Feynman-Kac 型公式の場の量子論への応用

廣島 文生　九大・数理

1 一般化された spin-Feynman-Kac-Itô 公式

場の量子論を確率解析的に研究するための一つの方法が Feynman-Kac 公式の応用である. Hamiltonian H の生成する熱半群 e^{-tH} の期待値をパス上の測度で表現して, H の固有ベクトルや H 自身のスペクトルを調べるのである. 何故 Feynman-Kac 公式の応用なのかといわれれば, その理由の一つが, 場の量子論に現れる Hamiltonian (自己共役作用素) は, 普通の摂動理論が使えないからである.

2007 年に Wien 大学の Pauli 研究所で集中講義をする機会があり, それを契機に, ここで紹介する研究が始まった. 実は場の量子論に行く前に, まず有限自由度空間の Feynman-Kac 公式を構成しておく必要がある. 当初, 典型的な Feynman-Kac 公式は知っていたのだが, 生成子の自己共役作用素にスピンが存在したり, 相対論的 Schrödinger 作用素のように non-local だったりする場合には, あまり研究されていないような気がした. しかし, 最終的には, 下から有界な Schrödinger 型作用素 $H_{\rm p}$ の生成する熱半群 $e^{-tH_{\rm p}}$ の Feynman-Kac 公式は, cádlág パス空間上に, ほとんどの場合, 構成できることがわかった. その結果, 場の量子論への応用もある程度まで出来るようになった.

このアブストラクトでは, はじめに H-Ichinose-Lőrinczi [HIL12, HIL13] (一般化された FK 型汎関数積分表示) を紹介し, 次に 2002 年頃までの場の量子論の研究 [Hir04, Hir05b, LHB11] を復習し, Gérard-H-Panatti-Suzuki[GHPS09]-[GHPS12b](多様体上の場の量子論), H [Hir14a](non-local な模型の Gibbs 測度), Hirokawa-H-Lőrinczi [HHL14](SB 模型の Gibbs 測度), Gubinelli-H-Lőrinczi [GHL13](UV くりこみ) の結果を紹介する.

1.1 Schrödinger 作用素と Feynman-Kac 公式

自己共役で下から有界な Schrödinger 作用素

$$H_{\rm p} = -\frac{1}{2}\Delta + V \tag{1.1}$$

の生成する熱半群 $e^{-tH_{\rm p}}$ を Brown 運動 $(B_t)_{t\geq 0}$ で表すのがいわゆる Feynman-Kac の公式である. 以降, 定義域の議論を避けるために何も言及しないときは $V \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ と仮定する. また, $(B_t)_{t\geq 0}$ は $(\mathscr{X}, \mathcal{B}, W)$ 上の d-次元 Brown 運動を表す. ここで, $\mathscr{X} = C([0,\infty);\mathbb{R}^d)$

で W は Wiener 測度. Schrödinger 作用素 H_{p} の生成する熱半群の期待値 $(f, e^{-tH_{\mathrm{p}}}g)$ は次の Feynman-Kac の公式で与えられる.

$$(f, e^{-tH_{\mathrm{p}}}g) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_0)} g(B_t) e^{-\int_0^t V(B_s)ds} \right] \tag{1.2}$$

(1.2) の表示から熱半群 $e^{-tH_{\mathrm{p}}}$ の性質や, また H_{p} のスペクトルなど様々なことが分かる. 一度, 経路積分表示が出来てしまえば, 逆に (1.2) の右辺が有界になるような V のクラスを設定し, (1.2) の右辺から決まる対称な C_0 半群の自己共役な生成子として H_{p} を定義することも出来る. そのような V の例として Kato クラスや Stummel クラスなどがよく知られている. (1.2) を, $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の, ベクトル場 $a = (a_1, \cdots, a_d)$ を含むスピン 1/2 相対論的 Schrödinger 作用素

$$\sqrt{(\sigma \cdot (p - a))^2 + m^2} - m + V \tag{1.3}$$

に拡張したい. ここで, $p = (-i\partial_1, \cdots, -i\partial_d)$. H_{p} と異なるところは, ベクトル場 a の存在, スピンを表す 2×2Pauli 行列 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$,

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

の存在, そして $\sqrt{\ }$ の存在であるが, 伊藤積分, ポアソン過程, subordinator を組み合わせることで公式を得ることができる. さらに, (1.3) を一般的化することができる.

1.2 Bernstein 関数と subordinator

Non-local な作用素である相対論的 Schrödinger 作用素 (1.3) の経路積分表示を構成したい. (1.3) は $h_2(a) = \frac{1}{2}(\sigma \cdot (p-a))^2$ をもちいて $\Psi(h_2(a)) + V$, $\Psi(u) = \sqrt{2u + m^2} - m$, と表せることに注意しよう. Ψ は Bernstein 関数とよばれている.

$$\mathscr{B} = \left\{ f \in C^\infty((0,\infty)) \,\middle|\, f(x) \geq 0, (-1)^n \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right)(x) \leq 0, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

とする. $\mathscr{B}$ に含まれる関数を Bernstein 関数という. 部分集合 $\mathscr{B}_0$ を次で定める.

$$\mathscr{B}_0 = \left\{ f \in \mathscr{B} \,\middle|\, \lim_{u \to 0+} f(u) = 0 \right\}.$$

Bernstein 関数は正の単調増加関数で上に凸な関数 (concave) である. $\mathscr{B}_0$ の典型的な例は $\Psi(u) = \sqrt{2u + m^2} - m$, $\Psi(u) = cu^\alpha$, $c \geq 0$, $\alpha \in (0, 1]$, や $\Psi(u) = 1 - e^{-au}$, $a \geq 0$ である. $\mathscr{L}$ を $\mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ 上の測度 λ で次を満たすもの全体とする. (1) $\lambda((-\infty, 0)) = 0$, (2) $\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (y \wedge 1) \lambda(dy) < \infty$. $\lambda \in \mathscr{L}$ は $\int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} (y^2 \wedge 1) \lambda(dy) < \infty$ を満たすので Lévy 測度の一種である.

命題 1.1 (**Bernstein 関数の特徴付け**) Bernstein 関数 $\Psi \in \mathscr{B}_0$ に対して, $(b, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathscr{L}$ で

$$\Psi(u) = bu + \int_0^\infty (1 - e^{-uy}) \lambda(dy) \tag{1.4}$$

を満たすものが存在する. 逆に, 任意の $(b, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathscr{L}$ に対して (1.4) の右辺は $\mathscr{B}_0$ に含まれる関数になる.

確率空間 $(\mathscr{X}_\nu, \mathcal{B}_\nu, \nu)$ 上の確率過程 $(T_t)_{t\geq 0}$ が次を満たすとき subordinator とよばれる. (1) $(T_t)_{t\geq 0}$ は ゼロから出発する 1 次元 Lévy 過程, (2) $t \mapsto T_t$ は非減少 a.s. Subordinator はもちろん Lévy 過程なのでマルコフ過程である. $\mathscr{S}$ を subordinator 全体の集合とする. 次の命題は基本的である.

命題 1.2 (**Subordinator の特徴付け**) $(\mathscr{X}_\nu, \mathcal{B}_\nu, \nu)$ を確率空間とし, $\Psi \in \mathscr{B}_0$ とする. このとき $(T_t)_{t\geq 0} \in \mathscr{S}$ で $\mathbb{E}_\nu[e^{-uT_t}] = e^{-t\Psi(u)}$ を満たすものが一意的に存在する. 逆に $(T_t)_{t\geq 0} \in \mathscr{S}$ としよう. このとき $\Psi \in \mathscr{B}_0$ で $\mathbb{E}_\nu[e^{-uT_t}] = e^{-t\Psi(u)}$ を満たすものが存在する.

命題 1.1, 1.2 から $\mathscr{S}$, $\mathscr{B}_0$, $\mathbb{R}_+ \times \mathcal{L}$ は, $\begin{array}{ccccc} \mathscr{S} & \Longleftrightarrow & \mathscr{B}_0 & \Longleftrightarrow & \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L} \\ (T_t)_{t\geq 0} & \Longleftrightarrow & \Psi & \Longleftrightarrow & (b,\lambda) \end{array}$ のように同一視することができる. 記号 $T_t^\Psi \in \mathscr{S}$ は $\Psi \in \mathscr{B}_0$ に対応する subordinator を表すものとする. $\mathbb{E}_\nu[e^{-T_t u}] = e^{-t\Psi(u)}$ を右から左に読んで, u が Schrödinger 作用素 h と思えば $e^{-t\Psi(h)}$ の経路積分表示はランダムな時間 T_t を導入して, $e^{-T_t h}$ の T_t に関する期待値をとることで実現できることがわかる. 実際, このアイデアで non-local な場合の Schrödinger 熱半群の経路積分表示が構成できる.

1.3 ベクトルポテンシャルと一般化されたスピン

ベクトルポテンシャル $a = (a_1, ..., a_d)$ の各成分 a_μ は実数値関数とする. 次の条件を導入する. (A1) $a \in (L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d))^d$, (A2) $a \in (L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d))^d$, $\nabla \cdot a \in L^1_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$, (A3) $a \in (L^4_{\rm loc}(\mathbb{R}^d))^d$, $\nabla \cdot a \in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^d)$, (A4) $d = 3$, $a \in (L^4_{\rm loc}(\mathbb{R}^3))^3$, $\nabla \cdot a \in L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^3)$ かつ $\nabla \times a \in (L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^3))^3$. 条件 (A1) は Schrödinger 作用素 $\frac{1}{2}(p-a)^2$ を 2 次形式で定義するのに必要な条件である. 条件 (A2) は Feynman-Kac-Itô 公式のために必要になる. 条件 (A3)[1]は $\frac{1}{2}(p-a)^2 = \frac{1}{2}(p^2 - p\cdot a - a\cdot p + |a|^2)$ と定義するときに有用な条件である. 条件 (A4) はスピンをもつ Schrödinger 作用素を $\frac{1}{2}(\sigma\cdot(p-a))^2 = \frac{1}{2}(p^2 - p\cdot a - a\cdot p + |a|^2) - \frac{1}{2}\sigma\cdot(\nabla \times a)$ と定義するときに有用な条件である. スピン 1/2 をもった Schrödinger 作用素 $\frac{1}{2}(\sigma\cdot(p-a))^2$ を 2 次形式で定義しよう. (A1) を仮定して, 二次形式 q_2 を次で定める.

$$\mathrm{q}_2(f,g) = \sum_{\mu=1}^{3} (\sigma_\mu \mathrm{D}_\mu f, \sigma_\mu \mathrm{D}_\mu g), \quad D_\mu = -i\partial_\mu - a_\mu. \tag{1.5}$$

定義域は $Q(\mathrm{q}_2) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2) \,|\, \sigma_\mu \mathrm{D}_\mu f \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2),\ \mu = 1,2,3\}$. 2 次形式 q_2 は非負な閉 2 次形式になるので, $(h_2(a)f, g) = \mathrm{q}_2(f,g)$, $f \in D(h_2(a))$, $g \in Q(\mathrm{q}_2)$ を満たす自己共役作用素 $h_2(a)$ がただ一つ存在する. ここで, 定義域は $D(h_2(a)) = \{f \in Q(\mathrm{q}_2) \,|\, \mathrm{q}_2(f,\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2)'\}$. スピンがない場合は $h(a)$ と表すことにする. $h_2(a)$ は $\mathbb{C}^2$ 値関数空間上に作用する自己共役作用素なので, 例えば $h_2(a) + V$ が生成する熱半群の経路積分表示をトロッタ積公式を用いて直接求めても, 積分核はもちろん 2×2 行列の無限積のようなものになり, あまり興味がわかない. そこで, $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\}$ として, $h_2(a)$ を $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ 上の作用素へユニタリー変換する. $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ 上に作用する作用素 $h_{\mathbb{Z}_2}$ を次で定める.

$$(h_{\mathbb{Z}_2} f)(x,\theta) = \left(\frac{1}{2}(p-a)^2 - \frac{1}{2}\theta b_3(x)\right) f(x,\theta) - \frac{1}{2}\Big(b_1(x) - i\theta b_2(x)\Big) f(x,-\theta). \tag{1.6}$$

[1] このアブストラクトでは (A3) はここ以外では現れない.

ここで $(b_1,b_2,b_3)=\nabla\times a$. 可閉作用素 $h_{\mathbb{Z}_2}\lceil_{\mathbb{C}^2\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)}$ の閉拡大も同じ記号で書くことにする.

命題 1.3 (**ユニタリー同値性**) 条件 (A4) を仮定する. このとき $h_{\mathbb{Z}_2}$ は $\ell^2(\mathbb{Z}_2)\otimes D(h)$ 上で自己共役で $\ell^2(\mathbb{Z}_2)\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で本質的自己共役になる. さらに $h_2(a)\cong h_{\mathbb{Z}_2}$ が従う.

以降 $h_{\mathbb{Z}_2}$ を混乱のない限り $h_2(a)$ と書くことにする. 次にスピンを一般化する. 自己共役作用素 $h_2(a)$ を 3 次元から d 次元へ, また $\mathbb{Z}_2\to\mathbb{Z}_p$ へ一般化する. $\mathbb{Z}_p=\{\theta_1^{(p)},...,\theta_p^{(p)}\}$ を 1 の原始 p 乗根の集合とする. ここで $\theta_\alpha^{(p)}=\exp\left(2\pi i\frac{\alpha}{p}\right)$, $\alpha\in\mathbb{N}$. 以下で $p\geq 2$ を固定し $\theta_\beta^{(p)}$ を簡単に θ_β と書くことにする. $\ell^2(\mathbb{Z}_p)=\{f:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{C}\}$ にスカラー積 $(f,g)_{\ell^2(\mathbb{Z}_p)}=\sum_{\beta=1}^p\overline{f(\theta_\beta)}g(\theta_\beta)$ を導入する. スピン $\mathbb{Z}_p$ をもった Schrödinger 作用素 を定義しよう.

定義 1.4 (**一般化されたスピン作用素**) [HIL12]

(1) (対角部分) $U:\mathbb{R}^d\times\mathbb{Z}_p\to\mathbb{R}$ は $\max_{\theta\in\mathbb{Z}_p}|U(x,\theta)|$ が $-\Delta/2$ に相対有界な掛け算作用素とする.

(2) (非対角部分) $W_\beta:\mathbb{R}^d\times\mathbb{Z}_p\to\mathbb{C}$, $1\leq\beta\leq p-1$, は $\max_{\theta\in\mathbb{Z}_p}|W_\beta(x,\theta)|$ が $-\Delta/2$ に相対有界となる掛け算作用素とする. $U_\beta:\mathbb{R}^d\times\mathbb{Z}_p\to\mathbb{C}$ を次で定める.

$$U_\beta(x,\theta_\alpha)=\frac{1}{2}\left(W_\beta(x,\theta_{\alpha+\beta})+\overline{W_{p-\beta}(x,\theta_\alpha)}\right),\quad \alpha=1,...,p,\ \beta=1,...,p-1. \tag{1.7}$$

(3) (一般化されたスピン作用素) $\mathcal{M}=\mathcal{M}(U,U_1,\cdots,U_{p-1}):L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{Z}_p)\to L^2(\mathbb{R}^d\times\mathbb{Z}_p)$,

$$\mathcal{M}:f(x,\theta_\alpha)\mapsto U(x,\theta_\alpha)f(x,\theta_\alpha)+\sum_{\beta=1}^{p-1}U_\beta(x,\theta_\alpha)f(x,\theta_{\alpha+\beta}) \tag{1.8}$$

を一般化されたスピン作用素とよぶ.

以下で $u_p(x)=\max_{\theta\in\mathbb{Z}_p}|U(x,\theta)|$. そして $u_\beta(x)=\max_{\theta\in\mathbb{Z}_p}|U_\beta(x,\theta)|$, $\beta=1,...,p-1$ とおく. また, 定数 c_β を $\|U_\beta f\|\leq c_\beta\|(-\Delta/2)f\|+b_\beta\|f\|$ で定める. 条件 (A1) のもと $h_p=h_p(a,U,U_1,\cdots,U_{p-1})=\mathbb{1}\otimes h(a)+\mathcal{M}$ とおく. 形式的に h_p は

$$(h_pf)(x,\theta_\alpha)=\left(\frac{1}{2}(p-a(x))^2+U(x,\theta_\alpha)\right)f(x,\theta_\alpha)+\sum_{\beta=1}^{p-1}U_\beta(x,\theta_\alpha)f(x,\theta_{\alpha+\beta}) \tag{1.9}$$

となる. 以下では U, U_β を一つ固定する.

定理 1.5 条件 (A2) を仮定する. $\sum_{\beta=1}^p c_\beta<1$ としよう. このとき h_p は $\ell^2(\mathbb{Z}_p)\otimes D(h)$ 上で自己共役 で下から有界である. さらに $\mathbb{1}\otimes h(a)$ の任意の芯上で本質的自己共役 である. 特に $\ell^2(\mathbb{Z}_p)\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は h_p の芯である.

定義 1.6 (**一般化された Schrödinger 作用素**) [HIL13] 条件 (A2) と $\sum_{\beta=1}^p c_\beta<1$ を仮定する. $\mathcal{M}$ は (1.8) の一般化されたスピン, $\Psi\in\mathscr{B}_0$ とし $\overline{h_p}=h_p-\inf\sigma(h_p)$ とおく. このとき $h_p^\Psi=\Psi\left(\overline{h_p}\right)+V$ を一般化された Schrödinger 作用素という.

命題 1.7 条件 (A2) を仮定し $\sum_{\beta=1}^p c_\beta<1$ とする. もし $\Psi\in\mathscr{B}_0$ ならば, $\ell^2(\mathbb{Z}_p)\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は h_p^Ψ の芯である.

1.4 一般化された spin-Feynman-Kac-Itô 公式

ここでは h_p^Ψ が生成する熱半群 $e^{-th_p^\Psi}$ の経路積分表示を構成する．そのために $p-1$ 個の独立なポアソン過程を用意する．$(N_t^\beta)_{t\geq 0}$, $\beta=1,...,p-1$, は $(\mathscr{X}_\mu, \mathscr{F}_\mu, \mu)$ 上の $p-1$ 個の独立な intensity 1 をもつポアソン過程とする．即ち $\mu(N_t^\beta=n)=\dfrac{t^n}{n!}e^{-t}$. さらに, Lévy 過程 $(N_t)_{t\geq 0}$ を $N_t=\sum_{\beta=1}^{p-1}\beta N_t^\beta$ によって定める．$\mathcal{B}_t^N=\sigma(N_s, s\leq t)$ とする．このとき N_t は $\mathcal{B}_t^N$ に関してマルコフ過程である．$\mathbb{E}_\mu[f(N_t+\alpha)]$ を $\mathbb{E}_\mu^\alpha[f(N_t)]$ と書こう．また dN_s^β を $(N_t^\beta)_{t\geq 0}$ に付随した counting 測度とすれば $\int_v^{w+} g(N_{s-})dN_s^\beta=\int_{(v,w]} g(N_{s-})dN_s^\beta=\sum_{\substack{v<r\leq w\\ N_{r+}^\beta\neq N_{r-}^\beta}} g(N_{r-})$ となる．よって $\mathbb{E}_\mu\left[\int_v^{w+} g(N_{s-})dN_s^\beta\right]=\mathbb{E}_\mu\left[\int_v^w g(N_s)ds\right]$ がわかる．

定理 1.8 (**一般化された spin-Feynman-Kac-Itô 公式**) [HIL12] $\Psi\in\mathscr{B}_0$ としよう．T_t^Ψ の $\mathbb{R}$ 上の分布を $\rho(\cdot,t)$ とする．$u_\beta\in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\beta=1,...,p$ とし, 条件 (A2) を仮定する．さらに

$$\int_{\mathbb{R}} dr\rho(r,t)\int_0^r ds\int_{\mathbb{R}^d} dy\frac{e^{-|x-y|^2/(2s)}}{(2\pi s)^{d/2}}|\log u_\beta(y)|<\infty,\quad \beta=1,...,p-1 \tag{1.10}$$

が成立しているとする．このとき

$$(f,e^{-th_p^\Psi}g)=\sum_{\alpha=1}^p\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_{W\times\mu\times\nu}^{x,\alpha,0}\left[e^{(p-1)T_t^\Psi}\overline{f(B_0,\theta_{N_0})}g(B_{T_t^\Psi},\theta_{N_{T_t^\Psi}})e^{\mathscr{S}^\Psi}\right]. \tag{1.11}$$

ここで $\mathscr{S}^\Psi=\mathscr{S}_V^\Psi+\mathscr{S}_a^\Psi+\mathscr{S}_{\mathrm{S}}^\Psi$ は $\xi=\mathrm{inf}\sigma(h_p)$ $(\mathrm{inf}\sigma(h_p)<0)$, $\xi=0(\mathrm{inf}\sigma(h_p)>0)$ として

$$\mathscr{S}_V^\Psi=-\int_0^t V(B_{T_s^\Psi})ds,\quad \mathscr{S}_a^\Psi=-i\int_0^{T_t^\Psi}a(B_s)\circ dB_s,$$
$$\mathscr{S}_{\mathrm{S}}^\Psi=-\int_0^{T_t^\Psi}\Big(U(B_s,\theta_{N_s})-\xi\Big)ds+\sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{T_t^\Psi+}\log(-U_\beta(B_s,\theta_{N_{s-}}))dN_s^\beta.$$

1.5 スピン 1/2 相対論的 Schrödinger 作用素

スピン 1/2 相対論的 Schrödinger 作用素の経路積分表示を考えよう[2]．$d=3$, $p=2$ とする．$W_1(x,\theta)=-\frac{1}{2}(b_1(x)+i\theta b_2(x))$, $\theta\in\mathbb{Z}_2$ と定めれば $\theta_1=-1$, $\theta_2=1$ となり, また (1.7) から非対角部分は $U_1(x,\theta)=\frac{1}{2}(W_1(x,\theta\theta_1)+\overline{W_1(x,\theta)})$, $\theta\in\mathbb{Z}_2$ がわかる．また $W_1(x,\theta\theta_1)=-\frac{1}{2}(b_1(x)-i\theta b_2(x))=\overline{W_1(x,\theta)}$ となるので非対角部分は $U_1(x,\theta)=-\frac{1}{2}(b_1(x)-i\theta b_2(x))$ となる．一方で対角部分は $U(x,\theta)=-\frac{1}{2}\theta b_3(x)$ である．これはまさに (1.6) で与えたものに他ならない．よって $\theta_\alpha=\theta_\alpha^{(2)}$, $\alpha=1,2$, かつ $\theta_1=-1$, $\theta_2=+1$. 相対論的 Schrödinger 作用素は $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2)$ 上に

$$H=\sqrt{(\sigma\cdot(p-a))^2+m^2}-m+V,\quad m\geq 0, \tag{1.12}$$

[2]物理の文献 [ARS91] では, 経路積分表示が構成されている．

で与えられる．条件 (A4) を仮定しよう．このとき (1.12) は $\sqrt{2h+m^2}-m+V$ にユニタリー同値である．ここで h は $L^2(\mathbb{R}^3\times\mathbb{Z}_2)$ 上に (1.6) で定義される．今までの記号 h_p^Ψ を使えば H は

$$H = h_2^\Psi(a, -\frac{1}{2}\theta b_3, -\frac{1}{2}(b_1 - i\theta b_2), V) \tag{1.13}$$

と表される．ここで, $\Psi(u)=\sqrt{2u+m^2}-m$.

定理 1.9 (**スピン 1/2 相対論的 Schrödinger 作用素の spin-Feynman-Kac-Itô 公式**) [HIL13] 条件 (A2) と以下の (1)-(4) を仮定する．

(1) V は $\sqrt{-\Delta+m^2}$ に相対有界でその相対閾値 $A<1$.

(2) $-\frac{1}{2}b_j$, $j=1,2,3$, は $-\Delta/2$ に相対有界でその相対閾値 $\kappa_j \geq 0$.

(3) $A\left(1-(\kappa_1+\kappa_2+\kappa_3)\right)^{-1/2}<1$.

(4) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\log(\frac{1}{2}\sqrt{b_1(y)^2+b_2(y)^2})|}{2\pi|x-y|}dy < \infty \quad \text{a.e.} x \in \mathbb{R}^3.$

このとき (1.13) の H は $\ell^2(\mathbb{Z}_2)\otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で本質的自己共役で

$$(f, e^{-tH}g) = \sum_{\alpha=1,2}\int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}_{W\times\mu\times\nu}^{x,\alpha,0}\left[e^{T_t^\Psi}\overline{f(B_0,\theta_{N_0})}g(B_{T_t^\Psi},\theta_{N_{T_t^\Psi}})e^{\mathscr{S}^\Psi}\right] \tag{1.14}$$

が成立する．ここで $\mathscr{S}^\Psi=\mathscr{S}_V^\Psi+\mathscr{S}_a^\Psi+\mathscr{S}_{\mathrm{S}}^\Psi$ は

$$\mathscr{S}_V^\Psi = -\int_0^t V(B_{T_s^\Psi})ds, \quad \mathscr{S}_a^\Psi = -i\int_0^{T_t^\Psi} a(B_s)\circ dB_s,$$
$$\mathscr{S}_{\mathrm{S}}^\Psi = \int_0^{T_t^\Psi}\frac{1}{2}b_3(B_s)\theta_{N_s}ds + \int_0^{T_t^\Psi+}\log\left(\frac{1}{2}\left(b_1(B_s)-i\theta_{N_{s-}}b_2(B_s)\right)\right)dN_s$$

で与えられる．

この経路積分をつかって, Lieb-Thirring bound [HIL13], 固有状態の空間的減衰性 [HL12] が示せる．

1.6 $P(\phi)_1$ 過程

ここで説明する $P(\phi)_1$ 過程は, Ornstein-Uhlenbeck 過程の一般化である．まずは, 自己共役作用素の基底状態の定義を与える．

定義 1.10 (**基底状態**) 自己共役作用素 K のスペクトルの下限を E とかく．$m=\dim\mathrm{Ker}(K-E)$ とおく．$m\geq 1$ となるとき K の基底状態は存在するといい, $m=1$ のとき K の基底状態は一意的に存在するという．また $m=0$ のとき K の基底状態は存在しないという．

H_{p} は正規化された基底状態 $\varphi_{\mathrm{p}} > 0$ をもつと仮定する．$H_{\mathrm{p}}\varphi_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{p}}\varphi_{\mathrm{p}}$ として, $\overline{H_{\mathrm{p}}} = H_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p}}$ とおく．基底状態が正規化されているので $d\mathsf{N}_0 = \varphi_{\mathrm{p}}^2(x)dx$ は $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度になる．$\mathscr{U} : L^2(\mathbb{R}^d, d\mathsf{N}_0) \to L^2(\mathbb{R}^d, dx)$, $f \mapsto \varphi_{\mathrm{p}} f$ を基底状態変換という[3]．基底状態変換はユニタリー変換である．基底状態変換した自己共役作用素を

$$L_{\mathrm{p}} = \mathscr{U}^{-1}\overline{H_{\mathrm{p}}}\mathscr{U} = \frac{1}{\varphi_{\mathrm{p}}}(H_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p}})\varphi_{\mathrm{p}}, \quad D(L_{\mathrm{p}}) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mathsf{N}_0) \,|\, \mathscr{U} f \in D(H_{\mathrm{p}})\} \tag{1.15}$$

で定義する．$-\Delta$ に付随した拡散過程が Brown 運動であるように, L_{p} に付随した拡散過程 $(X_t)_{t\geq 0}$ が存在する. 形式的には次のように考える．$L_{\mathrm{p}} f = -\frac{1}{2}\Delta f - \nabla \log \varphi_{\mathrm{p}} \cdot \nabla f$ なので確率微分方程式 (SDE)

$$dX_t = \nabla \log \varphi_{\mathrm{p}}(X_t)dt + dB_t, \quad X_0 = x \tag{1.16}$$

の解 $(X_t^x)_{t\geq 0}$ は Itô の公式から $\mathbb{E}_W[f(X_t^x)] = \left(e^{-tL_{\mathrm{p}}} f\right)(x)$ を満たす.

定理 1.11 ($P(\phi)_1$ **過程の存在**) [GHPS12b] V は Kato 分解可能で, H_{p} は基底状態 $\varphi_{\mathrm{p}} > 0$ をもち．$L_{\mathrm{p}} = \mathscr{U}^{-1}\overline{H_{\mathrm{p}}}\mathscr{U}$ をその基底状態変換とする．X_t は $(\mathscr{X}, \mathcal{B})$ 上の座標過程 $X_t(w) = w(t)$ とする．このとき $(\mathscr{X}, \mathcal{B})$ 上に確率測度 $\mathcal{N}_0^x$ で以下を満たすものが存在する.

(初期分布) $\mathcal{N}_0^x(X_0 = x) = 1$.

(鏡映対称性) $(X_t)_{t\geq 0}$ と $(X_s)_{s\leq 0}$ は独立で $X_{-t} \stackrel{\mathrm{d}}{=} X_t$.

(マルコフ性) フィルトレーションを $\mathcal{B}_t^+ = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$, $\mathcal{B}_t^- = \sigma(X_s, t \leq s \leq 0)$ と定義する．このとき $(X_t)_{t\geq 0}$ と $(X_s)_{s\leq 0}$ は $(\mathcal{F}_t^+)_{t\geq 0}$ と $(\mathcal{F}_t^-)_{t\leq 0}$ に関して各々拡散過程である. i.e., $s, t \geq 0$ に対して

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}[X_{t+s}|\mathcal{F}_s^+] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}[X_{t+s}|\sigma(X_s)] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^{X_s}}[X_t],$$
$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}[X_{-t-s}|\mathcal{F}_{-s}^-] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}[X_{-t-s}|\sigma(X_{-s})] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^{X_{-s}}}[X_{-t}].$$

ここで $\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^{X_s}}$ は $\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^y}$ で $y = X_s$ としたもの．さらに $\mathbb{R} \ni t \mapsto X_t \in \mathbb{R}^d$ が a.s. に連続.

(シフト不変性) $-\infty < t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n < \infty$ とする．このとき

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}\left[\prod_{j=0}^n f_j(X_{t_j})\right] d\mathsf{N}_0 = (f_0, e^{-(t_1-t_0)L_{\mathrm{p}}} f_1 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})L_{\mathrm{p}}} f_n)_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mathsf{N}_0)}.$$

ここで $f_0, f_n \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mathsf{N}_0)$, $f_j \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, ..., n-1$. 特にシフト不変になる.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}\left[\prod_{j=1}^n f_j(X_{t_j})\right] d\mathsf{N}_0 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}\left[\prod_{j=1}^n f_j(X_{t_j+s})\right] d\mathsf{N}_0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

確率空間 $(\mathscr{X}, \mathcal{B}, \mathcal{N}_0^x)$ 上の座標過程 X_t を $P(\phi)_1$ 過程という．$\mathscr{X} \times \mathbb{R}^d$ 上の確率測度 $d\mathcal{N}_0 = d\mathsf{N}_0 \otimes d\mathcal{N}_0^x$ をつかって次を得る.

系 1.12 ($P(\phi)_1$**-Feynman-Kac 公式**) H_{p} は $\varphi_{\mathrm{p}} > 0$ なる基底状態をもつと仮定する．$f, g \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mathsf{N}_0)$ とする．このとき

$$(f, e^{-tL_{\mathrm{p}}} g)_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mathsf{N}_0)} = (f\varphi_{\mathrm{p}}, e^{-t(H_{\mathrm{p}}-E)} g\varphi_{\mathrm{p}})_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}[\bar{f}(X_0)g(X_t)]. \tag{1.17}$$

[3] 確率論では Doob の h-変換として知られている.

2　FKN 型汎関数積分表示の場の量子論への応用〜Nelson 模型

ここから Nelson 模型を例にして場の量子論について説明する．Nelson 模型は 1964 年に E. Nelson [Nel64a, Nel64b] が導入した模型である．物理的には, 核子 (フェルミオン) と中間子 (ボゾン) の非相対論的な相互作用を表す．Nelson はこの論文でくりこみ理論を展開した．Nelson 模型は最も単純な場の量子論の模型のひとつで, 1964 年から現在まで研究が続けられている．1964 年から 1970 年頃にかけては massive な場合の研究が進み, 1990 年代中盤から 2000 年頃にかけては massless な場合の研究が進んだ．その後現在に至るまで, 漸近完全性, 基底状態, enhanced binding, 多様体上への拡張, くりこみ理論などが研究されている．

2.1　Nelson 模型〜2002 年頃

はじめに, 道具を定義し 2002 年頃までの結果を復習する．

定義 2.1 (**Gauss 超過程**) $(\phi(f), f\in\mathscr{E})$ が確率空間 $(\mathscr{Q},\Sigma,\mu)$ 上の $\mathscr{E}$ を指数に持つ Gauss 超過程であるとは次を満たすことである．

(1) $\phi(f):\mathscr{Q}\to\mathbb{R}$ は $(\mathscr{Q},\Sigma,\mu)$ 上の Gauss 過程で平均ゼロ, 共分散が $\mathbb{E}_\mu[\phi(f)\phi(g)]=\frac{1}{2}(f,g)_{\mathscr{E}}$.

(2) $\phi(\alpha f+\beta g)=\alpha\phi(f)+\beta\phi(g)$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$.

(3) Σ は $\{\phi(f)\mid f\in\mathscr{E}\}$ を可測にする最小のシグマ代数.

Gauss 超過程の存在は知られている．$L^2(\mathscr{Q})=L^2(\mathscr{Q},\Sigma,\mu)$ とおく．いま, $\mathscr{E}$ を実 Hilbert 空間とする．$L^2(\mathscr{Q})$ と フォック空間 $\mathscr{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})$ はユニタリー同値になることが知られている．ここで $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$ は $\mathscr{E}$ の複素化である．$\hat{\omega}=\sqrt{-\Delta}$ とする．量子場の自由 Hamiltonian H_{f} は $H_{\mathrm{f}}\mathbb{1}=0$, $H_{\mathrm{f}}:\prod_{j=1}^n\phi(f_j):=\sum_{j=1}^n:\phi(f_1)\cdots\phi(\hat{\omega}f_j)\cdots\phi(f_n):$ で定義する．これは $\hat{\omega}$ のと第 2 量子化と呼ばれる．次に相互作用項を定義する．$\tilde{\varphi}=(\hat{\varphi}/\sqrt{\omega})^\vee$ とする．$L^2(\mathscr{Q})$ 上の作用素 H_{I} を次で定義する．

$$H_{\mathrm{I}}=\int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus}\phi(\tilde{\varphi}(\cdot-x))dx.$$

つまり $H_{\mathrm{I}}:F(x,\phi)\mapsto\phi(\tilde{\varphi}(\cdot-x))F(x,\phi)$ となるかけ算作用素. Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^d)\otimes L^2(Q)$ 上の Nelson Hamiltonian を

$$H=H_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}+H_{\mathrm{I}}\tag{2.1}$$

で定義する．H_{p} の作用する Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^d)$ を基底状態変換する．基底状態変換は $U_{\varphi_{\mathrm{p}}}:L^2(\mathbb{R}^d,d\mathsf{N}_0)\to L^2(\mathbb{R}^d,dx)$, $f\mapsto\varphi_{\mathrm{p}}f$ だった．$\mathsf{P}_0=\mathsf{N}_0\times\mu$ とおけば, これは $\mathbb{R}^d\otimes\mathscr{Q}$ 上の確率測度になる．簡単のために $L^2(\mathbb{R}^d\times\mathscr{Q},d\mathsf{P}_0)$ を $L^2(\mathsf{P}_0)$, $L^2(\mathbb{R}^d,d\mathsf{N}_0)$ を $L^2(\mathsf{N}_0)$ で表す．$L^2(\mathsf{P}_0)$ 上の Nelson Hamiltonian を

$$L=L_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}}+H_{\mathrm{I}}\tag{2.2}$$

で定義する．もちろん, H と L はユニタリー同値である．

半群 e^{-tH} の Feynman-Kac-Nelson(FKN) 型汎関数積分表示を求めよう．ここでは Brown 運動による構成と, $P(\phi)_1$ 過程による構成を紹介する．$\phi_{\mathrm{E}}(F)$ は $F\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1})$ を指数に持つ

$(\mathscr{Q}_\mathrm{E}, \Sigma_\mathrm{E}, \mu_\mathrm{E})$ 上の Gauss 超過程とする．構成の仕方は $\phi(f)$ と全く同じである．違うのは次元が $d+1$ 次元に変ったところだけである．これを Euclid 場という．$\mathrm{j}_t : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ で任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対して，$\mathrm{j}_s^* \mathrm{j}_t = e^{-|t-s|\hat{\omega}}$ となる等長作用素が存在する．$\mathrm{J}_t : L^2(\mathscr{Q}) \to L^2(\mathscr{Q}_\mathrm{E})$ を $\mathrm{J}_t \mathbb{1} = \mathbb{1}_\mathrm{E}$, $\mathrm{J}_t : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) := : \phi_\mathrm{E}(\mathrm{j}_t f_1) \cdots \phi_\mathrm{E}(\mathrm{j}_t f_n) :$ で定義する．恒等式 $\mathrm{j}_s^* \mathrm{j}_t = e^{-|t-s|\hat{\omega}}$ から $\mathrm{J}_t^* \mathrm{J}_s = e^{-|t-s|H_\mathrm{f}}$ が従う．$F, G \in L^2(\mathscr{Q})$ とし $t \geq 0$ とする．このとき $(F, e^{-tH_\mathrm{f}} G)_{L^2(\mathscr{Q})} = (\mathrm{J}_0 F, \mathrm{J}_t G)_{L^2(\mathscr{Q}_\mathrm{E})}$ となる．

定理 2.2 (**Brown 運動による** FKN **型汎関数積分表示**) $F, G \in L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathscr{Q})$ とする．このとき，

$$(F, e^{-tH} G)_{L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathscr{Q})} = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\int_0^t V(B_s) ds} \left(\mathrm{J}_0 F(B_0), e^{-\phi_\mathrm{E}\left(\int_0^t \mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s) ds\right)} \mathrm{J}_t G(B_t) \right) \right].$$

ここで $F, G \in L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathscr{Q})$ は $L^2(\mathscr{Q}_\mathrm{E})$ 値 L^2 関数とみなされている．

($P(\phi)_1$ **過程による** FKN **型汎関数積分表示**) $F, G \in L^2(\mathsf{P}_0)$ とする．このとき，

$$(F, e^{-tL} G)_{L^2(\mathsf{P}_0)} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[\left(\mathrm{J}_0 F(X_0), e^{-\phi_\mathrm{E}\left(\int_0^t \mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - X_s) ds\right)} \mathrm{J}_t G(X_t) \right) \right].$$

L の固有ベクトルを解析するために，FKN 型汎関数積分表示を使う．L が至るところ正な基底状態 Ψ_g を一意的にもつと仮定する．このとき $\|e^{-TL}\mathbb{1}\|^{-1} e^{-TL}\mathbb{1} \to \Psi_\mathrm{g}$ $(T \to \infty)$．ここで $\mathbb{1} \in L^2(\mathsf{P}_0)$．よって Ψ_g の性質を調べる処方箋の一つが $\Psi_\mathrm{g}^T = \|e^{-TL}\mathbb{1}\|^{-1} e^{-TL}\mathbb{1}$ の極限の解析である．

系 2.3 (**Brown 運動による真空期待値**) $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき $T > 0$ に対して

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-TH} g \otimes \mathbb{1})_{L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathscr{Q})} = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\int_0^T V(B_s) ds} \overline{f(B_0)} g(B_T) e^{\frac{1}{2} \int_0^T ds \int_0^T dt W(B_s - B_t, s-t)} \right].$$

($P(\phi)_1$ **過程による真空期待値**)

$$\left(\mathbb{1}, e^{-TL}\mathbb{1}\right)_{L^2(\mathsf{P}_0)} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[e^{\frac{1}{2} \int_0^T ds \int_0^T dt W(X_s - X_t, s-t)} \right].$$

ここで

$$W(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)} e^{-ik \cdot x} e^{-\omega(k)|t|} dk. \tag{2.3}$$

(2.3) は Nelson 模型に付随するペアポテンシャルといわれ，$\int_0^T ds \int_0^T dt W(X_s - X_t, s-t)$ はペア相互作用と言われる．Ψ_g^T は $T \to \infty$ で形式的に基底状態に収束するように見える．そこで

$$\gamma(T) = (\mathbb{1}, \Psi_\mathrm{g}^T)^2 = \frac{(\mathbb{1}, e^{-TL}\mathbb{1})^2}{(\mathbb{1}, e^{-2TL}\mathbb{1})} \tag{2.4}$$

とする．次の命題は基底状態の存在・非存在を示すときに有用である．

命題 2.4 (**基底状態の存在・非存在の必要十分条件**) $\lim_{T \to \infty} \gamma(T) = a$ とする．$a > 0$ ならば H の基底状態は存在し，$a = 0$ なら基底状態は存在しない．

$P(\phi)_1$ 過程 $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ の性質から

$$
\begin{aligned}
\gamma(T) &= \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T ds\int_0^T dtW(X_s-X_t,s-t)}\right]\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{\frac{1}{2}\int_{-T}^0 ds\int_{-T}^0 dtW(X_s-X_t,s-t)}\right]}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{\frac{1}{2}\int_{-T}^T ds\int_{-T}^T dtW(X_s-X_t,s-t)}\right]} \\
&= \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{\frac{1}{2}\int_{-T}^T ds\int_{-T}^T dtW(X_s-X_t,s-t)}e^{-\int_{-T}^0 ds\int_0^T dtW(X_s-X_t,s-t)}\right]}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}\left[e^{\frac{1}{2}\int_{-T}^T ds\int_{-T}^T dtW(X_s-X_t,s-t)}\right]} \\
&= \mathbb{E}_{\mathcal{N}_T}[e^{-\int_{-T}^0 ds\int_0^T dtW(X_s-X_t,s-t)}]
\end{aligned}
$$

となる．$\mathcal{N}_T$ は有限体積 Gibbs 測度と言われる．これを上下から評価して基底状態の存在・非存在を示す．量子論では素粒子は点と考えられるので，$\varphi(x)=\delta(x)$ とみなされる．これは $\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat\varphi(k)|^2}{\omega(k)}dk=\infty$, $(\hat\varphi(k)=(2\pi)^{-d/2})$ を意味する．これを紫外発散という．数学的に厳密に H を定義するためには $\hat\varphi$ に $\|\hat\varphi/\sqrt{\omega}\|<\infty$ なる条件を取りあえず仮定する必要がある．その結果 H_{I} が $\mathscr{F}$ 上の作用素として意味をもつ．もう一つの発散が赤外発散である．$\hat\varphi(k)=(2\pi)^{-d/2}$ $(|k|<\varepsilon)$ としよう．この場合 $\int_{|k|<\varepsilon}\frac{|\hat\varphi(k)|^2}{\omega(k)^3}dk=\infty$, $(d\le 3)$ となる．これを赤外発散という．基底状態の存在・非存在の議論で最も重要な記号

$$I_{\mathrm{IR}}=\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat\varphi(k)|^2}{\omega(k)^3}dk \tag{2.5}$$

を導入する．物理的な理解では H の基底状態 Ψ_{g} のボゾン数の期待値は $(\Psi_{\mathrm{g}},N\Psi_{\mathrm{g}})\approx I_{\mathrm{IR}}$ のように予想され，$I_{\mathrm{IR}}<\infty$ のときは，基底状態が存在し，一方 $I_{\mathrm{IR}}=\infty$ のときは，基底状態に運動量の小さなボゾンが沢山まとわりつき，結局 H の 基底状態が存在しないと考えられている．$I_{\mathrm{IR}}<\infty$ を赤外正則条件といい，$I_{\mathrm{IR}}=\infty$ を赤外特異条件という．Σ_{p} を H_{p} の本質的スペクトルの下限とする．

定理 2.5 (**基底状態の存在**) [Spo98] $I_{\mathrm{IR}}<\infty$ を仮定し，$\Sigma_{\mathrm{p}}-E_{\mathrm{p}}>\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat\varphi(k)|^2}{2\omega(k)^2}\frac{|k|^2}{2\omega(k)+|k|^2}dk$ とする．このとき H の基底状態が存在する．特に，$\hat\varphi(k)=g\mathbb{1}_{\{\kappa<|k|<\Lambda\}}$ で $g\in\mathbb{R}$ と仮定し，$\sigma(H_{\mathrm{p}})$ は離散固有値だけからなるとき，任意の $g\in\mathbb{R}$ に対して，H は一意的な基底状態をつ．

赤外正則条件 $I_{\mathrm{IR}}<\infty$ で H の基底状態は存在したが，これから述べる定理 2.6 の条件下では赤外特異条件 $I_{\mathrm{IR}}=\infty$ が成立する．

定理 2.6 (**基底状態の非存在**) [LMS02] $d=3$, $\varphi\ge 0$ $(\varphi\not\equiv 0)$ とし $V(x)\ge C|x|^{2\beta}$, $\beta>0$, とする．このとき H の基底状態は存在しない．

Nelson 模型の基底状態の存在・非存在は [Ara01, AHH99, BFS98, DG04, Ger00, Hir03, HHS05, HS08, HS15, Sas05] にある．

2.2 時間的に不変な Lorentz 多様体上の Nelson 模型

時間的に不変な Lorentz 多様体上に Nelson Hamiltonian を定義できる．このとき, 粒子部分 H_{p} は $-\sum_{i,j=1}^{3}\frac{1}{c(x)}\partial_i A^{ij}(x)\partial_j\frac{1}{c(x)}+V$ に置換えられ, dispersion relation は

$$\omega=\sqrt{-\Delta}\to\left(-\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i a^{ij}(x)\partial_j+m^2(x)\right)^{1/2} \tag{2.6}$$

に置換えて定義される．重要なことは変数質量 $m(x)$ が (2.6) に自然に現れることである．$v_m=m^2$ の減衰性の速さで基底状態の存在・非存在を特徴づけることが出来る．実際, これから見るように $m(x)\geq C\langle x\rangle^{-1}$ のとき基底状態が存在し, $m(x)\leq C\langle x\rangle^{-a}$, $a>1$, のとき基底状態は存在しないことが示せる．つまり, ゆっくり減衰すれば基底状態が存在し, 十分速く減衰すれば基底状態が存在しないことになる．その境界のオーダーが $|x|^{-1}$ である．場の量子論では dispersion relation $\omega=\sqrt{-\Delta+m^2}$ はクライン・ゴルドン方程式 $(\Box+m^2)\phi(t,x)=0$ から導かれる．これを Lorentz 多様体上のクライン・ゴルドン 方程式へ拡張する．$\underline{x}=(t,x)=(x^0,x)=(x^0,x^1,x^2,x^3)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^3$ とする．$g=(g_{\mu\nu})$, $\mu,\nu=0,1,2,3$, は $\mathbb{R}^4$ 上の計量で次を満たす．(1) $g_{\mu\nu}(\underline{x})=g_{\mu\nu}(x)$, i.e., 時間 t によらない, (2) $g_{0j}(\underline{x})=g_{j0}(\underline{x})=0$, $j=1,2,3$, (3) $g_{ij}(\underline{x})=-\gamma_{ij}(x)$．ここで $\gamma=(\gamma_{ij})$ は 3 次元リーマン計量．つまり $g=\begin{pmatrix}g_{00}&0\\0&-\gamma\end{pmatrix}$．$\mathscr{M}=(\mathbb{R}^4,g)$ を計量 テンソル g の時間的に不変な Lorentz 多様体としよう．$g^{-1}=(g^{\mu\nu})$ を g の逆とする．特に $1/g_{00}=g^{00}$．また γ の逆を $\gamma^{-1}=(\gamma^{ij})$ で表す．そうすると Lorentz 多様体 $\mathscr{M}$ 上のクライン・ゴルドン方程式は

$$\Box_g\phi+(m^2+\eta\mathcal{R})\phi=0 \tag{2.7}$$

となる．ここで, η は定数, $\mathcal{R}$ は $\mathscr{M}$ のスカラー曲率, そして $\Box_g$ は, g から決まるダランベルシアンで次で与えられる．

$$\Box_g=\sum_{\mu,\nu=0}^{3}\frac{1}{\sqrt{|\mathrm{det}g|}}\partial_\mu g^{\mu\nu}\sqrt{|\mathrm{det}g|}\partial_\nu. \tag{2.8}$$

$g_{00}(x)>0$ と仮定する．このとき (2.7) は $\partial^2\phi/\partial t^2=K\phi$ と表すことが出来る．ここで

$$K=g_{00}\left(\frac{1}{\sqrt{|\mathrm{det}g|}}\sum_{i,j=1}^{3}\partial_j\sqrt{|\mathrm{det}g|}\gamma^{ji}\partial_i-m^2-\eta\mathcal{R}\right). \tag{2.9}$$

作用素 K は重み付き空間 $L^2(\mathbb{R}^3,\rho(x)dx)$ 上で対称である．ここで $\rho=\frac{\sqrt{|\mathrm{det}g|}}{g_{00}}=g_{00}^{-1/2}\sqrt{|\mathrm{det}\gamma|}$. K を $L^2(\mathbb{R}^3;\rho(x)dx)$ 上の作用素から $L^2(\mathbb{R}^3;dx)$ 上の作用素へユニタリー変換しよう．ユニタリー $U:L^2(\mathbb{R}^3;\rho(x)dx)\to L^2(\mathbb{R}^3;dx)$ を $Uf=\rho^{1/2}f$ で定める．$\rho_i=\partial_i\rho$, $\partial_i\partial_j\rho=\rho_{ij}$ とおく．さらに $\alpha^{ij}=g_{00}\gamma^{ij}$, $\partial_k\alpha^{ij}=\alpha_k^{ij}$．計算すると $V_2=\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{3}\left(2\alpha_i^{ij}\frac{\rho_j}{\rho}+2\alpha^{ij}\frac{\rho_{ij}}{\rho}-\alpha^{ij}\frac{\rho_i}{\rho}\frac{\rho_j}{\rho}\right)$,

$$v=g_{00}(m^2+\eta\mathcal{R})+V_2 \tag{2.10}$$

とおくと, $UKU^{-1}=\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i g_{00}\gamma^{ij}\partial_j-v$ となる．これから $\partial^2\phi/\partial t^2=K\phi$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の次の方程式 $\partial^2\phi/\partial t^2=\left(\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i g_{00}\gamma^{ij}\partial_j-v\right)\phi$ に変換される．よって時間的に安定な Lorentz 多様体上の dispersion relation は $\hat{\omega}=\left(-\sum_{i,j=1}^{3}\partial_i g_{00}\gamma^{ij}\partial_j+v\right)^{1/2}$ となる．

	$m(x) \geq a\langle x\rangle^{-1}$	$m(x) \leq a\langle x\rangle^{-\beta}$, $\beta > 1$
基底状態	存在	非存在

図 1: 基底状態の存在と非存在

例えば

$$g(\underline{x}) = g(x) = (g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} e^{-\theta(x)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\theta(x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-\theta(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-\theta(x)} \end{pmatrix} \tag{2.11}$$

としよう．この計量から決まるスカラー曲率は $\mathscr{R} = e^{\theta}(-6\Delta\theta + \frac{11}{4}|\nabla\theta|^2)$ となるから, θ に条件をつければ v の減衰の程度を知ることができる．時間不変な Lorentz 多様体 $(\mathbb{R}^4, g)$ 上の Nelson 模型を次で定義する．

$$H_g = K \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}} + H_{\mathrm{I}}. \tag{2.12}$$

ここで $K = -\sum_{i,j=1}^3 \partial_i A^{ij} \partial_j + V$. $\hat{\omega} = \left(-\sum_{i,j=1}^3 c(x)^{-1}\partial_i a^{ij}(x)\partial_j c(x)^{-1} + m^2(x)\right)^{1/2}$ で定義され, スカラー場 は $H_{\mathrm{I}} = \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \phi(x)dx$ で $\phi(x) = \phi((\hat{\omega}^{-1/2}\varphi)(\cdot - X))$ で与えられる．定義を見ればわかるように, $\hat{\omega}$ が複雑な擬微分作用素なため, 解析は技術的に困難であろうことが予想される．

基底状態の存在を示すために次の条件を導入する．基本的に $[a^{ij}]$, $[A^{ij}]$ は楕円的で, V は十分早く増加することが本質的である．

定理 2.7 (**基底状態の存在**) [GHPS11] 次を満たす $C_0 > 0, C_1 > 0$, $\delta > 0$, が存在すると仮定する．

$$\begin{aligned}
&(1) C_0\mathbb{1} \leq \left[a^{ij}(x)\right] \leq C_1\mathbb{1}, \quad (2)\partial^{\alpha} a^{ij}(x) \in O(\langle x\rangle^{-1}), \quad |\alpha| \leq 1, \\
&(3) C_0 \leq c(x) \leq C_1, \quad \partial^{\alpha} c(x) \in O(1), \quad |\alpha| \leq 2, \quad (4)\partial^{\alpha} m(x) \in O(1), \quad |\alpha| \leq 1, \\
&(5) C_0\mathbb{1} \leq \left[A^{ij}(X)\right] \leq C_1\mathbb{1}, \quad (6) V(X) \geq C_0\langle X\rangle^{2\delta} - C_1.
\end{aligned}$$

このとき $m(x) \geq a\langle x\rangle^{-1}$ $(a > 0)$, かつ $\delta > 3/2$ ならば H は基底状態をもつ．

次に基底状態の非存在を示す．

定理 2.8 (**基底状態の非存在**) [GHPS09, GHPS12a] $\varphi > 0$ とする．$m(x) \leq a\langle x\rangle^{-1-\epsilon}$ $(\epsilon > 0)$ と $\delta > 0$ を仮定する．このとき H_g の基底状態は存在しない．

証明: Nelson 模型と同様の方針で証明する．$a = \lim_{T\to\infty} \gamma(T)$ とする．$a = 0$ を示せばいい．

$$a = \lim_{T\to\infty} \frac{\mathbb{E}\left[e^{\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} - 2\int_{-T}^{0}\int_{0}^{T} W_g}\right]}{\mathbb{E}\left[e^{\int_{-T}^{T}\int_{-T}^{T} W_g}\right]} = \lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_{\mu_T}\left[e^{-2\int_{-T}^{0}\int_{0}^{T} W_g}\right]$$

が示される. $\hat{\omega}$ が擬微分作用素なので, W_g を具体的に書き表すことができない. しかし, 次によって, 評価を Nelson 模型に還元することができる. 定数 $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ で次を満たすものが存在する.

$$C_1 e^{-C_2 t\hat{\omega}_\infty^2}(x,y) \le e^{-t\hat{\omega}^2}(x,y) \le C_3 e^{-C_4 t\hat{\omega}_\infty^2}(x,y). \tag{2.13}$$

ここで $\hat{\omega}_\infty^2 = -\Delta$. Nelson 模型に付随したペアポテンシャル W で

$$C_1 W(x-y, C_2|t|) \le W_g(x,y,|t|) \le C_3 W(x-y, C_4|t|) \tag{2.14}$$

となるから, W_g の評価を W の評価へ帰着できることになる. □

2.3 マルチンゲール性と固有ベクトルの空間的減衰性

$H\Phi = E\Phi$ としよう.

$$X_t(x) = e^{tE} e^{-\int_0^t V(B_r+x)dr} e^{\phi_{\mathrm{E}}(\int_0^t \mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - x - B_r)dr)} \mathrm{J}_t \Phi(B_t + x)$$

とする. $(X_t(x))_{t\ge 0}$ は $(\mathscr{X} \times \mathscr{Q}_{\mathrm{E}}, \mathcal{B} \times \Sigma_{\mathrm{E}}, W \times \mu_{\mathrm{E}})$ 上の確率過程である. 任意の t に対して

$$(\Psi, \Phi) = (\Psi, e^{-t(H-E)}\Phi) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}[\bar{\Psi}(x) \mathbb{E}_W^0[\mathrm{J}_0^* X_t(x)]]$$

となる. つまり $\Phi(x) = \mathbb{E}_W^0[\mathrm{J}_0^* X_t(x)]$ が成り立つ. $\mathcal{M}_t = \mathcal{B}_t \times \Sigma_{(-\infty,t]}$, $t \ge 0$, と定義する. ここで, $\mathcal{B}_t$ は Brown 運動の自然なフィルトレーション, $\Sigma_{(-\infty,t]}$ は $\phi_E(j_s f)$, $s \le t$, から生成されるフィルトレーションである.

定理 2.9 (**マルチンゲール性**) [Hir14a] $(X_t(x))_{t\ge 0}$ は $(\mathcal{M}_t)_{t\ge 0}$ に関してマルチンゲールである.

さて, τ を $\mathcal{M}_t$ に関する停止時刻とする. このとき, 一般に $X_{t\wedge\tau}(x)$ もマルチンゲールになり, 特に $\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}} \mathbb{E}_W^0[X_t(x)] = \mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}} \mathbb{E}_W^0[X_{t\wedge\tau}(x)]$ となる. 適当な停止時刻 τ を選ぶことにより次が示せる.

定理 2.10 (**固有ベクトルの空間的減衰性**) [HIL13, Hir14a] $H\Phi = E\Phi$ とする. 次の (1) または (2) を仮定する. (1) $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty$, (2) $\lim_{|x|\to\infty} V_-(x) + E + \dfrac{1}{2}\|\hat{\varphi}/\omega\|^2 = a < 0$. このとき $\|\Phi(x)\|_{L^2(\mathscr{Q})} \le Ce^{-c|x|}$ となる定数 $C > 0$, $c > 0$ が存在する.

2.4 Gibbs 測度による基底状態に関する期待値

Nelson 模型の Brown 運動による FKN 型汎関数積分表示の被積分関数から, 自然に $Q_{[-t,t]}$ を次のように定義する. $Q_{[-t,t]} = \mathrm{J}_{-t}^* e^{-\phi_{\mathrm{E}}(\int_{-t}^t \mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s)ds)} \mathrm{J}_t e^{-\int_{-t}^t V(B_s)ds}$. そうすると, $Q_{[-t,t]} : L^2(\mathscr{Q}) \to L^2(\mathscr{Q})$ は有界作用素になる. 実際 $\|Q_{[-t,t]}\| \le e^{t\|\hat{\varphi}/\omega\|^2} e^{-\int_{-t}^t V(B_s)ds}$ となる. $\xi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\xi \ge 0$, に対して $\mathscr{L}_T = \xi(B_{-T}) Q_{[-T,T]} \xi(B_T)$ とおく. $\tilde{\mathscr{X}} = C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ とする. 可測空間 $(\tilde{\mathscr{X}}, \tilde{\mathcal{B}})$ 上の測度

$$\mu_T : A \mapsto \mu_T(A) = \frac{1}{Z_T} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x[\mathbb{E}_{\mu_E}[\mathbb{1}_A \mathscr{L}_T]] = \frac{1}{Z_T} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_W^x[1_A e^{\frac{1}{2}\int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds W} e^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}] \tag{2.15}$$

の $T \to \infty$ の収束について考える．$\mathcal{B}_{[-t,t]} = \sigma(B_s; s \in [-t,t])$ とする．$\mathscr{G}_T = \bigcup_{0\le t\le T} \mathcal{B}_{[-t,t]}$ と $\mathscr{G} = \mathscr{G}_\infty = \bigcup_{0\le t} \mathcal{B}_{[-t,t]}$ は有限加法的集合族である．μ_T が $(\tilde{\mathscr{X}}, \sigma(\mathscr{G}))$ 上の確率測度 μ_∞ に局所弱収束することを示す．

定義 2.11 (**局所弱収束**) 任意の t を固定する．このとき任意の $A \in \mathcal{B}_{[-t,t]}$ に対して $\lim_{T\to\infty} \mu_T(A) = \mu_\infty(A)$ となるとき, 確率測度 μ_T は 確率測度 μ_∞ に局所弱収束するという．

以下では, 赤外正則条件 $I_{\mathrm{IR}} < \infty$ を仮定し, H の基底状態 Ψ_{g} が存在するとする．加法的集合関数 $\rho_T : \mathscr{G}_T \to \mathbb{R}$ と $\mu : \mathscr{G} \to \mathbb{R}$ を

$$\rho_T(A) = e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\mathbb{1}_A \cdot \left(\frac{\xi^{T-t}(B_{-t})}{\|\xi^T\|}, Q_{[-t,t]} \frac{\xi^{T-t}(B_t)}{\|\xi^T\|} \right) \right], \quad A \in \mathcal{B}_{[-t,t]}$$
$$\mu(A) = e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\mathbb{1}_A \cdot (\Psi_{\mathrm{g}}(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \Psi_{\mathrm{g}}(B_t)) \right], \quad A \in \mathcal{B}_{[-t,t]}$$

で定義する．ここで $\xi^T = e^{-T(H-E)} \xi \otimes \mathbb{1}$.

定理 2.12 (**Gibbs 測度の存在**) [HHL14, Hir14a] 確率測度 μ_T は μ_∞ へ局所弱収束する．i.e., $\mu_T(A) \to \mu_\infty(A)$ $(T \to \infty)$ が $A \in \mathscr{G}$ に対して成立する．また μ_∞ は ξ の選び方によらない．

μ_∞ を, ペアポテンシャル W, ポテンシャル V に対する Gibbs 測度という．証明の概略を述べる．

(1) 有限加法的集合関数 ρ_T の $(\tilde{\mathscr{X}}, \sigma(\mathscr{G}_T))$ 上の確率測度 への拡張を $\bar{\rho}_T$ とする．

(2) 汎関数積分をもちいて $\bar{\rho}_T(A) = \rho_T(A) = \mu_T(A)$ を $A \in \mathscr{G}_t$ $(t \le T)$ に対して示す．

(3) 有限加法的集合関数 μ の $(\tilde{\mathscr{X}}, \sigma(\mathscr{G}))$ 上の確率測度への拡張を μ_∞ とかく．

(4) Ψ_{g}^T が Ψ_{g} へ強収束するという事実から $\rho_T(A) \to \mu(A)$ $(T \to \infty)$ を $A \in \mathscr{G}$ に対して示す．これは $\mu_T(A) \to \mu(A)$ を意味する．

(5) $\mu(A) = \mu_\infty(A)$ $(A \in \mathscr{G})$ なので, μ_T は μ_∞ へ局所弱収束することがわかる．

オブザーバブル O の期待値 $(\Psi_{\mathrm{g}}, O\Psi_{\mathrm{g}})$ を Gibbs 測度 μ_∞ をもちいて表すことができる．ここでは重要な例として $O = e^{+\beta N}$, $O = e^{\phi(f)^2}$ の期待値を Gibbs 測度で表す．

系 2.13 $f_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, $j = 0, ..., n$, は有界関数とする．このとき

$$\mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[\prod_{j=0}^n f_j(B_{t_j}) \right] = (\Psi_{\mathrm{g}}, f_0 e^{-(t_1-t_0)(H-E)} f_1 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})(H-E)} f_n \Psi_{\mathrm{g}}). \tag{2.16}$$

特に任意の有界関数 f, g に対して $\mathbb{E}_{\mu_\infty}[f(B_t)g(B_s)] = (f\Psi_{\mathrm{g}}, e^{-|t-s|(H-E)} g\Psi_{\mathrm{g}})$.

定理 2.14 [HHL14, Hir14a] $I_{\rm IR}<\infty$ とする．$f\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, $\beta\in\mathbb{R}$ としよう．このとき

$$\lim_{T\to\infty}\frac{(e^{-TH}\xi\otimes 1\!\!1, e^{i\beta\phi(f)}e^{-TH}\xi\otimes 1\!\!1)}{(e^{-TH}\xi\otimes 1\!\!1, e^{-TH}\xi\otimes 1\!\!1)}=(\Psi_{\rm g}, e^{i\beta\phi(f)}\Psi_{\rm g})=e^{-\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2}\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{i\beta K(f)}\right]. \tag{2.17}$$

ここで $K(f)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty(e^{-|r|\omega}e^{-ikB_r}\hat\varphi/\sqrt{\omega},\hat f)dr$ は $(\tilde{\mathscr{X}},\sigma(\mathcal{B}))$ 上の確率変数である．

調和振動子の任意の固有ベクトル f は $e^{-|x|^2/2}$ のオーダーで減衰することは, 固有ベクトルがエルミート多項式 $\times e^{-|x|^2/2}$ で与えられることから分かる．さらに, $\lim_{\beta\uparrow 1}\|e^{(\beta/2)|x|^2}f\|=\infty$ になる．Nelson Hamiltonian の固有ベクトルも同様に Gauss 型に減衰することが予想される．

定理 2.15 (**Gaussian domination**) [HHL14, Hir14a] $I_{\rm IR}<\infty$ とする．$f\in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ とし, $|\beta|<1/\|f\|^2$ とする．このとき $\Psi_{\rm g}\in D(e^{(\beta/2)\phi(f)^2})$ かつ

$$\|e^{(\beta/2)\phi(f)^2}\Psi_{\rm g}\|^2=\frac{1}{\sqrt{1-\beta\|f\|^2}}\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{\frac{\beta K^2(f)}{1-\beta\|f\|^2}}\right]. \tag{2.18}$$

特に $\displaystyle\lim_{\beta\uparrow 1/\|f\|^2}\|e^{(\beta/2)\phi(f)^2}\Psi_{\rm g}\|=\infty$.

定理 2.16 (**第 2 量子化作用素の期待値**) $\rho\geq 0$ を可測関数とする．$\hat\rho=\rho(-i\nabla)$ とする．任意の $\beta>0$ に対して

$$\lim_{T\to\infty}\frac{(e^{-TH}\xi\otimes 1\!\!1, e^{-\beta d\Gamma(\hat\rho)}e^{-TH}\xi\otimes 1\!\!1)}{(e^{-TH}\xi\otimes 1\!\!1, e^{-TH}\xi\otimes 1\!\!1)}=(\Psi_{\rm g}, e^{-\beta d\Gamma(\hat\rho)}\Psi_{\rm g})=\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-W_\infty^{\rho,\beta}}\right]$$

が成り立つ. ここで

$$W_\infty^{\rho,\beta}=\int_{-\infty}^0 dt\int_0^\infty W^{\rho,\beta}(B_t-B_s,t-s)ds$$
$$W^{\rho,\beta}(x-y,T)=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat\varphi(k)|^2}{\omega(k)}e^{-|T|\omega(k)}e^{-ik(x-y)}(1-e^{-\beta\rho(k)})dk.$$

$|W_\infty^{\rho,\beta}|\leq I_{\rm IR}/2<\infty$ がパスに一様に成立することに注意しよう．これから $\rho=1\!\!1$ として, 個数作用素 $N=d\Gamma(1\!\!1)$ について考察すると $W_\infty^{\rho,\beta}=(1-e^{-\beta})W_\infty$ になる．ここで, $W_\infty=\int_{-\infty}^0 dt\int_0^\infty W(B_t-B_s,t-s)ds$.

系 2.17 基底状態が規格化されているとする, i.e., $\|\Psi_{\rm g}\|=1$.

(**ボゾン数の指数減衰性**) [BHLMS02] $\beta\in\mathbb{C}$ に対して $(\Psi_{\rm g}, e^{\beta N}\Psi_{\rm g})=\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-(1-e^\beta)W_\infty}\right]$ が成立する．特に $\Psi_{\rm g}\in D(e^{+\beta N})$ が全ての $\beta>0$ で成り立つ.

(**ボゾン数の評価**) [BHLMS02] $I_{\rm IR}$ に依らない定数 C が存在して次の不等式が成立する.

$$\frac{1}{2}I_{\rm IR}-C\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat\varphi(k)|^2}{\omega(k)^3}|k|^2dk\leq(\Psi_{\rm g}, N\Psi_{\rm g})\leq\frac{1}{2}I_{\rm IR} \tag{2.19}$$

(**赤外発散とボゾン数の発散**)　$d=3$, $I_{\rm IR}=\displaystyle\int_{\lambda<|k|<\Lambda}\frac{dk}{\omega(k)^3}$ のとき $\displaystyle\lim_{\lambda\to 0}(\Psi_{\rm g},N\Psi_{\rm g})=\infty$.

(**Fractional case**)　[HLT12] $m\geq 1$ は整数, $0<\alpha<1$ とする．このとき

$$(\Psi_{\rm g},N^{m+\alpha}\Psi_{\rm g})=(-1)^m\int_0^\infty(\rho^{(m)}(0)-\rho^{(m)}(\beta))d\lambda(\beta)$$

となる．ここで, $\rho(\beta)=(\Psi_{\rm g},e^{-\beta N}\Psi_{\rm g})$ で, $\lambda(d\beta)$ は Bernstein 関数 u^α に対応する Lévy 測度で $\lambda(d\beta)=c/\beta^{1+\alpha}d\beta$ という形をしている．

(**Fractional case**)　[HLT12] $\mathbb{R}\ni k\geq 1$ のとき $(I_{\rm IR}/2-a)^k\leq(\Psi_{\rm g},N^k\Psi_{\rm g})=(I_{\rm IR}/2)^k$. ここで $a=C\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}\frac{|\hat\varphi(k)|^2}{\omega(k)^3}|k|^2dk$ で定数 C は (2.19) の定数．特に, $\displaystyle\lim_{\lambda\to 0}\frac{(\Psi_{\rm g},N^k\Psi_{\rm g})}{(I_{\rm IR}/2)^k}=1$.

2.5　紫外切断のくりこみ理論

次元を $d=3$ として, N-粒子 Nelson 模型を考える．それは $H=H_{\rm p}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\rm f}+gH_{\rm I}$ で与えられる, Hilbert 空間 $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R}^{3N})\otimes L^2(\mathscr{Q})$ 上の自己共役作用素である．ここで結合定数 g を導入した．N-粒子 Schrödinger 作用素は $H_{\rm p}=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\Delta_j+V$ で与えられる．相互作用項は $H_{\rm I}(x)=\sum_{j=1}^N\int_{\mathbb{R}^{dN}}^{\oplus}\phi(\tilde\varphi(\cdot-x_j)dx$ と定義される．以下では $\hat\varphi\to\mathbb{1}$ の極限を考える．つまり $\varphi(x)\to(2\pi)^{3/2}\delta(x)$. 簡単のために $V=0$ と仮定をする．切断関数 $\hat\varphi_\varepsilon(k)=e^{-\varepsilon|k|^2/2}\mathbb{1}_{|k|>\lambda}$, $\varepsilon\geq 0$, を考えよう．$\lambda>0$ は赤外切断を表す．正則化された Hamiltonian を

$$H_\varepsilon=H_{\rm p}\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\rm f}+gH_{\rm I}^\varepsilon,\quad \varepsilon>0,$$

で定義する．

$$E_\varepsilon=-\frac{g^2}{2}N\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_{|k|>\lambda}dk$$

としよう．ここで $\beta(k)=\frac{1}{\omega(k)+|k|^2/2}$. $E_\varepsilon\to-\infty$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ に注意せよ．

定理 2.18 (**UV くりこみ**) [Nel64a, Nel64b, GHL13] 次を満たす下から有界な自己共役作用素 $H_{\rm ren}$ が存在する．

$$\mathrm{s}-\lim_{\varepsilon\downarrow 0}e^{-t(H_\varepsilon-E_\varepsilon)}=e^{-tH_{\rm ren}},\quad t\geq 0.$$

この定理を汎関数積分をつかって証明する．ここから $(B_t)_{t\in\mathbb{R}}$ は $\mathbb{R}$ 上の $3N$ 次元の Brown 運動を表すとする．$f,h\in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ としよう．このとき

$$(f\otimes\mathbb{1},e^{-2TH_\varepsilon}h\otimes\mathbb{1})=\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\mathbb{E}_W^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon}\right].$$

ここで

$$S_\varepsilon=\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_{-T}^T dtW_\varepsilon(B_t^i-B_s^j,t-s)$$

はペア相互作用でペアポテンシャルは

$$W_\varepsilon(x,t)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2\omega(k)}e^{-\varepsilon|k|^2}e^{-ik\cdot x}e^{-\omega(k)|t|}\mathbb{1}_{|k|>\lambda}dk,\quad \varepsilon\ge 0. \tag{2.20}$$

$(x,t)\neq(0,0)$ で $W_\varepsilon(x,t)$ は滑らかで, $W_\varepsilon(x,t)\to W_0(x,t)$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ が成り立つ. しかし $W_\varepsilon(0,0)\to\infty$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ で, $W_0(x,t)$ は $(0,0)$ で特異性をもつ. つまり S_ε は $\varepsilon=0$ のとき対角成分に特異性が現れる. これを取り除きたいのだが, もちろん $\mathbb{R}^2$ において, 対角成分の測度はゼロなので, ここにジレンマが生まれる. アイデアは Itô の公式をつかって, 対角成分を引き出すことである. 次の関数を考えよう.

$$\varrho_\varepsilon(x,t)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\varepsilon|k|^2}e^{-ik\cdot x-\omega(k)|t|}}{2\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_{|k|>\lambda}dk,\quad \varepsilon\ge 0.$$

そうすると $\varrho_\varepsilon(0,0)\to-\infty$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ がわかる. $T>0$ を固定する. また $0<\tau\le T$ を固定し, $[t]_T=-T\vee t\wedge T$ としよう. 正則化された相互作用を対角成分と非対角成分にわける: $S_\varepsilon=S_\varepsilon^{\rm D}+S_\varepsilon^{\rm OD}$. ここで

$$S_\varepsilon^{\rm D}=2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_s^{[s+\tau]_T}dt\,W_\varepsilon(B_t^i-B_s^j,t-s),\quad S_\varepsilon^{\rm OD}=2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_{[s+\tau]_T}^T dtW_\varepsilon(B_t^i-B_s^j,t-s).$$

$S_\varepsilon^{\rm D}$ は S_ε を対角成分の近傍 $\{(t,t)\in\mathbb{R}^2||t|\le T\}$ で積分したもの, そして $S_\varepsilon^{\rm OD}$ はそれ以外の部分を表す. $\tau=T$ のときは $S_\varepsilon^{\rm OD}=0$ となる. $\varepsilon>0$ ならば, Itô の公式から

$$\begin{aligned}S_\varepsilon^{\rm D}&=2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varrho_\varepsilon(B_s^i-B_s^j,0)ds-2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varrho_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i-B_s^j,[s+\tau]_T-s)ds\\&\quad+2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_s^{[s+\tau]_T}\nabla\varrho_\varepsilon(B_t^i-B_s^j,t-s)\cdot dB_t^i.\end{aligned}\tag{2.21}$$

(2.21) の右辺第一項の $i=j$ の部分 $=4NT\varrho_\varepsilon(0,0)$ がまさに発散項になっているので, くりこまれた作用を $S_\varepsilon^{\rm ren}=S_\varepsilon-4NT\varrho_\varepsilon(0,0)$, $\varepsilon>0$ のように定義することが示唆される. これは $S_\varepsilon^{\rm ren}=S_\varepsilon^{\rm OD}+X_\varepsilon+Y_\varepsilon+Z_\varepsilon$ のように表せる. ここで

$$X_\varepsilon=2\sum_{i\neq j}^N\int_{-T}^T\varrho_\varepsilon(B_s^i-B_s^j,0)ds,\quad Y_\varepsilon=2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_s^{[s+\tau]_T}\nabla\varrho_\varepsilon(B_t^i-B_s^j,t-s)\cdot dB_t,$$

$$Z_\varepsilon=-2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varrho_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i-B_s^j,[s+\tau]_T-s)ds.$$

一番やっかいなのは Y_ε の評価である. $\varepsilon>0$ のときは Fubini の定理より確率積分とルベーグ積分を交換してもいい. よって

$$Y_\varepsilon^T=\sum_{i=1}^N\int_{-T}^T\Phi_{\varepsilon,t}^i dB_t^i. \tag{2.22}$$

ここで $\Phi_{\varepsilon,t}$ は $\mathbb{R}^{3N}$ に値をとる確率過程で次で $\Phi_{\varepsilon,t}^i=2\sum_{j=1}^N\int_{[t-\tau]_T}^t\nabla\varrho_\varepsilon(B_t^i-B_s^j,t-s)ds$. さて, Y_0^T を $Y_0^T=\sum_{i=1}^N\int_{-T}^T\Phi_{0,t}^i\cdot dB_t^i$ で定義する. 次が示せる.

補題 2.19 (**真空期待値の収束**) 次が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(f\otimes \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}h\otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}_W^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\rm ren}}\right]. \tag{2.23}$$

ここで

$$\begin{aligned} S_0^{\rm ren} &= 2\sum_{i\neq j}^N\int_{-T}^T\varrho_0(B_s^i-B_s^j,0)ds + 2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\left(\int_{-T}^t\nabla\varrho_0(B_t^i-B_s^j,t-s)ds\right)\cdot dB_t \\ &\quad -2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varrho_0(B_T^i-B_s^j,T-s)ds. \end{aligned}\tag{2.24}$$

そして $S_0^{\rm ren}$ の被積分関数は

$$\varrho_0(X,t)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-ikX}e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_{|k|>\lambda}dk,\quad \nabla\varrho_0(X,t)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{-ike^{-ikX}e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_{|k|>\lambda}dk.$$

Nelson Hamiltonian の紫外切断のくりこみ理論で最も本質的な部分が $H_\varepsilon-g^2N\varrho_\varepsilon(0,0)$ の下からの一様有界性を示すことにある.

補題 2.20 (**下からの一様有界性**) 定数 C があって $H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0)>C$ が $\varepsilon>0$ に一様に成り立つ.

定理 *2.18* **の証明**: $F,G\in\mathscr{H}$,$C_\varepsilon(F,G)=(F,e^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}G)$ としよう. 稠密な $F,G\in\mathcal{D}$ に対して $C_\varepsilon(F,G)$ が $\varepsilon\downarrow 0$ で収束することが, 真空期待値の収束の議論を拡張してすぐにわかる. 一様な不等式 $\|e^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}\|<e^{-tC}$ と $\mathcal{D}$ が $\mathscr{H}$ で稠密ということから $\{C_\varepsilon(F,G)\}_\varepsilon$ がコーシー列となる. $C_0(F,G)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}C_\varepsilon(F,G)$ とする. そうすれば $|C_0(F,G)|\le e^{-tC}\|F\|\|G\|$. Riesz の定理より有界作用素 T_t で $C_0(F,G)=(F,T_tG)$, $F,G\in\mathscr{H}$ となるものが存在する. すぐに T_t, $t\ge 0$, が強連続な一径数半群であることが示せる. 故に下から有界な自己共役作用素 $H_{\rm ren}$ で $T_t=e^{-tH_{\rm ren}}$, $t\ge 0$, となるものが存在することがわかる. $E_\varepsilon=-g^2N\varrho_\varepsilon(0,0)$ と置けば証明完了. □

弱結合極限について考える. $\hat\omega=\sqrt{-\Delta+\nu^2}$ とする. κ をスケーリングパラメターとして H_ε を $H_\varepsilon(\kappa)=H_{\rm p}\otimes\mathbb{1}+\kappa^2\mathbb{1}\otimes H_{\rm f}+\kappa H_{\rm I}$ とスケーリングする. エネルギーくりこみ項は $E_\varepsilon(\kappa)=-g^2N\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{2(2\pi)^3\omega_\nu(k)}\frac{\kappa^2}{\kappa^2\omega_\nu(k)+|k|^2/2}dk$ のようにスケーリングされる. 定理 2.18 から自己共役作用素 $H_{\rm ren}(\kappa)$ で $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(f\otimes\mathbb{1},e^{-t(H_\varepsilon(\kappa)-E_\varepsilon(\kappa))}h\otimes\mathbb{1})=(f\otimes\mathbb{1},e^{-tH_{\rm ren}(\kappa)}h\otimes\mathbb{1})$ となるものがある.

系 2.21 (**弱結合極限**) [GHL13] $F,G\in\mathscr{D}$ のとき $\lim_{\kappa\to\infty}(F,e^{-tH_{\rm ren}(\kappa)}G)=(F,e^{-th_{\rm eff}}\otimes P_0G)$. ここで

$$h_{\rm eff}=-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\Delta_j+V(x^1,...,x^N)-\frac{g^2}{4\pi}\sum_{i<j}\frac{e^{-\nu|x_i-x_j|}}{|x_i-x_j|}.$$

3　その他の模型

FKN 型汎関数積分表示 を使って, 解析ができる模型の例を挙げる.

(1) Hilbert 空間 $\mathscr{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{F}$ を考えよう. スピン・ボゾン Hamiltonian は

$$H_{SB} = \varepsilon\sigma_z \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes H_{\mathrm{f}} + \alpha\sigma_x \otimes \xi(\hat{h}) \tag{3.1}$$

で定義される $\mathscr{H}$ 上の作用素である. ここで $\alpha \in \mathbb{R}$ は結合定数, $\varepsilon \geq 0$ は 2 レベル原子のスペクトルギャップを表すパラメターである. 基底状態の存在・非存在は [AH97, HH10, HHL14] などがある. FK 型汎関数積分表示 は [Spo89, HHL14] にある.

(2) Nelson 模型で H_{p} を $\sqrt{-\Delta + m^2} - m + V$ に置換えて

$$H_{SRN} = (\sqrt{-\Delta + m^2} - m + V) \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes H_{\mathrm{f}} + H_{\mathrm{I}} \tag{3.2}$$

を定義する. この場合の FK 型汎関数積分表示 は Nelson Hamiltonian のそれと全く同様に構成することができる. ただし, Brown 運動が Lévy 過程に変わる. さらにもっと一般化して Ψ を Bernstein 関数として

$$H_{\Psi N} = (\Psi(-\Delta) + V) \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes H_{\mathrm{f}} + H_{\mathrm{I}}$$

を定義しても, Nelson Hamiltonian と同じ解析が出来る.

(3) Pauli-Fierz 模型は非相対論的量子電磁力学という中途半端な名前のついた模型で, Pauli-Fierz [PF38] が toy model として導入した模型である. それは $H_{\mathrm{p}} \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes H_{\mathrm{f}}$ に量子化された電磁場 A がミニマル結合した模型である.

$$H_{PF} = \frac{1}{2m}(p \otimes 1\!\!1 - A)^2 + V \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes H_{\mathrm{f}}. \tag{3.3}$$

基底状態の存在・非存在は [BFS99, GLL01, Hir00b, HS01a] などがある. また [Spo04] には無限次元 OU 過程をもちいた解説がある. FKN 型汎関数積分表示は [Hir97, Hir07], Gibbs 測度は [BH09] にある.

(4) スピンを含む PF 模型は

$$H_{PF}^{\sigma} = \frac{1}{2m}(\sigma \cdot (p \otimes 1\!\!1 - A))^2 + V \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes H_{\mathrm{f}} \tag{3.4}$$

と定義される. この Hamiltonian の基底状態は対称性から 2 重に縮退していることが [HS01b, Hir05a] で示されている. この FKN 型汎関数積分表示は [HL08] で与えられている.

(5) 準相対論的 Pauli-Fierz 模型は相対論的な模型

$$(\sqrt{-\Delta + m^2} - m + V) \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes H_{\mathrm{f}}$$

に電磁場をミニマル結合して定義される.

$$H_{SRPF} = \sqrt{(p \otimes 1\!\!1 - A)^2 + m^2} - m + V \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes H_{\mathrm{f}} \tag{3.5}$$

	連続パス	cádlág パス
$W^{\#}$ の一様なバウンドあり	μ_T^{N}	μ_T^{SB}, μ_T^{SRN}
$W^{\#}$ の一様なバウンドなし	μ_T^{PF}	μ_T^{SRPF}

図 2: 有限体積 Gibbs 測度

この模型も FKN 型汎関数積分表示を用いて, [Hir14a] で (1) 本質的自己共役性, (2) 固有ベクトルの Gauss domination, (3) 付随する Gibbs 測度の存在, (4) 固有ベクトルの指数および多項式減衰性が示されている. $m = 0$ のときは

$$|p \otimes \mathbb{1} - A| + V \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}} \tag{3.6}$$

と表せる. この基底状態の存在が [HH14] で調べられている.

$$H^{\sigma}_{SRPF} = \sqrt{(\sigma \cdot (p \otimes \mathbb{1} - A))^2 + m^2} - m + V \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}}. \tag{3.7}$$

この汎関数積分表示もスピンのない場合と同様に構成できて, 解析可能である. 基底状態の存在が [MS09, KMS11] で示されている. 各々のペア相互作用は次のようになっている (詳細は講演で示す).

$$W^{\mathrm{SB}} = \int_{-T}^{T} dt \int_{-T}^{T} ds \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)} (-1)^{N_t - N_s} e^{-|t-s|\omega(k)} dk, \tag{3.8}$$

$$W^{\mathrm{N}} = \int_{-T}^{T} dt \int_{-T}^{T} ds \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)} e^{-ik(B_t - B_s)} e^{-|t-s|\omega(k)} dk, \tag{3.9}$$

$$W^{\mathrm{SRN}} = \int_{-T}^{T} dt \int_{-T}^{T} ds \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)} e^{-ik(X_t - X_s)} e^{-|t-s|\omega(k)} dk, \tag{3.10}$$

$$W^{\mathrm{PF}} = \sum_{\mu,\nu=1}^{d} \int_{-T}^{T} dB_t^{\mu} \int_{-T}^{T} dB_s^{\nu} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|k|^2} \right) e^{-ik(B_t - B_s)} e^{-|t-s|\omega(k)} dk, \tag{3.11}$$

$$W^{\mathrm{SRPF}} = \sum_{\mu,\nu=1}^{d} \int_{-T}^{T} dB_t^{\mu} \int_{-T}^{T} dB_s^{\nu} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)} \left(\delta_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{|k|^2} \right) e^{-ik(B_t - B_s)} e^{-|T_t^* - T_s^*|\omega(k)} dk. \tag{3.12}$$

W^{N}, W^{SRN} と W^{SB} はパスに一様に上から抑えられるが, W^{SRPF} と W^{PF} はそのようには出来ない. また, 対応する有限体積 Gibbs 測度 μ_T^{N} と μ_T^{PF} は連続パス空間上の測度だが, μ_T^{SRN}, μ_T^{SB} と μ_T^{SRPF} は cádlág パス空間上の測度になる.

参考文献

[Ara01] A. Arai, Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation. *Rev. Math. Phys.* **13** (2001), 1075–1094.

[AH97] A. Arai and M. Hirokawa, On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model, *J. Funct. Anal.* **151** (1997),455–503.

[AHH99] A. Arai, M. Hirokawa and F. Hiroshima, On the absence of eigenvectors of Hamiltonians in a class of massless quantum field models without infrared cutoff *J. Funct. Anal.* **168** (1999), 470–497.

[BFS98] V. Bach, J. Fröhlich, and I. M. Sigal, Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles, *Adv. Math.* **137** (1998), 299–395.

[BFS99] V. Bach, J. Fröhlich, and I. M. Sigal, Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation field, *Commun. Math. Phys.* **207** (1999), 249–290.

[BH09] V. Betz and F. Hiroshima, Gibbs measures with double stochastic integrals on path space, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, **12** (2009), 135–152.

[BHLMS02] V. Betz, F. Hiroshima, J. Lőrinczi, R. A. Minlos and H. Spohn, Ground state properties of the Nelson Hamiltonian-A Gibbs measure-based approach, *Rev. Math. Phys.* **14** (2002), 173–198.

[ARS91] G. F. De Angelis, A. Rinaldi, and M. Serva, Imaginary-time path integral for a relativistic spin-(1/2) particle in a magnetic field, *Europhys. Lett.* **14** (1991), 95–100.

[DG04] J. Dereziński and C. Gérard, Scattering theory of infrared divergent Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. Henri Poincaré* **5** (2004), 523–578.

[Ger00] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. H. Poincaré* **1** (2000), 443–459.

[GHPS09] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati, and A. Suzuki, Infrared divergence of a scalar quantum field model on a pseudo Riemannian manifold, *Interdisciplinary Information Sciences* **15** (2009), 399–421.

[GHPS11] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Infrared problem for the Nelson model with variable coefficients, *Commun. Math. Phys.* **308** (2011), 543–566.

[GHPS12a] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Removal of the UV cutoff for the Nelson model with variable coefficients, *Lett Math Phys*, **101** (2012), 305–322.

[GHPS12b] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Absence of ground state of the Nelson model with variable coefficients, *J. Funct. Anal.* **262** (2012), 273–299.

[GLL01] M. Griesemer, E. Lieb, and M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, *Invent. Math.* **145** (2001), 557–595.

[GHL13] M. Gubinelli, F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Ultraviolet renormalization of the Nelson Hamiltonian through functional integration, *J. Funct. Anal.* **267** (2014),3125–3153.

[HH10] D. Hasler and I. Herbst, Ground states in the spin boson model, arXiv:1003.5923, preprint 2010.

[HH14] T. Hidaka and F. Hiroshima, Spectrum of semi-relativistic Pauli-Fierz model I, arXiv:1402.1065, preprint 2014.

[Hir03] M. Hirokawa, Infrared catastrophe for Nelson's model, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **42** (2003), 897–922.

[HHL14] M. Hirokawa, F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Spin-boson model through a Poisson-driven stochastic process, *Math. Z.* **277** (2014), 1165–1198.

[HHS05] M. Hirokawa, F. Hiroshima and H. Spohn, Ground state for point particle interacting through a massless scalar Bose field, *Adv. in Math.*, **191** (2005), 339–392.

[Hir97] F. Hiroshima, Functional integral representation of a model in quantum electrodynamics, *Rev. Math. Phys.* **9** (1997), 489–530.

[Hir00b] F. Hiroshima, Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics II, *J. Math. Phys.* **41** (2000), 661–674.

[Hir04] 廣島文生, 量子場と結合した Schrödinger 作用素のスペクトル, 日本数学会 2004 年度秋期総合分科会　函数解析学分科会講演アブストラクト, 77-89, 2004.

[Hir05a] F. Hiroshima, Multiplicity of ground states in quantum field models:applications of asymptotic fields, *J. Funct. Anal.* **224** (2005), 431–470.

[Hir05b] 廣島文生, 場の理論における埋蔵固有値の摂動問題, 数学 **57**, 70–92, 2005.

[Hir07] F. Hiroshima, Fiber Hamiltonians in nonrelativistic quantum electrodynamics, *J. Funct. Anal.* **252** (2007), 314–355.

[Hir14a] F. Hiroshima, Functional integral approach to semi-relativistic Pauli-Fierz models, *Adv. in Math.* **259** (2014), 784–840.

[HIL12] F. Hiroshima, T. Ichinose, and J. Lőrinczi, Path integral representation of Schrödinger operator with Bernstein functions of the Laplacian, *Rev. Math. Phys.* **24** (2012) 1250013 (40 pages).

[HIL13] F. Hiroshima, T. Ichinose and J. Lőrinczi, Probabilistic representation and fall-off of bound states of relativistic Schrödinger operators with spin 1/2, *Publ RIMS Kyoto* **49** (2013), 189–214.

[HL08] F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Functional integral representation of the Pauli-Fierz model with spin 1/2, *J. Funct. Anal.* **254** (2008), 2127–2185.

[HL12] F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Lieb-Thirring bound for Schrödinger operators with Bernstein functions of the Laplacian, *Commun. Stochastic Analysis* **6** (2012), 589–602.

[HLT12] F. Hiroshima, J. Lőrinczi and T. Takaesu, A probabilistic representation of the ground state expectation of fractional powers of the boson number operator, *J. Math. Anal. Appl,* **395** (2012), 437–447.

[HS08] F. Hiroshima and I. Sasaki, Enhanced binding of an N particle system interacting with a scalar field I, *Math. Z.* **259** (2008), 657–680.

[HS15] F. Hiroshima and I. Sasaki, Enhanced binding of an N particle system interacting with a scalar field II, to be published in Publ RIMS Kyoto.

[HS01a] F. Hiroshima and H. Spohn, Enhanced binding through coupling to a quantum field, *Ann. Henri Poincaré* **2** (2001), 1159–1187.

[HS01b] F. Hiroshima and H. Spohn, Ground state degeneracy of the Pauli-Fierz Hamiltonian with spin, *Adv. Theor. Math. Phys.* **5** (2001), 1091–1104.

[KMS11] M. Könenberg, O. Matte and E. Stockmeyer, Existence of ground states of hydrogen-like atoms in relativistic QED I: The semi-relativistic Pauli-Fierz operator, *Rev. Math. Phys.* **23** (2011), 375–407.

[LHB11] J. Lőrinczi, F. Hiroshima and V. Betz, *Feynman-Kac type theorems and Gibbs measures on path space*, Studies in Mathematics **34**, DeGruyter 2011.

[LMS02] J. Lőrinczi, R. A. Minlos, and H. Spohn, The infrared behaviour in Nelson's model of a quantum particle coupled to a massless scalar field, *Ann. Henri Poincaré* **3** (2002), 1–28.

[MS09] T. Miyao and H. Spohn, Spectral analysis of the semi-relativistic Pauli-Fierz Hamiltonian, *J. Funct. Anal.* **256** (2009), 2123–2156.

[Nel64a] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1990–1997.

[Nel64b] E. Nelson, Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field, In *Proc. Conference on Analysis in Function Space, W. T. Martin and I. Segal (eds.)*, page 87. MIT Press, 1964.

[PF38] W. Pauli and M. Fierz, Zur Theorie der Emission langwelliger Lichtquanten. *Nuovo Cimento* **15** (1938), 167–188.

[Sas05] I. Sasaki, Ground state of the massless Nelson model in a non-Fock representation, *J. Math. Phys.* **46** (2005), 102107.

[Spo89] H. Spohn, Ground state(s) of the spin-boson Hamiltonian, *Commun. Math. Phys.* **123** (1989), 277–304.

[Spo98] H. Spohn, Ground state of quantum particle coupled to a scalar boson field, *Lett. Math. Phys.* **44**, (1998), 9–16.

[Spo04] H. Spohn, *Dynamics of Charged Particles and their Radiation Field*, Cambridge University Press, 2004.