ と $[0,1]\times[0,1]$ が同相でないことを示せ.

229. $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ は連結でも弧状連結でもないことを示せ.

230. $\mathbb{R}^n\setminus\mathbb{Q}^n(n\geq 2)$ は弧状連結となることを示せ.

231. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とする. $x\sim y$ とは, ある連結部分集合 $A\subset X$ が存在して $x,y\in A$ であることとする. $\sim$ が同値関係となることを示せ.

232. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とする. $x\sim y$ とは, $x$ と $y$ が連続な道で結べることとする[3]. $\sim$ が同値関係となることを示せ.

233. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とし, また $\{a\}$ を一点からなる位相空間とする. $\{a\}\times X\cong X$ を示せ.

234. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とする. 2つの閉集合 $A,B\subset X$ に対して $A\cup B$ と $A\cap B$ がともに連結であるとき $A,B$ はともに連結集合になることを示せ.

235. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とする. 2つの連結集合 $A,B\subset X$ が $A\cap B\neq\emptyset$ をみたすとき $A\cup B$ は連結になることを示せ.

236. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とする. 連結集合の族 $A_\lambda$, $\lambda\in\Lambda$, が $\cap_\lambda A_\lambda\neq\emptyset$ をみたすとき $\cup_\lambda A_\lambda$ は連結になることを示せ.

237. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とする. 2つの連結集合 $A,B\subset X$ が $\bar{A}\cap B\neq\emptyset$ をみたすとき $A\cup B$ は連結になることを示せ.

[3]連続写像 $\omega:[0,1]\to X$ で $\omega(0)=x$, $\omega(1)=y$ となるものが存在すること.

238. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とする．連結集合の族 $A_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, で，任意の 2 つの元 $\lambda, \mu \in \Lambda$ に対して，$\Lambda$ の元の列 $\lambda = \nu_0, \nu_1, \cdots, \nu_n = \mu$ で $A_{\nu_k} \cap A_{\nu_{k+1}} \neq \emptyset$, $k = 0, ..., n-1$, となるものが存在するとき $\cup_\lambda A_\lambda$ は連結になることを示せ.

239. 2 点以上よりなる離散空間[4]は連結でないことを示せ.

240. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とし，$(\emptyset \neq)A \subset X$ は閉かつ開な連結集合とする．このとき $A$ は連結成分になることを示せ.

241. $X = \left\{(x, \sin\frac{1}{x}); x > 0\right\} \cup \{(0, y); -1 \leq y \leq 1\}$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の位相空間としての部分空間とする．$A = \left\{(x, \sin\frac{1}{x}); x > 0\right\}$, $B = \{(0, y); -1 \leq y \leq 1\}$ とおく.

   (a) $X = \bar{A}$ を示せ．また $X$ が連結であることを示せ.

   (b) $X$ が局所連結でないことを示せ .

   (c) $X$ が弧状連結でないことを示せ.

242. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の位相空間としての部分空間

$$X = \{(0, y); 0 < y \leq 1\} \cup \{(x, 0); 0 < x \leq 1\} \cup \{(\frac{1}{n}, y); 0 \leq y \leq 1, n \in \mathbb{N}\}$$

が連結であるが弧状連結でないことを示せ.

243. $2 \times 2$ 実正則行列全体 $GL(2, \mathbb{R})$ 上に $\|A\| = \max\{|a_{ij}|\}$ を定める．これがノルムになることを示せ．このノルムで $GL(2, \mathbb{R})$ を距離空間とみなす. 行列 $A$ と $B$ と $C$ は $GL(2, \mathbb{R})$ の同じ弧状連結成分に含まれることを示せ.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

[4]離散位相をいれた位相空間のこと

244. 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ の部分集合 $A$ と $B$ は弧状連結で $A \cap B \neq \emptyset$ とする．このとき $A \cup B$ も弧状連結であることを示せ.

245. 位相空間 $(X_1, \mathscr{U}_1)$ と $(X_2, \mathscr{U}_2)$ は弧状連結であるとき $X_1 \times X_2$ も弧状連結であるとを示せ.

246. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とする．$f$ は $[0,1] \times [0,1] \to X$ の連続な全射であるとする．$X$ が連結であることを示せ.

247. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とする．$C \subset B \subset A \subset X$ とする．$C$ が $A$ の連結成分ならば $C$ は $B$ の連結成分になることを示せ.

**数学概論 III 演習 11**

248. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とし, $X$ 上の同値関係 $\sim$ を

$$x\sim y \Longleftrightarrow \exists \text{連結部分集合 } A \ st\ A\ni x,y$$

とする. $X/\sim\ni\pi(x)$ を $x$ を含む同値類とする. このとき, $\pi(x)$ は $x$ を含む最大の連結部分集合で, さらに閉集合であることを示せ.

249. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とし, $f:X\to\mathbb{R}$ を連続写像とする. $x,y\in X$ に対して $f(x)=a<b=f(y)$ のとき $a<\forall c<b$ に対して $f(z)=c$ となる $c\in X$ が存在することを示せ[1].

250. $(X,\mathscr{U})$ と $(Y,\mathscr{V})$ は連結な位相空間とする. このとき $(X\times Y,\mathscr{U}\times\mathscr{V})$ も連結であることを示せ.

251. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とする. $A\subset X$, $N(x)$ を $x$ の近傍系とする. このとき $x$ が $A$ の触点 $\Longleftrightarrow U\cap A\neq\emptyset\ \forall U\in N(x)$ を示せ.

252. $(X_\lambda,\mathscr{U}_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$, を連結位相空間の族とする. このとき $\prod_\lambda(X_\lambda,\mathscr{U}_\lambda)$ も連結になることを示せ.

253. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とし, $A\subset Y\subset X$ とするとき, 次が成り立つことを示せ. $A$ は $X$ の連結集合である $\Longleftrightarrow$ $A$ は $Y$ の連結集合である.

254. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とし, $A\subset X$ を連結集合とする. $A\subset B=U\cup V$ $(U,V\in\mathscr{U},\ U\cap V=\emptyset)$ となるとき $A\subset U$ または $A\subset V$ となることを示せ.

255. $(X,\mathscr{U})$ を位相空間とし, $X\ni\forall x$ の連結成分が $\{x\}$ とする. このような位相空間を完全不連結空間という. 完全不連結空間の部分空間は完全不連結になることを示せ.

[1]中間値の定理

256. $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ の完全不連結な部分空間であることを示せ.

257. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とする. $H(X) = \{f : X \to \{0,1\};$ 連続写像 $\}$(ただし, $\{0,1\}$ には離散位相を入れて位相空間とみなす) の任意の元 $f, g$ に対して $(f+g)(x) = f(x) + g(x) (\mathrm{mod}\ 2)$ と定める. $f + g \in H(X)$ を示せ. また $X$ が連結 $\Longleftrightarrow |H(X)| = 2$ を示せ.

258. $(X_\lambda, \mathscr{U}_\lambda), \lambda \in \Lambda,$ を弧状連結空間の族とする. 直積空間 $\prod_\lambda (X_\lambda, \mathscr{U}_\lambda)$ も弧状連結になることを示せ.

259. $X = \{a, b, c\}$ の部分集合族 $\mathscr{U} = \{\emptyset, \{c\}, \{a, c\}, \{b, c\}, X\}$ を位相とする位相空間 $(X, \mathscr{U})$ は弧状連結になることを示せ.

260. $\mathbb{R}^n \ni a, b$ を固定する. $X(a, b) = \{tb + (1-t)a; t \in [0,1]\} \subset \mathbb{R}^n$ は弧状連結であることを示せ. また $a \neq b$ のとき $X(a, b) \cong [0, 1]$ となることを示せ.

261. $\mathbb{R}^n$ の凸集合が弧状連結であることを示せ.

262. $\mathbb{R}^n$ の連結開集合は弧状連結であることを示せ.

263. $[a, b] \subset \mathbb{R}$ とする. 任意の連続写像 $f : [a, b] \to [a, b]$ は不動点を持つことを示せ.

264. コンパクト空間の閉集合はコンパクトであることを示せ.

265. $(X, \mathscr{U})$ を Hausdorff 空間とし $A \subset X$ をコンパクト集合とする. このとき $A$ は閉集合になることを示せ.

266. $(X, \mathscr{U}), (Y, \mathscr{V})$ をコンパクト空間とする. このとき $(X \times Y, \mathscr{U} \times \mathscr{V})$ もコンパクト空間になることを示せ.

267. $(X, \mathscr{U})$ は位相空間で $\mathscr{U}$ は離散位相とするとき次が成り立つことを示せ. $(X, \mathscr{U})$ がコンパクト空間 $\Longleftrightarrow X$ は有限集合である.

268. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とし, $A \subset Y \subset X$ とするとき, 次が成り立つことを示せ. $A$ は $X$ のコンパクト集合である $\Longleftrightarrow$ $A$ は $Y$ のコンパクト集合である.

269. 集合 $X$ と $X$ の一つの元 $\omega$ を与えておく. 部分集合族 $\mathscr{U}$ を $\emptyset, \{\omega\}$ および $X$ の有限集合の補集合全体からなるものとする.

(a) $(X, \mathscr{U})$ が位相空間であることを示せ.

(b) $(X, \mathscr{U})$ がコンパクト空間であることを示せ.

270. $X = \{0, 1\}$ を離散位相空間とする. その可算無限直積 $\prod X$ がコンパクト空間であることを示せ.

## 数学概論 III 演習 12

271. $(X, \mathscr{U})$, $(Y, \mathscr{V})$ を位相空間とし, $X \cong Y$ とする．このとき, $X$ がコンパクト空間なら $Y$ もコンパクト空間になることを示せ.

272. $(X, \mathscr{U})$ をコンパクト空間, $(Y, \mathscr{V})$ を位相空間とし, $f : X \to Y$ を連続写像とする．このとき $f(X)$ はコンパクト集合になることを示せ.

273. $(X, \mathscr{U})$, $(Y, \mathscr{V})$ を位相空間とし, $X \supset A$, $Y \supset B$ をコンパクト集合とする．このとき, $A \times B$ は $(X \times Y, \mathscr{U} \times \mathscr{V})$ のコンパクト集合になることを示せ.

274. $(X, d)$ を距離空間とする．$A \subset X$ をコンパクト集合, $B \subset X$ を閉集合とする．$A \cap B = \emptyset$ のとき $d(A, B) > 0$ となることを示せ[1].

275. 閉区間 $[a, \infty) \subset \mathbb{R}$ はコンパクト集合でないことを示せ.

276. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とする．$A_j \subset X$, $j = 1, ..., n$, をコンパクトな部分集合族とする．このとき $A = \cup_{j=1}^{n} A_j$ もコンパクトになることを示せ.

277. $n$ 次実直交行列全体 $O(n) = \{T \in M_n(\mathbb{R}); {}^tT \cdot T = E\}$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ のコンパクトな部分集合であることを示せ[2].

278. $n$ 次実正則行列全体 $GL(n)$ は $\mathbb{R}^{n^2}$ のコンパクトな部分集合でないことを示せ.

279. $(X, \mathscr{U})$ はコンパクトな Hausdorff 空間とする．このとき $(X, \mathscr{U})$ は正規空間になることを示せ.

280. $(X, \mathscr{U})$ はコンパクトな Hausdorff 空間とする．このとき距離付け可能であることと第 2 可算性が同値であることを示せ.

---

[1] $d(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} d(x, y)$

[2] $M_n(\mathbb{R})$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}^{n^2}$ の位相空間としての部分空間とみなす.

281. Hausdorff 空間 $(X, \mathscr{U})$ の点列 $x_n, n = 1, 2, 3, ..,$ が $x \in X$ に収束すると仮定する．このとき $Y = \{x, x_n; n = 1, 2, 3...\}$ は $X$ のコンパクトな部分集合であることを示せ.

282. $(X, \mathscr{U})$ をコンパクト空間, $A \subset X$, $A \neq \emptyset$, とする．$A$ を一点に縮めて得られる位相空間 $X/A$[3] もコンパクトであることを示せ.

283. $(X, \mathscr{U})$ をコンパクトな Hausdorff 空間とする．$A \subset X$, $A \neq \emptyset$, は閉集合とする．$A$ を一点に縮めて得られる位相空間 $X/A$ もコンパクトな Hausdorff 空間であることを示せ.

284. $n$ 次元単位球面 $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ の点 $x, y$ に対して同値関係を

$$x \sim y = \begin{cases} x = y \\ \text{または} \\ x = -y \end{cases}$$

で定める. 次の問に答えよ.

(a) $\sim$ が同値関係であることを示せ.

(b) $S^n/\sim$ が Hausdorff 空間であることを示せ.

(c) $S^n/\sim$ がコンパクトであることを示せ.

285. $(X, \mathscr{U})$ をコンパクト空間, $(Y, \mathscr{V})$ を Hausdorff 空間とする．このとき, 写像 $f : X \to Y$ が連続ならば $f$ が閉写像になることを示せ. また $f$ が全単射ならば同相写像であることを示せ.

286. $(X, \mathscr{U})$ をコンパクト空間, $(Y, \mathscr{V})$ を Hausdorff 空間とする．このとき, 写像 $f : X \to Y$ が連続かつ単射ならば $f$ は埋め込みになることを示せ.

[3] $x \sim y \iff x, y \in A$ と同値関係を定め, $X/\sim$ を $X/A$ と表す.

287. $(X, \mathscr{U})$ を Hausdorff 空間とする．$A, B \subset X$, $A \cap B = \emptyset$ となるコンパクト部分集合とする．このとき $A, B$ は開集合によって分離されることを示せ. i.e., $A \subset U$, $B \subset V$, $U, V \in \mathscr{U}$, となる開集合が存在する.

288. $(X, \mathscr{U})$ を Hausdorff 空間とする． $X$ のコンパクトな部分集合族 $\{K_\lambda \subset X; \lambda \in \Lambda\}$ が有限交叉性をもつとき $\cap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda \neq \emptyset$ を示せ.

289. $\mathscr{A} = \{[a_\lambda, b_\lambda]; -\infty < a_\lambda < b_\lambda < +\infty, \lambda \in \Lambda\}$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の有界閉区間の族とする． $\mathscr{A}$ の任意の 2 元が交わるとき $\cap_{\lambda \in \Lambda}[a_\lambda, b_\lambda] \neq \emptyset$ を示せ.

290. $(X, \mathscr{U})$ は $T_1$ 空間とする．このとき $X$ が可算コンパクト空間[4]であることと $X$ の任意の可算無限集合が集積点をもつことは同値であることを示せ.

291. $\mathbb{R}$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト集合の可算無限個の和集合で表されることを示せ[5].

[4] $X$ が可算コンパクト空間であるとは, $X$ の任意の可算個からなる開被覆は有限部分被覆をもつこと.

[5] 一般にコンパクト集合の可算個の和集合で表される位相空間を $\sigma$ コンパクトという.

292. 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ を次のように定める．$X = [0,1]$, $\mathscr{U}$ は近傍系が次で与えられる位相[6]:

$$U(x) = \{U_x(1/n) \cap [0,1]; n \in \mathbb{N}\}(x \neq 0)$$
$$U(0) = \{[0, 1/m) \setminus \{1/n; n \in \mathbb{N}\}; m \in \mathbb{N}\}.$$

一方 $I = [0,1]$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の位相空間としての部分空間とする．コンパクト空間の連続写像の逆像は必ずしもコンパクトにならない例を次のようにして示せ.

(a) $U(x)$ が $x$ の近傍系となることを示せ.

(b) $f : X \to I$, $x \mapsto x$ は連続な全単射になることを示せ.

(c) $X$ がコンパクトでないことを示せ.

293. $(X, \mathscr{U})$ をコンパクト空間とし, $f : X \to \mathbb{R}$ は連続とする．$f(x) > 0$ が任意の $x \in X$ で成り立つとき $f(x) \geq r (\forall x \in X)$ となる $r > 0$ が存在することを示せ.

[6] $U_x(\epsilon) = \{y; |x - y| < \epsilon\}$

**数学概論 III 演習 13**

294. $\mathbb{R}^n$ はコンパクトでないが局所コンパクトであることを示せ.

295. $\mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間としての位相空間とする. $\mathbb{Q}$ は局所コンパクトでないことを示せ.

296. $X = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を $\mathbb{R}$ の部分空間としての位相空間とする. $X$ は局所コンパクトでないことを示せ.

297. 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ で $\mathscr{U}$ は離散位相とする. このとき $X$ は局所コンパクトになることを示せ.

298. 位相空間 $(X, \mathscr{U})$ に一点 $\infty \notin X$ を付け加えた集合を $X^* = X \cup \{\infty\}$ とおく. $X^*$ の集合族を

$$\mathscr{U}^* = \mathscr{U} \cup \{X^* \setminus K; K \subset X \text{ はコンパクトな閉集合}\}$$

で定める. ただし空集合 $\phi$ は $X$ のコンパクト集合とみなす. このとき $(X^*, \mathscr{U}^*)$ が位相空間になることを示せ.

299. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とする. このとき 問 298 の $(X^*, \mathscr{U}^*)$ がコンパクトになることを示せ[1].

300. $(X, \mathscr{U})$ を位相空間とする. $(X^*, \mathscr{U}^*)$ を $(X, \mathscr{U})$ の１点コンパクト化とする. このとき $(X, \mathscr{U})$ が局所コンパクトな Hausdorff 空間であることと $(X^*, \mathscr{U}^*)$ がコンパクト空間であることが同値であることを示せ.

301. コンパクトでない局所コンパクト空間 $(X, \mathscr{U})$ が連結ならば, その一点コンパクト化も連結であることを示せ.

---
[1]アレキサンドロフの定理

302. 連結でなくコンパクトでもない 局所コンパクト空間 $(X, \mathscr{U})$ でその一点コンパクト化も連結でない例をあげよ.

303. $(X, \mathscr{U})$ は 2 点以上からならコンパクトな Hausdorff 空間とする. $y \in X$ に対して $Y = X \setminus \{y\}$ を $X$ の部分空間としての位相空間とする. このとき $Y$ の一点コンパクト化 $Y^*$ は $Y^* \cong X$ となることを示せ.

304. 局所コンパクト空間 $(X, \mathscr{U})$ が第二可算公理を満たしているとする. その可算個からなる base $\mathscr{B}$ で $\mathscr{B}$ の各元の閉包がコンパクトになるようなものが存在することを示せ.

305. ユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の一点コンパクト化 $\mathbb{R}^*$ は $\mathbb{R}^* \cong S^1$ となることを示せ.

306. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の部分空間としての位相空間

$$A = \{(r\cos\theta, r\sin\theta) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}\}$$

が局所コンパクトではないことを証明せよ.

307. 円環 $C = \{z \in \mathbb{R}^2; 1 < |z| \leq 2\}$ の 1 点コンパクト化は単位円板 $D = \{z \in \mathbb{R}^2; |z| \leq 1\}$ と位相同形であることを示せ.

308. $A = (-2, -1) \cup (0, 1)$ の一点コンパクト化はどのような位相空間と位相同形になるか図示して説明せよ.

309. 局所コンパクト空間 $(X, \mathscr{U})$ の上で定義された連続関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が無限遠点 $\infty$ で 0 になるとは, $\forall \epsilon > 0$ に対してコンパクト部分集合 $A \subset X$ が存在して, $|f(x)| < \epsilon$ が $x \in A^c$ で成立することとする. このとき $|f(x)|$, $x \in X$, に最大値が存在することを示せ.

310. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の一点コンパクト化 $(\mathbb{R}^n)^*$ は $(\mathbb{R}^n)^* \cong S^n$ となることを示せ.

311. $(X, \mathscr{U})$ はコンパクト空間, $(Y, d)$ を距離空間とし, $f, g : X \to Y$ は連続とする．このとき $\sup_{x \in X} d(f(x), g(x)) = d(f(z), g(z))$ となる $z \in X$ が存在することを示せ.

312. $(X, \mathscr{U})$ はコンパクトな Hausdorff 空間とする．$A \in \mathscr{U} \setminus \{\emptyset, X\}$, $A^c = X \setminus A$ とする．$A^c$ を一点に縮めてえられる位相空間 $X/A^c$ と $A$ の一点コンパクト化 $A^* = A \cup \{\infty\}$ について考える．$A^* \cong X/A^c$ を以下の手順で証明せよ.

$\pi : X \to X/A^c$ を自然な射影とし, 写像 $f : A^* \to X/A^c$ を次のように定める:

$$f(x) = \begin{cases} \pi(x), & x \in A, \\ \pi(A^c), & x = \infty \end{cases}$$

(a) $f$ は全単射であることを示せ.

(b) $f$ は連続であることを示せ.

(c) $X/A^c$ は Hausdorff 空間であることを示せ.

(d) $f^{-1}$ は連続であることを示せ.

(e) $A^* \cong X/A^c$ を示せ.

313. 閉区間 $[0, 1]$ をユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の部分空間としての位相空間とする．$A = [0, 1/3] \cup [1/2, 1]$ を一点に縮めてえられる位相空間 $[0, 1]/A$ は $S^1$ と位相同形になることを示せ．またこの様子を図示して説明せよ.

314. $(X, \mathscr{U})$ はコンパクトな Hausfdorff 空間とする．$U \in \mathscr{U} \setminus \{X\}$ は $U \cong \mathbb{R}$ とする．$A = X \setminus U$ とするとき $X/A \cong S^1$ となることを示せ．またこの様子を図示して説明せよ.

# 数学概論 III 演習 14

315. $(X, \mathscr{U})$ と $(Y, \mathscr{V})$ を位相空間とする． $Map(X, Y)$ の部分集合族で $\cap_{j=1}^{k} W(K_j, A_j)$ $(K_j \subset X$ はコンパクト集合，$A_j \in \mathscr{V})$ の形の集合全体を $B$ とおく． $B$ が部分基 (準基ともいう) になる位相[1]が $Map(X, Y)$ に存在することを示せ.

316. $(X, \mathscr{U})$ が局所コンパクトな Hausdorff 空間ならば正則空間になることを示せ.

317. $(X, \mathscr{U})$ をコンパクト空間とする．$C(X) = Map(X, \mathbb{R})$ 上に $d : C(X) \times C(X) \to \mathbb{R}$ を $d(f, g) = \max_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ で定める． $(C(X), d)$ が距離空間になることを示せ.

318. 記号の定義は問 317 と同じとする．$C(X)$ 上のコンパクト開位相を $\mathscr{U}$, 距離関数 $d$ から決まる位相を $\mathscr{U}_d$ とおく．このとき $\mathscr{U} = \mathscr{U}_d$ を示せ.

319. 記号の定義は問 317 と同じとする．このとき $(C(X), d)$ が完備であることを示せ.

320. $(X, \mathscr{U})$ は位相空間とする．$X$ 上の有界な $\mathbb{R}$ 値連続関数全体を $C_b(X)$ とする.

    (a) $d : C_b(X) \times C_b(X) \to \mathbb{R}$ を $d(f, g) = \sup_{x \in X} |f(x) - g(x)|$ で定める．このとき $d$ は $C_b(X)$ 上の距離関数になることを示せ.

    (b) 距離空間 $(C_b(X), d)$ が完備であることを示せ.

321. $d$ と $\rho$ が $X$ 上の距離関数であるとき $\tau = \sqrt{d^2 + \rho^2}$ も $X$ 上の距離関数になることを示せ.

[1] コンパクト開位相という.

322. $(X, d)$ と $(Y, \rho)$ を距離空間とする. $d$ から決まる位相を $\mathscr{U}_d$, $\rho$ から決まる位相を $\mathscr{U}_\rho$ とする. $\tau = \sqrt{d^2 + \rho^2}$ とする. 距離空間 $(X \times Y, \tau)$ で $\tau$ から決まる位相を $\mathscr{U}_\tau$ とする. このとき $\mathscr{U}_d \times \mathscr{U}_\rho = \mathscr{U}_\tau$ を示せ.

323. $(X, d)$ と $(Y, \rho)$ を完備距離空間[2]とする. このとき, これらの直積空間も完備であることを示せ.

324. 距離空間 $(C([0,1]), d)$ を考える.

(a) $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ を $f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \in [0,1] \\ 1, & x = 2 \\ 0, & x \in [3, \infty) \end{cases}$ をみたす連続関数とする. $f_n(x) = f(3^n x)$, $x \in [0,1]$, とすれば, $\{f_n\} \subset C([0,1])$ は Cauchy 列にならないことを示せ.

(b) $A = \{f \in C([0,1]); f([0,1]) \subset [0,1]\}$ は $C([0,1])$ の点列コンパクト集合[3]でないことを示せ.

(c) $A = \{f \in C([0,1]); f([0,1]) \subset [0,1]\}$ は $C([0,1])$ のコンパクト集合でないことを示せ.

325. 距離空間 $(C([0,1]), d)$ を考える. $h_n \in C([0,1])$ を帰納的に $h_1(t) = 0$, $h_{n+1}(t) = h_n(t) + \dfrac{t - h_n(t)^2}{2}$ によって定義する.

(a) $h_n(t)$ が多項式であることを示せ.

(b) $h_n(t) \leq \sqrt{t}$, $h_n(t) \leq h_{n+1}(t)$, $\lim_{t \to \infty} h_n(t) = \sqrt{t}$ を示せ.

(c) $h_n(t)$ は $d$ の位相で $\sqrt{t}$ に収束することを示せ.

326. $(X, d)$ を距離空間とする. $A \subset X$ は集積点をもたないとする. このとき $X$ の各点は $A$ と高々 1 点で交わる開近傍をもつことを示せ.

[2]距離空間 $(X, d)$ は全てのコーシー列が収束するとき完備距離空間という.

[3]位相空間 $(X, \mathscr{U})$ の任意の点列が収束する部分列をもつとき, $(X, \mathscr{U})$ を点列コンパクトという.

327. $(X,d)$ を完備距離空間とする．$A \subset X$ に距離 $d_A$ を $d_A = d$ で定める[4]．このとき次を示せ: $(A,d_A)$ は完備距離空間 $\Longleftrightarrow$ $A$ は閉集合

328. $a(m)_n = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} j^{-m}$, $m \in \mathbb{C}$, とする．

   (a) $\Re m > 1$ のとき $\{a(m)_n\}_n$ が Cauchy 列であることを示せ.

   (b) $m = 1$ のとき $\{a(m)_n\}_n$ が Cauchy 列にならないことを示せ.

329. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の有界な部分集合は全有界[5] であることを示せ.

330. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ は全有界でないことを示せ.

331. $X = \mathbb{R}$, $X \times X \ni (u,v) \mapsto d(u,v) = |\arctan u - \arctan v|$ とする．

   (a) $d$ が $X$ 上の距離関数になることを示せ.

   (b) $(X,d)$ は完備でないことを示せ

332. $(X,d)$ を距離空間とする．$X$ の部分集合 $A$ が全有界なら, その閉包 $\overline{A}$ も全有界であることを示せ.

333. $(X,d)$ を距離空間とする．$f : X \to X$ は等長写像[6]とする．このとき $f$ は連続な単射であることを示せ.

334. $(X,d)$ を距離空間とする．$f : X \to X$ は等長写像とする．

   (a) $X$ が全有界とする． 任意の $x \in X$ に対して $x_n = f(x_{n-1})$, $x_0 = x$ とおくと $\{x, x_1, x_2, \cdots, x_n \cdots\}$ には $x$ に収束する部分列が存在することを示せ.

   (b) $X$ がコンパクトであるとき $f$ は全射であることを示せ.

---

[4] $d$ の $A$ への制限という.

[5] $(X,d)$ を距離空間とする．$A \subset X$ が任意の $\epsilon > 0$ に対して $X$ の有限個の $\epsilon$-開球体で覆えるとき $A$ は全有界という.

[6] $d(x,y) = d(f(x), f(y))$ をみたす写像.

**数学概論 III 演習 15**

335. $(X,d)$ を距離空間とする．このとき次ぎの (1)-(3) が同値であることを示せ.

  (a) $X$ はコンパクト空間.

  (b) $X$ は完備かつ全有界.

  (c) $X$ は点列コンパクト[1].

336. 距離空間がコンパクトならば第二可算公理を満たすことを示せ.

337. $(X,d)$ はコンパクト距離空間とする．$f : X \to X$ は縮小写像とする[2]．$f(x)=x$ をみたす $x$ が存在するか考察する.

  (a) $X \ni x \mapsto F(x) = d(x, f(x)) \in \mathbb{R}$ は $X$ 上の連続な関数であることを示せ.

  (b) $F(x)$, $x \in X$, の最小値は $0$ であることを示せ.

  (c) $f(x)=x$ をみたす $x$ がただ一つ存在することを示せ.

338. $(X,d)$ を距離空間とする．このとき $X$ の Cauchy 列 $\{x_n\}$ 全体を $\hat{X}$ とおく.

  (a) $\{x_n\}, \{y_n\} \in \hat{X}$ に対して $d(x_n, y_n)$ が $n \to \infty$ で収束することを示せ.

  (b) $\{x_n\}, \{y_n\} \in \hat{X}$ に対して $d(x_n, y_n) \to 0 (n \to \infty)$ のとき $\{x_n\} \sim \{y_n\}$ とする．$\sim$ が同値関係になることを示せ.

  (c) $x = \{x_n\} \in \hat{X}$ の同値類を $[x]$ で表し,$X^* = \hat{X}/\sim$, とおく．$d^*([x],[y]) = \lim_n d(x_n, y_n)$ は well defined であることを示せ.

[1] 距離空間 $(X,d)$ で任意の点列が収束する部分列をもつとき, 点列コンパクトという.

[2] ある定数 $0 < C < 1$ が存在して $d(f(x), f(y)) \le C d(x,y)$ をみたす写像.

(d) $(X^*, d^*)$ が距離空間であることを示せ.

339. $(X, d)$ を距離空間とする．このとき $(X^*, d^*)$ は完備距離空間であることを示せ.

340. $\ell_2 = \{x = \{x_n\}; \sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty\}$ とする．$\ell_2 \times \ell_2$ 上の関数を

$$\ell_2 \times \ell_2 \ni (x, y) \mapsto d_2(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2} \in \mathbb{R}$$

で定める.

(a) $d_2$ が $\ell_2$ 上の距離関数になることを示せ.

(b) $e^k \in \ell_2$ を $e_n^k = \begin{cases} 1, & k = n, \\ 0, & k \neq n \end{cases}$ とする．$\{e^k\}_k$ は Cauchy 列にならないことを示せ.

(c) 単位球 $S = \{x \in \ell_2; d_2(0, x) = 1\}$ はコンパクトでないことを示せ.

341. $\mathbb{RP}^1 = \{\mathbb{R}^2$の原点を通る直線$\}$ について考える[3]．$X = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ とおく．$x, y \in X$ に対して『$x \sim y \Longleftrightarrow$ ある 0 でない$\lambda \in \mathbb{R}$ が存在して $y = \lambda x$』とする.

(a) $\sim$ は同値関係であることを示せ.

(b) 集合の等式 $\mathbb{RP}^1 = X/\sim$ を示せ.

(c) $S^1$ 上の同値類 $\sim'$ を $x \sim' y \Longleftrightarrow y = \pm x$ で定め, 自然な射影を $\pi' : S^1 \to S^1/\sim'$ とする．$f : S^1/\sim' \ni \pi'(x) \mapsto \pi(x) \in X/\sim$ が well-defined で同相写像になることを示せ.

(d) $S^1/\sim' \cong S^1$ を示せ.

[3] 1 次元実射影空間と呼ばれる.

(e) (b) により $\mathbb{RP}^1$ の位相を $X/\sim$ の位相で定める．このとき $\mathbb{RP}^1 \cong S^1$ を示せ.

342. $\mathbb{R}^n \ni (x_1, ...x_n)$ を $(x_1, ...., x_n, 0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ と同一視して $\mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ とみなす．ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数を $d_n$ とおく．つまり $d_n(x, y) = |x - y|$ のこと．$\mathbb{R}^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathbb{R}^n$ について考える.

(a) $x, y \in \mathbb{R}^\infty$ を任意の 2 点とすれば, 十分大きい $n$ に対して $x, y \in \mathbb{R}^n$ となるので $d_*(x, y) = d_n(x, y)$ と定める．$d$ が well-defined で $\mathbb{R}^\infty$ 上の距離関数になることを示せ.

(b) 距離空間 $(\mathbb{R}^\infty, d_*)$ の点列を $a_n = (1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{2^n}, 0, \cdots) \in \mathbb{R}^\infty$ とする．$\{a_n\}$ が Cauchy 列になることを示せ.

(c) 距離空間 $(\mathbb{R}^\infty, d_*)$ は完備でないことを示せ.

343. $\mathbb{R}^\mathbb{N} = \prod_{n=1}^\infty \mathbb{R}$ とする．つまりユークリッド空間 $\mathbb{R}$ の可算無限直積空間とする．$\ell_2 = \{\{x_n\}; x_i \in \mathbb{R}, \sum_n x_n^2 < \infty\}$ とする．このとき $\mathbb{R}^\infty \subset \ell_2 \subset \mathbb{R}^\mathbb{N}$ を示せ.

344. $(X_n, \mathscr{U}_n)$, $n \in \mathbb{N}$, を位相空間の族とする．$X_1 \subset X_2 \subset X_3 \subset \cdots$ とする．$X = \bigcup_n X_n$ とおく.

$$\mathscr{U} = \{U \subset X; U \cap X_n \in \mathscr{U}_n \text{が全ての } n \text{ で成り立つ}\}$$

としたとき $(X, \mathscr{U})$ は位相空間になることを示せ[4].

345. $O(2)$ を 2 次元実直交行列全体とする．$A \in O(2)$ は $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ の等長変換として作用する．よって $S^1$ に制限すれば $A\lceil_{S^1}: S^1 \to S^1$ は $S^1$ 上の等長変換を誘導する．$S^1$ 上の等長変換全体を $\mathrm{Isom}S^1$ とおく．このとき $\rho : O(2) \ni A \mapsto A\lceil_{S^1} \in \mathrm{Isom}S^1$ は全単射になることを示せ.

[4] $X$ を $\{X_n\}$ の帰納的極限と呼ばれる.

346. $GL(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}); \mathrm{det}A \neq 0\}$ を実正則行列の集合とし, $\mathbb{R}^{n^2}$ の部分空間とみなす.

(a) $\mathrm{det} : GL(n) \ni A \mapsto \mathrm{det}A \in\to \mathbb{R}$ とするとき, det は連続であることを示せ.

(b) $\mathrm{det}GL(n)$ が連結でないことを示せ.

(c) $GL(n)$ が連結でないことを示せ.

347. $O(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}); A \cdot {}^tA = {}^tA \cdot A = E\}$ を実直交行列の集合とする. $O(n)$ が $\mathbb{R}^{n^2}$ 部分空間として連結でないことを示せ.

348. $SO(n) = \{A \in O(n); \mathrm{det}A = 1\}$ が $\mathbb{R}^{n^2}$ の部分空間として弧状連結であることを示せ.