

## 非線形偏微分方程式の粘性解について

石井 仁 司

### 序.

ここでは非線形偏微分方程式の弱解である粘性解 (viscosity solution) について紹介する. 粘性解については既に何冊かの著書 ([26], [18]) においても紹介され, また最近 User's Guide [8] も出版され, 何をいまさらの感もある. ここでは特に専門家でない方をも対象にできたらとの思いを込めて, Beginner's Guide になるよう細部にこだわらずに紹介していきたい.

そもそも粘性解に関しては誤解が多い. 粘性解という命名により, 粘性との関連に注意が向いてしまうことが誤解の最も大きな原因と思われる. 実は粘性解と粘性とは全く関係ないと考えた方がよい. むしろ, 以下で明らかになるように, 粘性解とは (広義の) 最大値原理に基づいて定義された偏微分方程式に対する弱解の概念である. 一方, この意味で通常の超関数的な弱解は部分積分に基づいて定義されているといえる.

粘性解は Crandall と Lions ([9], [10]) により導入された. 粘性解の有用性はまず最適制御や微分ゲームへの応用として認識された ([26], [27], [16]). すなわち, 最適制御や微分ゲームにおける値関数 (value function) は粘性解として基本方程式である Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs 方程式を満たすということが示された. この基本方程式においては楕円性あるいは放物性が退化している場合が多く, 滑らかな解は期待できず弱解の概念が必要になるが, 一般には非線形性が強く (完全非線形), 部分積分に基づいた超関数的な弱解の概念は無効であり, そこに粘性解の威力が発揮された. 基本方程式の粘性解として値関数を特徴づけるために, 粘性解に対する比較定理 (すなわち粘性解の一意性) が重要であった ([9], [10], [27], [23], [22]). 比較定理あるいは一意性定理は常に粘性解理論の核心である. これと関連して, 大偏差原理 (large deviation) への応用の有効性が示された ([14]). そこでは粘性解の一つの特性である安定性が重要であった ([10], [2]). さらに均質化理論 (homogenization) への応用にも成功した ([12]).

その後の大きな展開として, 平均曲率流に代表される曲面の運動の解析への応用は目を見張るものがあつた ([5], [17]). 曲面をある関数の等高面として捕らえ, 各等高面が同じ運動法則に従うとしてこの関数の満たす微分方程式を導出し, この方程式の粘性解としてこの関数を決定し, 曲面の運動を定めるという形で応用された. さらに Allen-Cahn 方程式の内部遷移層の平均曲率流への収束の証明へと応用された ([15], [3]).

以上の展開は有限次元空間上で定義された関数に関する (微分方程式に対する) 粘性解の話である. 無限次元空間上で定義された関数を粘性解とみる研究も展開されている. 最適制御でいえば, 無限次元空間上の常微分方程式で記述された系の制御にあたる. 特に, 偏微分方程式の制御を扱うとき, この設定が必要になり, 応用上極めて重要である. この場合 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式は非有界な係数を持つ項を含むことになり, 取扱いは難しくなる ([11], [28], [29]).

以下では, 粘性解に関する基本事項を解説する. 粘性解の定義, 解の比較定理, 解の安定性そし

て解の存在を示すための Perron の方法 ([21]) を説明する。

§ 1. 粘性解の定義.

1.1 退化楕円型方程式. 粘性解を考える上で対象となる偏微分方程式は退化楕円型で単調なものである。退化楕円性と単調性をまず説明する。単独方程式

$$(S) \quad F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \text{ in } \Omega$$

を考える。ただし、 $\Omega \subset \mathbf{R}^N$  は開集合、 $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  は未知関数、 $Du = (u_{x_1}, \dots, u_{x_N})$ ,  $D^2u = (u_{x_i x_j})_{1 \leq i, j \leq N}$ ,  $F: \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{S}^N \rightarrow \mathbf{R}$  は連続関数、 $\mathbf{S}^N$  は  $N$  次実対称行列の全体とする。簡単のため、以下では  $\Gamma = \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{S}^N$  と表す。また  $N$  次正行行列全体の集合を  $\mathbf{M}^N$  で表す。

$\mathbf{S}^N$  に順序  $\leq$  をつぎのように導入する。  $X, Y \in \mathbf{S}^N$  が  $X \leq Y$  を満たすとは不等式  $\langle X\xi, \xi \rangle \leq \langle Y\xi, \xi \rangle \forall \xi \in \mathbf{R}^N$  が成立することである。

定義. (S) または  $F$  が退化楕円型 (degenerate elliptic) であるとは、 $X \leq Y$  ならば  $F(x, r, p, X) \geq F(x, r, p, Y)$  が成り立つことである。

例.  $F = -\text{tr } X - f(x)$  は退化楕円型である。(S) の表す微分方程式としては  $-\Delta u = f(x)$ 。なぜなら、 $X \leq Y$  のとき、 $F(x, X) - F(x, Y) = -\text{tr}(X - Y) \geq 0$ 。  $F = |p| - f(x)$  は退化楕円型である。微分方程式としては  $|Du| = f(x)$ 。

定義. (S) または  $F$  が単調であるとは  $r \leq s$  ならば  $F(x, r, p, X) \leq F(x, s, p, X)$  が成り立つことである。

例.  $u + H(Du) - G(\Delta u) = f(x)$  は単調である。 $G: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  が非減少関数であれば、この方程式は退化楕円型でもある。一方、 $b(u)u_x = f(x)$  は適用範囲外である。ただし、 $N=1$  としている。 $b$  が定数関数以外ときは、単調ではない。

例 (Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式).  $\mathcal{A}$  は空でない集合とし、 $\alpha \in \mathcal{A}$  のとき  $A^\alpha(x) \in \mathbf{S}^N$ ,  $A^\alpha(x) \geq 0$ ,  $b^\alpha(x) \in \mathbf{R}^N$ ,  $c^\alpha(x) \in \mathbf{R}$ ,  $f^\alpha(x) \in \mathbf{R}$  とする。(ここの添字  $\alpha$  はべき乗を表していない。) 線形方程式

$$-\text{tr } A^\alpha(x) D^2u + \langle b^\alpha(x), Du \rangle + c^\alpha(x)u - f^\alpha(x) = 0$$

と

$$\sup_{\alpha} \{-\text{tr } A^\alpha(x) D^2u + \langle b^\alpha(x), Du \rangle + c^\alpha(x)u - f^\alpha(x)\} = 0$$

はともに退化楕円型であり、もし  $c^\alpha \geq 0$  ならば、単調である。この方程式は確率微分方程式の最適制御における基本方程式 (ダイナミック・プログラミング方程式) である。 $\alpha$  は制御に関わる変数である。例えば、 $\mathcal{A} = \mathbf{S}^{N-1}$ ,  $A^\alpha = 0$ ,  $b^\alpha = \alpha$ ,  $c^\alpha(x) = 0$ ,  $f^\alpha(x) = 1$  とし、 $|Du| = 1$  を得る。 $\mathcal{A} = \{1\}$ ,  $A^1(x) = I$  ( $I$  は  $N$  次の単位行列を表す),  $b^1(x) = 0$ ,  $c^1(x) = 0$  とし、 $-\Delta u = f^1(x)$ , を得る。 $\mathcal{A} = \{1, 2\}$ ,  $A^1(x) = I$ ,  $A^2(x) = 0$ ,  $b^1(x) = b^2(x) = 0$ ,  $c^1(x) = 0$ ,  $c^2(x) = 1$  とし、

$$\max\{-\Delta u - f^1(x), u - f^2(x)\} = 0$$

を得る。この最後の式は変分不等式とも関連する。

より一般に、Hamilton-Jacobi-Bellman-Isaacs 方程式

$$\inf_{\beta} \sup_{\alpha} \{-\text{tr } A^{\alpha\beta}(x) D^2u + \langle b^{\alpha\beta}(x), Du \rangle + c^{\alpha\beta}(x)u - f^{\alpha\beta}(x)\} = 0$$

が考えられる。ここに  $A^{\alpha\beta}, b^{\alpha\beta}, c^{\alpha\beta}, f^{\alpha\beta}$  は上の H-J-B 方程式の場合と同様である。これは確率微

分ゲームの基本方程式である。また、これは一般の (S) を考えることと殆んど同等である。すなわち、 $F$  が  $\mathbf{R}^m$  上の一様連続関数のとき、各  $\varepsilon > 0$  に対して  $A(\varepsilon) > 0$  をつぎの様に取ることができる。

$$F(\xi) \leq F(\eta) + \varepsilon + A(\varepsilon) |\xi - \eta|^2 \quad \forall \xi, \eta \in \mathbf{R}^m.$$

明らかに、 $F(\xi) = \inf_{\varepsilon > 0, \eta \in \mathbf{R}^m} \{F(\eta) + \varepsilon + A(\varepsilon) |\xi - \eta|^2\}$ . 一方  $|\xi|^2 = \max_{\eta \in \mathbf{R}^m} \{2\langle \eta, \xi \rangle - |\eta|^2\}$  なので、

$$\begin{aligned} F(\xi) &= \inf_{\varepsilon > 0, \eta \in \mathbf{R}^m} \max_{\zeta \in \mathbf{R}^m} \{F(\eta) + \varepsilon + A(\varepsilon) (2\langle \zeta, \xi - \eta \rangle - |\zeta|^2)\} \\ &= \inf_{\varepsilon > 0, \eta \in \mathbf{R}^m} \max_{\zeta \in \mathbf{R}^m} \{\langle \zeta, \xi \rangle + F(\eta) + \varepsilon - \langle \zeta, \eta \rangle - |\zeta|^2/4 A(\varepsilon)\}. \end{aligned}$$

このことを用いて、 $F \in UC(\Gamma)$  が退化楕円型のとき、

$$F(x, r, p, X) = \inf_{\beta \in \mathcal{B}} \max_{(A, b, c) \in \mathcal{A}} \{-\text{tr} AX + \langle b, p \rangle + cr + f(x, A, b, c, \beta)\}$$

と表すことができる。ただし、

$$\mathcal{A} = \mathbf{S}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}, \quad \mathcal{B} = \mathbf{S}^N \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{R} \times (0, \infty), \quad f: \Omega \times \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathbf{R}$$

とする。

例. 退化放物型方程式  $u_t + F(x, Du, D^2u) = 0$  を考える。ただし、 $u = u(x, t)$ ,  $Du = D_x u$ ,  $D^2u = D_x^2 u$  であり、 $F(x, p, X)$  が退化楕円型であることをもって、 $u_t + F(x, Du, D^2u) = 0$  を退化放物型方程式と呼ぶ。

$$\tilde{p} = (p, p_{N+1}) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{R}, \quad \tilde{X} = \begin{pmatrix} X & * \\ * & * \end{pmatrix} \in \mathbf{S}^{N+1} \quad (\text{ただし、} X \in \mathbf{S}^N \text{ とする})$$

のとき、 $\tilde{F}(x, t, \tilde{p}, \tilde{X}) = p_{N+1} + F(x, p, X)$  とおく。 $\tilde{F}$  は  $\mathbf{R}^{N+1}$  上で考えて退化楕円型であり、上の退化放物型方程式は  $\tilde{F}(x, t, \tilde{D}u, \tilde{D}^2u) = 0$  と表せる。ここで、 $\tilde{D} = (D_x, D_t)$ 。

**1.2 粘性解.**  $F$  は退化楕円型であるとする。つぎの (広義) 最大値原理に注目する。

最大値原理:  $f \in C^2(\Omega)$  が  $\hat{x} \in \Omega$  で極大値をとるならば、 $Df(\hat{x}) = 0$ ,  $D^2f(\hat{x}) \leq 0$ 。

証明.  $\xi \in \mathbf{R}^N$  とする。  $\left. \frac{d}{dt} f(\hat{x} + t\xi) \right|_{t=0} = \langle Df(\hat{x}), \xi \rangle = 0$ ,  $\left. \frac{d^2}{dt^2} f(\hat{x} + t\xi) \right|_{t=0} = \langle D^2f(\hat{x})\xi, \xi \rangle \leq 0$  となる。■

さて、 $u \in C^2(\Omega)$  を (S) の古典解としてみよう。 $\varphi \in C^2(\Omega)$ ,  $\hat{x} \in \Omega$  とし  $u - \varphi$  が  $\hat{x}$  で極大値をとるとする。このとき  $D(u - \varphi)(\hat{x}) = 0$ ,  $D^2(u - \varphi)(\hat{x}) \leq 0$ 。従って、 $F$  の退化楕円性により

$$0 = F(\hat{x}, u(\hat{x}), Du(\hat{x}), D^2u(\hat{x})) \geq F(\hat{x}, u(\hat{x}), D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})).$$

このことは  $u$  が古典的劣解、すなわち  $F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega$  を満たしていれば成り立つ。この考察をもとに粘性解を定義する。

定義.  $u \in C(\Omega)$  が (S) の粘性劣解 (viscosity subsolution,  $u \in SUB$ ,  $F[u] \leq 0$  の解,  $F[u] = 0$  の劣解) であるとは、つぎが成り立つことである:  $\varphi \in C^2(\Omega)$  であり、 $u - \varphi$  が  $\hat{x} \in \Omega$  において極大値をとるならば、 $F(\hat{x}, u(\hat{x}), D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \leq 0$ 。同じく  $u \in C(\Omega)$  が (S) の粘性優解 (viscosity supersolution,  $u \in SUP$ ,  $F[u] \geq 0$  の解,  $F[u] = 0$  の優解) であるとは、つぎが成り立つことである:  $\varphi \in C^2(\Omega)$  であり、 $u - \varphi$  が  $\hat{x} \in \Omega$  において極小値をとるならば、 $F(\hat{x}, u(\hat{x}), D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \geq 0$ 。さらに  $u \in C(\Omega)$  が (S) の粘性解 (viscosity solution,  $u \in SOL$ ,  $F[u] = 0$  の解) であるとは  $u$  が粘性劣解であり、しかも粘性優解であることである。

**1.3 解の比較.**  $F$  は退化楕円型かつ単調とする。ここでは話を簡単にするため

$$(S_+) \quad u(x) + F(x, u(x), Du(x), D^2u(x)) = 0 \quad \text{in } \Omega$$

を考える。さらに  $\Omega$  は有界とする。

**定理 1.**  $u \in SUB \cap C(\bar{\Omega}), v \in SUP \cap C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega}), u \leq v$  on  $\partial\Omega$  ならば,  $u \leq v$  in  $\Omega$  が成り立つ。

証明. 背理法で示す.  $\max_{\bar{\Omega}}(u-v) > 0$  と仮定する.  $(u-v)(\hat{x}) = \max(u-v)$  となる  $\hat{x} \in \Omega$  がある.  $u \in SUB, v \in C^2(\Omega)$  より,

$$0 \geq u(\hat{x}) + F(\hat{x}, u(\hat{x}), Dv(\hat{x}), D^2v(\hat{x})) \geq u(\hat{x}) + F(\hat{x}, v(\hat{x}), Dv(\hat{x}), D^2v(\hat{x})).$$

$v \in SUP$  であり,  $(v-v)(x) \equiv 0$  は  $\hat{x}$  で極小値をとるから

$$0 \leq v(\hat{x}) + F(\hat{x}, v(\hat{x}), Dv(\hat{x}), D^2v(\hat{x})).$$

差をとって,  $0 \geq u(\hat{x}) - v(\hat{x}) > 0$ . これは矛盾. ■

注意. (i) この証明の後半の議論から粘性解が  $C^2$  関数であれば古典解であることが分かる。

(ii) 上の議論は (狭義の) 最大値原理 = 比較定理を導く方法としては古典的かつ標準的である。

(iii) ‘退化していない’ とき,  $(S_+)$  における第一項  $u$  のない方程式  $F[u] = 0$  in  $\Omega$  に対して古典解の範囲では比較定理が成立する. 退化している場合にはこのことは期待できない。

**定理 2.**  $F = H(p) - f(x), H, f \in C(\mathbf{R}^N)$  と仮定する.  $u \in SUB \cap C(\bar{\Omega}), v \in SUP \cap C(\bar{\Omega}), u \leq v$  on  $\partial\Omega$  ならば,  $u \leq v$  in  $\Omega$ .

証明.  $\max_{\bar{\Omega}}(u-v) > 0$  と仮定する.  $\alpha > 0$  とし,  $\Phi_\alpha(x, y) = u(x) - v(y) - \alpha|x-y|^2$  により,  $\Phi_\alpha: \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$  を定義する.  $(x_\alpha, y_\alpha)$  を一つの  $\Phi_\alpha$  の最大点とする. このとき  $x \mapsto u(x) - (v(y_\alpha) + \alpha|x-y_\alpha|^2)$  は  $x_\alpha$  で最大値をとり,  $y \mapsto v(y) - (u(x_\alpha) - \alpha|y-x_\alpha|^2)$  は  $y_\alpha$  で最小値をとる.  $u \in SUB, v \in SUP$  なので,  $x_\alpha, y_\alpha \in \Omega$  ならば

$$(1) \quad u(x_\alpha) + H(2\alpha(x_\alpha - y_\alpha)) \leq f(x_\alpha), \quad v(y_\alpha) + H(-2\alpha(y_\alpha - x_\alpha)) \geq f(y_\alpha).$$

ところで,  $\Phi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) \geq \Phi_\alpha(x, x) \quad \forall x \in \Omega$  なので,

$$\alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 + \sup_{\bar{\Omega}}(u-v) \leq u(x_\alpha) - v(y_\alpha) \leq (\sup_{\bar{\Omega}}|u| + \sup_{\bar{\Omega}}|v|).$$

従って,  $\alpha \rightarrow \infty$  のとき,  $x_\alpha - y_\alpha \rightarrow 0$ . これと  $u \leq v$  on  $\partial\Omega$  という仮定より,  $\alpha$  が十分に大きければ  $x_\alpha, y_\alpha \in \Omega$ .  $\alpha$  は十分に大きいとして, (1) より  $0 < \max(u-v) \leq f(x_\alpha) - f(y_\alpha)$ .  $\alpha \rightarrow \infty$  として, 矛盾がでる. ■

注意.  $F = G(X)$  として同じ議論を繰り返すと  $u(x_\alpha) + G(2\alpha I) \leq 0 \leq v(y_\alpha) + G(-2\alpha I)$ . 従って,  $u(x_\alpha) - v(y_\alpha) \leq G(-2\alpha I) - G(2\alpha I)$ . 例えば,  $G(X) = -\text{tr } X$  とすると  $G(-2\alpha I) - G(2\alpha I) = 4\alpha N \rightarrow \infty$  ( $\alpha \rightarrow \infty$ ). これでは矛盾は得られない。

**1.4 Semijets.**  $u \in C(\Omega)$  とする. 2次の superjet  $J^{2,+}u(x)$  と subjet  $J^{2,-}u(x)$  をつぎの様に定義する。

$$\text{定義. } J^{2,+}u(\hat{x}) = \{(p, X) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{S}^N \mid u(x) \leq u(\hat{x}) + \langle p, x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + o(|x - \hat{x}|^2)\},$$

$$J^{2,-}u(\hat{x}) = \{(p, X) \in \mathbf{R}^N \times \mathbf{S}^N \mid u(x) \geq u(\hat{x}) + \langle p, x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + o(|x - \hat{x}|^2)\}.$$

ここで,  $\hat{x} \in \Omega$  であり,  $o(|x - \hat{x}|^2)$  は極限  $x \rightarrow \hat{x}$  におけるものである。

例.  $\Omega = \mathbf{R}, u(x) = x^+ \equiv \max\{x, 0\}$  とする. このとき  $J^{2,+}u(1) = \{1\} \times [0, \infty), J^{2,+}u(0) = \emptyset, J^{2,-}u(0) = (\{0, 1\} \times (-\infty, 0]) \cup ((0, 1) \times \mathbf{R})$ .

**命題 1.** (i)  $J^{2,+}u(\hat{x}) = \{(D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \mid \varphi \in C^2(\Omega), u - \varphi \text{ は } \hat{x} \text{ で最大になる}\}$ . (ii)  $J^{2,-}u(\hat{x}) = \{(D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \mid \varphi \in C^2(\Omega), u - \varphi \text{ は } \hat{x} \text{ で最小になる}\}$ .

以下, 半径  $r > 0$ , 中心  $x \in \mathbf{R}^N$  の閉球を  $B_r(x)$  と表す.

証明. (i) のみを考える. 右辺を  $W$  と表す.  $(p, X) \in W$  とし,  $\varphi \in C^2(\Omega)$  を  $u - \varphi$  が  $\hat{x}$  で最大値をとり,  $(p, X) = (D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x}))$  となる様にとる. このとき  $u(x) - \varphi(x) \leq u(\hat{x}) - \varphi(\hat{x}) \forall x \in \Omega$ . 従って

$$\begin{aligned} u(x) &\leq u(\hat{x}) + \varphi(x) - \varphi(\hat{x}) \quad \forall x \in \Omega \\ &\leq u(\hat{x}) + \langle p, x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + o(|x - \hat{x}|^2) \quad (x \rightarrow \hat{x}). \end{aligned}$$

ゆえに,  $(p, X) \in J^{2,+}u(\hat{x})$  となり,  $W \subset J^{2,+}u(\hat{x})$ . 逆に  $(p, X) \in J^{2,+}u(\hat{x})$  とする.  $\delta > 0$  と,  $\omega(0) = 0$  を満たす  $\omega \in C([0, \delta])$  とが存在し

$$u(x) \leq u(\hat{x}) + \langle p, x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + \omega(|x - \hat{x}|) |x - \hat{x}|^2 \quad \forall x \in B_\delta(\hat{x})$$

となる.  $\omega$  は単調増加関数と仮定してよい.  $\omega(r) = 0 \quad \forall r \in (-\infty, 0)$  とおく.  $\theta(r) = \int_r^{2r} dt \int_t^{2t} \omega(s) ds$  ( $r \leq \delta/4$ ) とおく.

$$\theta \in C^2((-\infty, \delta/4]), \quad \theta(0) = \theta'(0) = \theta''(0) = 0, \quad \theta(r) \geq \int_r^{2r} t \omega(t) dt \geq r^2 \omega(r) \quad (0 \leq \forall r \leq \delta/4)$$

が成立する.  $\varphi(x) = \langle p, x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + \theta(|x - \hat{x}|) \quad \forall x \in B_{\delta/4}(\hat{x})$  とおく.

$\varphi \in C^2(B_{\delta/4}(\hat{x}))$ ,  $u(x) \leq u(\hat{x}) + \varphi(x)$ ,  $u(\hat{x}) = u(\hat{x}) + \varphi(\hat{x})$ ,  $D\varphi(\hat{x}) = p$ ,  $D^2\varphi(\hat{x}) = X$  が成り立ち, さらに,  $\varphi$  を適当に  $\Omega$  全体に拡張して  $\varphi \in C^2(\Omega)$  と考えてよい. すなわち,  $(p, X) \in W$ . こうして,  $J^{2,+}u(\hat{x}) \subset W$ . ■

**命題 2.**  $u \in C(\Omega)$  とする.  $F[u] \leq 0$  (あるいは  $F[u] \geq 0$ ) であるための必要十分条件はつぎが成り立つことである:  $F(x, u(x), p, X) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall (p, X) \in J^{2,+}u(x)$  ( $F(x, u(x), p, X) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall (p, X) \in J^{2,-}u(x)$ .)

**定義.**  $\bar{J}^{2,+}u(x) = \{(p, X) \mid \text{ある } x_n \rightarrow x \text{ と } (p_n, X_n) \in J^{2,+}u(x_n) \text{ に対して } (u(x_n), p_n, X_n) \rightarrow (u(x), p, X)\}$ .

**命題 3.**  $u \in C(\Omega)$  とする.  $F[u] \leq 0$  (あるいは  $F[u] \geq 0$ ) であるための必要十分条件はつぎが成り立つことである:  $F(x, u(x), p, X) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall (p, X) \in \bar{J}^{2,+}u(x)$  ( $F(x, u(x), p, X) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall (p, X) \in \bar{J}^{2,-}u(x)$ .)

## §2 解の比較.

**2.1 比較定理.** §1 では 1 階の方程式に有効な比較定理の証明法を紹介した. その方法はそのままでは 2 階の方程式には役に立たない事も注意した. 以下では 2 階の方程式に対する比較定理をいかに扱うかを説明する. 方程式 (S) について考える.  $\Omega$  は有界な開集合とする. 仮定を述べる.

(A1)  $F \in C(\Gamma)$ .

(A2) ある  $\lambda > 0$  に対して,  $r \mapsto F(x, r, p, X) - \lambda r$  は非減少である.

(A3)  $\omega(0) = 0$  を満たすある非減少関数  $\omega \in C([0, \infty))$  に対して  $\alpha > 0, X, Y \in \mathbf{S}^N$  が

$$-3\alpha \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \text{ を満たすならば}$$

$$F(y, r, \alpha(x-y), -Y) - F(x, r, \alpha(x-y), X) \leq \omega(\alpha|x-y|^2 + 1/\alpha)$$

が成り立つ.

(S<sub>+</sub>) に対しては, (A2) の条件は  $\lambda=1$  に対して成立することを注意しておく.

**定理 3.** (A1)-(A3) を仮定する.  $u \in SUB \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $v \in SUP \cap C(\bar{\Omega})$ ,  $u \leq v$  on  $\partial\Omega$  であれば,  $u \leq v$  in  $\bar{\Omega}$ .

**補題 1.**  $u, v \in C(\Omega)$ , 関数  $u(x) - v(y) - (\alpha/2)|x - y|^2$  は  $(\hat{x}, \hat{y}) \in \Omega \times \Omega$  で極大値をとるとする. このとき, ある  $X, Y \in \mathbf{S}^N$  に対してつぎが成り立つ:

$$\begin{cases} (\alpha(\hat{x} - \hat{y}), X) \in \bar{J}^{2,+}u(\hat{x}), & (\alpha(\hat{x} - \hat{y}), -Y) \in \bar{J}^{2,-}v(\hat{y}), \\ -3\alpha \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}. \end{cases}$$

**注意.**  $u, v \in C^2(\Omega)$  の場合には, 最大値原理より,  $Dw(\hat{x}, \hat{y}) = 0$ ,  $D^2w(\hat{x}, \hat{y}) \leq 0$ . ただし,  $w(x, y) = u(x) - v(y) - (\alpha/2)|x - y|^2$  とする. 従って,  $Du(\hat{x}) = \alpha(\hat{x} - \hat{y})$ ,  $-Dv(\hat{y}) = \alpha(\hat{y} - \hat{x})$ ,

$$\begin{pmatrix} D^2u(\hat{x}) & 0 \\ 0 & -D^2v(\hat{y}) \end{pmatrix} \leq \alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}.$$

$X = D^2u(\hat{x})$ ,  $Y = -D^2v(\hat{y})$  とおくと,  $(\alpha(\hat{x} - \hat{y}), X) \in J^{2,+}u(\hat{x})$ ,  $(\alpha(\hat{x} - \hat{y}), -Y) \in J^{2,-}v(\hat{y})$ .

補題 1 は  $C^2$  関数に対するこの事実の連続関数に対する一般化と考えられる.

補題 1 は後ほど証明する.

**定理 3 の証明.**  $\max_{\bar{\Omega}}(u - v) > 0$  と仮定する.  $\Phi_\alpha: \bar{\Omega} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbf{R}$  を  $\Phi_\alpha(x, y) = u(x) - v(y) - (\alpha/2)|x - y|^2$  と定義する.  $\Phi_\alpha$  の最大点を  $(x_\alpha, y_\alpha) \in \bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$  とする. 定理 2 の証明により,  $\max \Phi_\alpha \geq \max(u - v)$ ,  $x_\alpha - y_\alpha \rightarrow 0$  ( $\alpha \rightarrow \infty$ ).  $\alpha$  は十分大きいとして,  $x_\alpha, y_\alpha \in \Omega$  と考えてよい. さらに,  $\Phi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) \geq \Phi_\alpha(x_\alpha, x_\alpha)$  より  $(\alpha/2)|x_\alpha - y_\alpha|^2 \leq v(x_\alpha) - v(y_\alpha) \rightarrow 0$  ( $\alpha \rightarrow \infty$ ).

補題 1 より,  $X_\alpha, Y_\alpha \in \mathbf{S}^N$  が存在して

$$\begin{cases} (\alpha(x_\alpha - y_\alpha), X_\alpha) \in \bar{J}^{2,+}u(x_\alpha), & (\alpha(x_\alpha - y_\alpha), -Y_\alpha) \in \bar{J}^{2,-}v(y_\alpha), \\ -3\alpha \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X_\alpha & 0 \\ 0 & Y_\alpha \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} \end{cases}$$

が成り立つ. このとき

$$\begin{aligned} 0 &\geq F(x_\alpha, u(x_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), X_\alpha) - \lambda u(x_\alpha) + \lambda u(x_\alpha) \\ &\geq F(x_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), X_\alpha) - \lambda v(y_\alpha) + \lambda u(x_\alpha). \end{aligned}$$

ここで,  $\lambda$  は (A2) における正定数である. また,  $0 \leq F(y_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), -Y_\alpha)$ . ゆえに

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lambda(u(x_\alpha) - v(y_\alpha)) + F(x_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), X_\alpha) - F(y_\alpha, v(y_\alpha), \alpha(x_\alpha - y_\alpha), -Y_\alpha) \\ &\geq \lambda(u(x_\alpha) - v(y_\alpha)) - \omega(\alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 + 1/\alpha). \end{aligned}$$

$\alpha \rightarrow \infty$  として,  $\lambda \max(u - v) \leq 0$  を得る. これは矛盾である. ■

## 2.2 条件 (A3) への注意.

**注意 1.**  $F_1, F_2$  が (A3) を満たし,  $a > 0$  であれば,  $F_1 + F_2$  と  $aF_1$  は (A3) を満たす.

**注意 2.**  $F_\alpha$  が同じ  $\omega$  に対して (A3) を満たしていれば,  $\sup_\alpha F_\alpha$  も  $\inf_\alpha F_\alpha$  も (A3) を満たす.

**例.**  $F = H(x, r, p)$  の場合.  $|H(x, r, p) - H(y, r, p)| \leq \omega(|x - y|(|p| + 1))$  が満たされていれば, (A3) が成り立つ. 実際,  $|x - y| \leq (1/2)(\alpha|x - y|^2 + 1/\alpha)$  なので

$$H(y, r, \alpha(x - y)) - H(x, r, \alpha(x - y)) \leq \omega(|x - y|(|\alpha|x - y| + 1)) \leq \omega(2\alpha|x - y|^2 + 1/\alpha).$$

特に 1 階線形方程式  $H(x, r, p) = \langle b(x), p \rangle + c(x)r$  を考えるとき,  $b$  が  $\bar{\Omega}$  上で Lipschitz 連続であり,  $c$  が  $\bar{\Omega}$  上で一様連続であれば, 各  $R > 0$  について  $|r| \leq R$  の範囲で, (A3) が成り立つ.

例.  $F=F(r, p, X)$  であり, 退化楕円型の場合には (A3) が成り立つ. まず, 条件

$$-3\alpha \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

は  $-3\alpha(|\xi|^2 + |\eta|^2) \leq \langle X\xi, \xi \rangle + \langle Y\eta, \eta \rangle \leq 3\alpha|\xi - \eta|^2 \quad \forall \xi, \eta \in \mathbf{R}^N$  に同値である. 特に,  $\eta = \xi$  と取ると  $\langle (X+Y)\xi, \xi \rangle \leq 0 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}^N$ . ゆえに,  $X \leq -Y$ . 従って  $F(r, \alpha(x-y), -Y) \leq F(r, \alpha(x-y), X)$ .

例.  $F = -\text{tr}A(x)X$  であり,  $\mathbf{S}^N$  に値をとる  $\bar{\Omega}$  上の Lipschitz 関数  $B$  に対して  $A(x) = B(x)^2$  と表すことができるならば, (A3) が成り立つ. なぜなら,

$$\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}, \quad \alpha > 0$$

であれば,  $\langle X\xi, \xi \rangle + \langle Y\eta, \eta \rangle \leq 3\alpha|\xi - \eta|^2$ . 従って, 適当な定数  $L > 0$  に対して

$$\langle B(x)XB(x)\xi, \xi \rangle + \langle B(y)YB(y)\xi, \xi \rangle \leq 3\alpha|B(x)\xi - B(y)\xi|^2 \leq 3\alpha L|\xi|^2|x-y|^2.$$

$e_1, \dots, e_N$  により  $\mathbf{R}^N$  の標準基底を表すとして, 上の不等式で  $\xi = e_1, \dots, e_N$  と取り, 加え合わせれば,  $\text{tr} B(x)XB(x) + \text{tr} B(y)YB(y) \leq 3\alpha LN|x-y|^2$ . こうして  $F(y, -Y) - F(x, X) = \text{tr} B(x)^2 X + \text{tr} B(y)^2 Y \leq 3\alpha LN|x-y|^2$ . さらに,  $B = B(x, p)$  と置き替えても,  $B(x, p)$  が  $p$  について同等に  $x$  の関数として Lipschitz 連続ならば, 同じ結論を得る.

注意 3. (A3) が成り立つとき,  $F$  は退化楕円型である. これを証明しよう.  $X+Y \leq 0$  とする.  $\xi, \eta \in \mathbf{R}^N$ ,  $\varepsilon > 0$  とすると,

$$\begin{aligned} \langle Y\eta, \eta \rangle &= \langle Y(\xi + \eta - \xi), \xi + \eta - \xi \rangle = \langle Y\xi, \xi \rangle + 2\langle Y(\eta - \xi), \xi \rangle + \langle Y(\eta - \xi), \eta - \xi \rangle \\ &\leq \langle Y\xi, \xi \rangle + \varepsilon|\xi|^2 + (1/\varepsilon)\|Y\|^2|\eta - \xi|^2 + \|Y\||\eta - \xi|^2. \end{aligned}$$

ゆえに  $\langle X\xi, \xi \rangle + \langle Y\eta, \eta \rangle \leq \varepsilon|\xi|^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon}\|Y\|^2 + \|Y\|\right)|\eta - \xi|^2$ . 従って

$$-(\|X\| + \varepsilon + \|Y\|)(|\xi|^2 + |\eta|^2) \leq \langle (X - \varepsilon I)\xi, \xi \rangle + \langle Y\eta, \eta \rangle \leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\|Y\|^2 + \|Y\|\right)|\xi - \eta|^2.$$

すなわち

$$-(\|X\| + \|Y\| + \varepsilon) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X - \varepsilon I & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq \left(\frac{1}{\varepsilon}\|Y\|^2 + \|Y\|\right) \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}.$$

$\alpha \geq \frac{1}{3} \max \left\{ \|X\| + \|Y\| + \varepsilon, \frac{1}{\varepsilon} \|Y\|^2 + \|Y\| \right\}$  ととる. (A3) を仮定し,  $p \in \mathbf{R}^N$ ,  $x \in \Omega$  を固定し,  $y = x - (1/\alpha)p$  (すなわち,  $p = \alpha(x-y)$ ) と取って  $F(x - (1/\alpha)p, r, p, -Y) - F(x, r, p, X - \varepsilon I) \leq \omega((1/\alpha)(|p|^2 + 1))$  を得る.  $\alpha \rightarrow \infty$ ,  $\varepsilon \downarrow 0$  として  $F(x, r, p, -Y) \leq F(x, r, p, X)$ . ■

2.3 補題 1 の証明. 粘性解について初めての方は, この部分を飛ばして §3 に進まれることを勧める.  $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  に対して,  $J^{2, \pm} u(x)$ ,  $\bar{J}^{2, \pm} u(x)$  を以前と同じに定義する. 多価写像  $x \mapsto \bar{J}^{2, \pm} u(x)$  はつぎの意味で upper semicontinuous である:  $x_n \rightarrow \hat{x}$ ,  $(p_n, X_n) \in \bar{J}^{2, \pm} u(x_n)$ ,  $(u(x_n), p_n, X_n) \rightarrow (u(\hat{x}), p, X)$  ならば,  $(p, X) \in \bar{J}^{2, \pm} u(\hat{x})$ . また,  $u$  の連続性を仮定せずに命題 1 は成り立つことに注意する. つぎの補題は広義の最大値原理の言い換えである.

補題 2.  $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $\hat{x} \in \mathbf{R}^N$ ,  $\max_{\mathbf{R}^N} f = f(\hat{x})$ ,  $(p, X) \in J^{2, -} f(\hat{x})$  であれば,  $p = 0$ ,  $X \leq 0$ .

証明.  $\varphi \in C^2(\Omega)$  をつぎの様にとる.  $f - \varphi$  は  $\hat{x}$  で極小値をとり,  $D\varphi(\hat{x}) = p$ ,  $D^2\varphi(\hat{x}) = X$  が成り立つ. このとき,  $\varphi$  は  $\hat{x}$  で極大値をとる. 従って,  $p = D\varphi(\hat{x}) = 0$ ,  $X = D^2\varphi(\hat{x}) \leq 0$ . ■

補題 3 (A. D. Aleksandrov).  $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  が semiconvex (すなわち, ある  $C \in \mathbf{R}$  に対して,

$f(x)+C|x|^2$  が convex) ならば,  $J^{2,+}f(x) \cap J^{2,-}f(x) \neq \emptyset$  a. e.

注意. 以下,  $J^2f(x) = J^{2,+}f(x) \cap J^{2,-}f(x)$  と表す.  $(p, X) \in J^2f(\hat{x})$  であるには

$$f(x) = f(\hat{x}) + \langle p, x - \hat{x} \rangle + \frac{1}{2} \langle X(x - \hat{x}), x - \hat{x} \rangle + o(|x - \hat{x}|^2) \quad (x \rightarrow \hat{x})$$

が必要十分である. このような  $(p, X)$  は高々一つ.

注意.  $Df, D^2f$  で超関数の意味の微分を表すとして, 補題 3 の仮定の下で

$$\begin{cases} D^2f = l + \mu, & l \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^N), \mu \text{ は Radon 測度,} \\ \mu \geq 0, & \mu \text{ は Lebesgue 測度に関して singular.} \end{cases}$$

さらに,

$$(Df(x), l(x)) \in J^2f(x) \quad \text{a. e.}$$

が成り立つ.

上の結果については, [1], [23], [13] を参照のこと.

補題 4.  $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  は semiconvex,  $f(x) < f(0)$  ( $\forall x \neq 0$ ) ならば,  $\forall r > 0$  に対して,  $\text{meas}\{x \in B_r(0) \mid \text{ある } p \in B_r(0) \text{ に対して } y \mapsto f(y) - \langle p, y \rangle \text{ は } x \text{ で極大値をとる}\} > 0$ .

ここで,  $\text{meas } A$  は  $A \subset \mathbf{R}^N$  の Lebesgue 測度を表す.

略証.  $f \in C^2(\mathbf{R}^N)$  と仮定する.  $r > 0$  とする.

$E = \{x \in B_r(0) \mid \text{ある } p \in B_r(0) \text{ に対して } y \mapsto f(y) - \langle p, y \rangle \text{ は } x \text{ で極大をとる}\}$

とおく.  $f(0) = 0$  とする.  $\delta > 0$  を  $f(x) < -\delta \quad \forall x \in \partial B_r(0)$  となるようにとる.  $p \in B_{\delta/r}(0)$  に対して,  $y \mapsto f(y) - \langle p, y \rangle$  は  $\text{int } B_r(0)$  で最大値をとる. すなわち,  $\varepsilon = \delta/r$  と固定するとき,  $\forall p \in B_\varepsilon(0)$  に対して  $x \in E$  が存在し,  $Df(x) = p$ . つまり,  $B_\varepsilon(0) \subset Df(E)$ . 従って

$$\text{meas } B_\varepsilon(0) = c_N \varepsilon^N = \int_{B_\varepsilon(0)} dp \leq \int_{Df(E)} dp \leq \int_E |\det D^2f(x)| dx.$$

$c_N$  は  $\mathbf{R}^N$  の単位球の体積である. この最後の不等式は Sard の補題の一般化あるいは geometric measure theory における area formula または coarea formula によって正当化される. (等式にならないのは, 一般に  $x \mapsto Df(x)$  が一対一でないからと考えればよい.)  $f(x) + C|x|^2$  は convex なので,  $D^2f(x) + 2CI \geq 0$ . 一方,  $D^2f(x) \leq 0$  on  $E$ . ゆえに,  $-2CI \leq D^2f(x) \leq 0$  on  $E$ . 従って,  $|\det D^2f(x)| \leq (2C)^N$  on  $E$ . これより,  $c_N \varepsilon^N \leq (2C)^N \text{meas } E$ . よって,  $\text{meas } E \geq \frac{c_N \varepsilon^N}{(2C)^N}$ . 一般の  $f$  については, 滑らかな関数による近似と Borel-Cantelli の定理に基づく極限操作が必要になる. ■

補題 5.  $f: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  は semiconvex,  $f(x) < f(0)$  ( $\forall x \neq 0$ ) であるとする. このとき, ある点列  $x_n, p_n \rightarrow 0$  に対してつぎが成立する:  $J^2f(x_n) \neq \emptyset$ ,  $x \mapsto f(x) - \langle p_n, x \rangle$  は  $x_n$  で極大となる.

証明. 補題 3 と補題 4 の二つを組み合わせればよい. ■

$u: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  は上に有界な関数とする.  $\varepsilon > 0$  とする.  $u$  の sup-convolution  $u^\varepsilon: \mathbf{R}^N \rightarrow \mathbf{R}$  をつぎの様に定義する.

$$u^\varepsilon(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^N} \left( u(y) - \frac{1}{2\varepsilon} |x - y|^2 \right).$$

補題 6.  $u^\varepsilon \geq u$  in  $\mathbf{R}^N$  であり,  $x \mapsto u^\varepsilon(x) + (1/2\varepsilon)|x|^2$  は convex である.

証明. まず,  $u^\varepsilon(x) \geq u(x) - (1/2\varepsilon)|x - x|^2 = u(x)$ . また  $u^\varepsilon(x) + (1/2\varepsilon)|x|^2 = \sup_{y \in \mathbf{R}^N} (u(y) +$

$\frac{1}{\varepsilon}\langle x, y \rangle - \frac{1}{2\varepsilon}|y|^2$  において, 右辺は  $x$  の affine 関数の sup であり, 従って convex 関数である.  $\blacksquare$   
 semiconvex 関数は局所 Lipschitz 連続であることに注意する.

**補題 7.**  $(p, X) \in \bar{J}^{2,+}u^{\varepsilon}(x)$  のとき,  $X \geq -(1/\varepsilon)I$ .

**証明.** 関数  $f(x) \equiv u^{\varepsilon}(x) + (1/2\varepsilon)|x|^2$  は convex なので, 各  $x \in \mathbf{R}^N$  に対して  $f(y) - f(x) \geq \langle q, y - x \rangle \forall y \in \mathbf{R}^N$  とする  $q \in \mathbf{R}^N$  が存在する. 従って  $(p, X) \in \bar{J}^{2,+}u^{\varepsilon}(x)$  であれば,  $y \rightarrow x$  のとき

$$\begin{aligned} \langle q, y - x \rangle &\leq \langle p, y - x \rangle + \frac{1}{2}\langle X(y - x), y - x \rangle + \frac{1}{2\varepsilon}(|y|^2 - |x|^2) + o(|y - x|^2) \\ &\leq \left\langle p + \frac{1}{\varepsilon}x, y - x \right\rangle + \frac{1}{2}\left\langle \left(X + \frac{1}{\varepsilon}I\right)(y - x), y - x \right\rangle + o(|y - x|^2). \end{aligned}$$

これより,  $q = p + (1/\varepsilon)x$ ,  $X + (1/\varepsilon)I \geq 0$  が分かる. 従って,  $(p, X) \in \bar{J}^{2,+}u^{\varepsilon}(x)$  のとき  $X \geq -(1/\varepsilon)I$ .  $\blacksquare$

**補題 8.**  $u \in USC(\mathbf{R}^N)$  とする.  $u$  は  $\mathbf{R}^N$  上で上に有界であるとする.  $(p, X) \in \bar{J}^{2,+}u^{\varepsilon}(x)$  であれば,  $(p, X) \in \bar{J}^{2,+}u(x + \varepsilon p)$  であり,  $u^{\varepsilon}(x) = u(x + \varepsilon p) - (\varepsilon/2)|p|^2$  が成り立つ.

**注意.** 以下,  $USC(\mathcal{Q})$  により  $\mathcal{Q}$  上で上半連続な実数値関数の全体を表す.  $LSC(\mathcal{Q})$  により  $\mathcal{Q}$  上で下半連続な実数値関数の全体を表す.

**証明.**  $\hat{x} \in \mathbf{R}^N$ ,  $(p, X) \in \bar{J}^{2,+}u^{\varepsilon}(\hat{x})$  を固定する.  $\varphi \in C^2(\mathbf{R}^N)$  を  $u^{\varepsilon} - \varphi$  が  $\hat{x}$  で極大値をとり, さらに  $D\varphi(\hat{x}) = p$ ,  $D^2\varphi(\hat{x}) = X$  を満たすものとする.  $u$  は上に有界で上半連続だから,  $u^{\varepsilon}(\hat{x}) = u(\hat{y}) - \frac{1}{2\varepsilon}|\hat{x} - \hat{y}|^2$  とする  $\hat{y} \in \mathbf{R}^N$  がある. このとき  $(x, y) \mapsto u(y) - \frac{1}{2\varepsilon}|x - y|^2 - \varphi(x)$  は  $(\hat{x}, \hat{y})$  において極大値をとる. 特に,  $x = y + \hat{x} - \hat{y}$  として,  $y \mapsto u(y) - \varphi(y + \hat{x} - \hat{y})$  は  $\hat{y}$  で極大値をとる. 従って,  $(D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \in \bar{J}^{2,+}u(\hat{y})$ . すなわち,  $(p, X) \in \bar{J}^{2,+}u(\hat{y})$ . 一方,  $x \mapsto u(\hat{y}) - (1/2\varepsilon)|x - \hat{y}|^2 - \varphi(x)$  は  $\hat{x}$  で極大値をとる. 従って,  $-(1/\varepsilon)(\hat{x} - \hat{y}) - D\varphi(\hat{x}) = 0$ . すなわち,  $\hat{y} = \hat{x} + \varepsilon D\varphi(\hat{x}) = \hat{x} + \varepsilon p$ . こうして,  $(p, X) \in \bar{J}^{2,+}u(\hat{x} + \varepsilon p)$ . また,  $u^{\varepsilon}(\hat{x}) = u(\hat{y}) - (1/2\varepsilon)|\hat{x} - \hat{y}|^2$  より  $u^{\varepsilon}(\hat{x}) = u(\hat{x} + \varepsilon p) - (\varepsilon/2)|p|^2$ .  $\blacksquare$

**補題 9.**  $u, v \in USC(\mathbf{R}^N)$ ,  $A \in \mathbf{S}^{2N}$ ,

$$u(0) = v(0) = 0, \quad u(x) + v(y) \leq \frac{1}{2}\left\langle A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^N$$

と仮定する. このとき, 各  $\varepsilon > 0$  に対して, つぎの関係が成り立つような  $X, Y \in \mathbf{S}^N$  がある.

$$(0, X) \in \bar{J}^{2,+}u(0), \quad (0, Y) \in \bar{J}^{2,+}v(0), \quad -\left(\frac{1}{\varepsilon} + \|A\|\right) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq A + \varepsilon A^2.$$

**注意.**  $A = \alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$ ,  $\alpha > 0$  とする.  $\varepsilon = \frac{1}{\alpha}$  ととれば,  $A^2 = 2\alpha A$ ,  $\|A\| = 2\alpha$  となり, 最後の不等式は

$$-3\alpha \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

となる.

**証明.**  $z, \zeta \in \mathbf{R}^{2N}$  とする.

$$\langle Az, z \rangle = \langle A(z - \zeta + \zeta), z - \zeta + \zeta \rangle \leq \langle A(z - \zeta), z - \zeta \rangle + 2\langle A\zeta, z - \zeta \rangle + \langle A\zeta, \zeta \rangle$$

$$\leq \|A\|\|z - \zeta\|^2 + 2|A\zeta|\|z - \zeta\| + \langle A\zeta, \zeta \rangle \leq \|A\|\|z - \zeta\|^2 + \varepsilon|A\zeta|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|z - \zeta\|^2 + \langle A\zeta, \zeta \rangle$$

$$\leq \left( \|A\| + \frac{1}{\varepsilon} \right) |z - \zeta|^2 + \langle (A + \varepsilon A^2)\zeta, \zeta \rangle$$

となる.  $x, y, \xi, \eta \in \mathbf{R}^N$  として,

$$u(x) + v(y) \leq \frac{1}{2} \left\langle (A + \varepsilon A^2) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle + \frac{1}{2} \left( \|A\| + \frac{1}{\varepsilon} \right) (|x - \xi|^2 + |y - \eta|^2).$$

$\lambda = 1/(\|A\| + 1/\varepsilon)$  とおくと

$$u(x) - \frac{1}{2\lambda} |x - \xi|^2 + v(y) - \frac{1}{2\lambda} |y - \eta|^2 \leq \frac{1}{2} \left\langle (A + \varepsilon A^2) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle.$$

ゆえに

$$u^\lambda(\xi) + v^\lambda(\eta) \leq \frac{1}{2} \left\langle (A + \varepsilon A^2) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right\rangle.$$

特に,  $u^\lambda(0) + v^\lambda(0) \leq 0$ . また,  $u^\lambda(0) \geq u(0) = 0$ ,  $v^\lambda(0) \geq v(0) = 0$ . よって,  $u^\lambda(0) = v^\lambda(0) = 0$ .

$\delta > 0$  とし,  $f: \mathbf{R}^{2N} \rightarrow \mathbf{R}$  を

$$f(x, y) = u^\lambda(x) + v^\lambda(y) - \frac{1}{2} \left\langle (A + \varepsilon A^2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle - \delta(|x|^2 + |y|^2).$$

と定義する.  $f$  は semiconvex であり,  $f(0, 0) = 0 > f(x, y)$  ( $\forall (x, y) \neq (0, 0)$ ) を満たす. 補題 5 により  $\mathbf{R}^N$  の点列  $\{x_n\}, \{y_n\}, \{p_n\}, \{q_n\}$  で  $x_n, y_n, p_n, q_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) を満たし, さらにつぎを満たすものが取れる:

$J^2 f(x_n, y_n) \neq \emptyset$ ,  $(x, y) \mapsto f(x, y) - \langle p_n, x \rangle - \langle q_n, y \rangle$  は  $(x_n, y_n)$  で極大値をとる.

ここで, 前者は  $J^2 u^\lambda(x_n) \neq \emptyset$ ,  $J^2 v^\lambda(y_n) \neq \emptyset$  を意味する. そこで  $(\xi_n, X_n) \in J^2 u(x_n)$ ,  $(\eta_n, Y_n) \in J^2 v(y_n)$  とする. 補題 2 より

$$\begin{pmatrix} \xi_n \\ \eta_n \end{pmatrix} = (A + \varepsilon A^2) \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + 2\delta \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_n \\ q_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X_n & 0 \\ 0 & Y_n \end{pmatrix} \leq A + \varepsilon A^2.$$

前者より  $\xi_n, \eta_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) が分かる. 補題 8 より

$$\begin{aligned} & (\xi_n, X_n) \in J^{2,+} u(x_n + \lambda \xi_n), \quad (\eta_n, Y_n) \in J^{2,+} v(y_n + \lambda \eta_n), \\ & u(x_n + \lambda \xi_n) = u^\lambda(x_n) + \frac{\lambda}{2} |\xi_n|^2, \quad v(y_n + \lambda \eta_n) = v^\lambda(y_n) + \frac{\lambda}{2} |\eta_n|^2. \end{aligned}$$

補題 7 より  $X_n \geq -(1/\lambda)I$ ,  $Y_n \geq -(1/\lambda)I$ . こうして,

$$-\frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X_n & 0 \\ 0 & Y_n \end{pmatrix} \leq A + \varepsilon A^2.$$

これより, 特に,  $\{X_n\}, \{Y_n\}$  は有界列である. 従って  $\{X_n\}, \{Y_n\}$  は収束列であるとしてよい.

$X_\delta = \lim X_n$ ,  $Y_\delta = \lim Y_n$  とおく.  $n \rightarrow \infty$  として,

$$-\frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X_\delta & 0 \\ 0 & Y_\delta \end{pmatrix} \leq A + \varepsilon A^2.$$

また,  $u(x_n + \lambda \xi_n) \rightarrow u^\lambda(0) = 0 = u(0)$ ,  $v(y_n + \lambda \eta_n) \rightarrow v^\lambda(0) = 0 = v(0)$ ,  $\xi_n \rightarrow 0$ ,  $\eta_n \rightarrow 0$  だから,

$$(0, X_\delta) \in \bar{J}^{2,+} u(0), \quad (0, Y_\delta) \in \bar{J}^{2,+} v(0).$$

そこで,  $\delta > 0$  とすれば, 適当な  $X, Y \in \mathbf{S}^N$  に対してつぎが成り立つことが分かる.

$$(0, X) \in \bar{J}^{2,+} u(0), \quad (0, Y) \in \bar{J}^{2,+} v(0),$$

$$-\frac{1}{\lambda} \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq A + \varepsilon A^2, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\varepsilon} + \|A\|. \quad \blacksquare$$

補題 1 の証明.  $u, v \in C(\mathcal{Q})$  であり,  $u(x) - v(y) - (\alpha/2)|x - y|^2$  は  $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$  で最大となるとする.  $\varepsilon > 0$  を十分に小さくとる. 特に,  $\hat{x} + B_\varepsilon(0) \subset \mathcal{Q}$  は成り立つとする.  $\tilde{u}, \tilde{v} \in USC(\mathbf{R}^N)$  を

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} u(\hat{x}+x) - u(\hat{x}) - \alpha \langle \hat{x} - \hat{y}, x \rangle & \forall x \in \text{int } B_\varepsilon(0), \\ -\frac{1}{\varepsilon} & \forall x \in (\text{int } B_\varepsilon(0))^c, \end{cases}$$

$$\tilde{v}(x) = \begin{cases} -v(\hat{y}+x) + v(\hat{y}) + \alpha \langle \hat{x} - \hat{y}, x \rangle & \forall x \in \text{int } B_\varepsilon(0), \\ -\frac{1}{\varepsilon} & \forall x \in (\text{int } B_\varepsilon(0))^c \end{cases}$$

とおく.  $\tilde{u}(0) = \tilde{v}(0) = 0$  であり, 更に

$$\begin{aligned} & \tilde{u}(x) + \tilde{v}(y) - \frac{\alpha}{2} |x-y|^2 \\ &= u(\hat{x}+x) - v(\hat{y}+y) - u(\hat{x}) + v(\hat{y}) - \alpha \langle \hat{x} - \hat{y}, x-y \rangle - \frac{\alpha}{2} |x-y|^2 \\ &= u(\hat{x}+x) - v(\hat{y}+y) - u(\hat{x}) + v(\hat{y}) - \frac{\alpha}{2} |x-y - (\hat{x} - \hat{y})|^2 + \frac{\alpha}{2} |\hat{x} - \hat{y}|^2 \\ &\leq 0 \quad \forall (x, y) \in \text{int } B_\varepsilon(0) \times \text{int } B_\varepsilon(0) \end{aligned}$$

であるので,  $\tilde{u}(x) + \tilde{v}(y) - \frac{\alpha}{2} |x-y|^2 \leq 0 \quad \forall x, y \in \mathbf{R}^N$  としてよい. 補題9より, ある  $X, Y \in \mathbf{S}^N$  に対して,

$$(0, X) \in \bar{J}^{2,+} \tilde{u}(0), \quad (0, Y) \in \bar{J}^{2,-} \tilde{v}(0), \quad -3\alpha \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \leq 3\alpha \begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix}$$

となる. このとき  $(0, X) \in \bar{J}^{2,+} \tilde{u}(0) = \bar{J}^{2,+} u(\hat{x}) - (\alpha(\hat{x} - \hat{y}), 0)$ . すなわち,  $(\alpha(\hat{x} - \hat{y}), X) \in \bar{J}^{2,+} u(\hat{x})$ . 同じく,  $(-\alpha(\hat{x} - \hat{y}), Y) \in \bar{J}^{2,+} (-v)(\hat{y}) = -\bar{J}^{2,-} v(\hat{y})$ . 従って,  $(\alpha(\hat{x} - \hat{y}), -Y) \in \bar{J}^{2,-} v(\hat{y})$ . ■

### §3 安定性と解の存在.

#### 3.1 安定性. つぎの意味で粘性解は安定である.

命題 4.  $F_n, F \in C(\Gamma)$ ,  $F_n \rightarrow F$  in  $C(\Gamma)$ ,  $u_n, u \in C(\Omega)$ ,  $u_n \rightarrow u$  in  $C(\Omega)$ ,  $F_n[u_n] \leq 0$  in  $\Omega$  が成り立つとき,  $F[u] \leq 0$  in  $\Omega$ .

証明.  $\varphi \in C^2(\Omega)$ ,  $\hat{x} \in \Omega$  とし,  $u - \varphi$  は  $\hat{x}$  で極大を取るとする. 必要があれば,  $\varphi$  を取り替えることにより,  $(u - \varphi)(x) \leq (u - \varphi)(\hat{x}) - |x - \hat{x}|^4 \quad \forall x \in \Omega$  と仮定してよい.  $\Omega$  を小さいものに取り替えて, 十分に大きい  $n$  のみを考えるとして,  $u_n - \varphi$  は  $x_n \in \Omega$  で最大となり,  $x_n \rightarrow \hat{x}$  と仮定してよい. このとき,  $F_n[u_n] \leq 0$  より,  $F_n(x_n, u_n(x_n), D\varphi(x_n), D^2\varphi(x_n)) \leq 0$ .  $n \rightarrow \infty$  として,  $F(\hat{x}, u(\hat{x}), D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \leq 0$ . ■

注意. 特に,  $-\varepsilon \Delta u^\varepsilon + H(Du^\varepsilon) = f(x)$  in  $\Omega$ ,  $u^\varepsilon \rightarrow u$  in  $C(\Omega)$  ならば,  $u$  は  $H(Du) = f(x)$  を粘性解の意味で満たす. この事実により, 流体力学における近似解法である粘性消滅法とのアナロジーから '粘性解' と命名された.

3.2 解の定義の一般化. 関数  $u: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  は局所有界であるとし, 関数  $u$  の上半連続包 (upper semicontinuous envelope)  $u^*$  と下半連続包 (lower semicontinuous envelope)  $u_*$  をつぎで定義する.

$$u^*(x) = \limsup_{r \downarrow 0} \sup \{u(y) \mid |y-x| \leq r\}, \quad u_*(x) = \liminf_{r \downarrow 0} \inf \{u(y) \mid |y-x| \leq r\}.$$

このとき,  $u_* \leq u \leq u^*$ ,  $u_* \in LSC(\Omega)$ ,  $u^* \in USC(\Omega)$ . また,  $u \in USC(\Omega) \iff u^* = u$  であり,

$u \in LSC(\Omega) \iff u_* = u$  である.  $F: \Omega \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}^N \times \mathbf{S}^N \rightarrow \mathbf{R}$  は局所有界とする.

**定義.**  $u$  が粘性劣解 (粘性優解) であるとはつきが成立することである. (i)  $u$  は局所有界.

(ii)  $F_*(x, u^*(x), p, X) \leq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall (p, X) \in J^{2,+}u^*(x)$  ( $F^*(x, u_*(x), p, X) \geq 0 \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall (p, X) \in J^{2,-}u_*(x)$ ).

再び, 安定性について考える.  $u_n: \Omega \rightarrow \mathbf{R}, F_n: \Gamma \rightarrow \mathbf{R}$  ( $n=1, 2, \dots$ ) とし, 関数列  $\{u_n\}, \{F_n\}$  は局所一様有界であるとする.

$$\bar{u}(x) = \limsup_{r \downarrow 0} \{u_n(y) \mid n \geq 1/r, |y-x| \leq r\}, \quad \underline{u}(x) = \liminf_{r \downarrow 0} \{u_n(y) \mid n \geq 1/r, |y-x| \leq r\},$$

$$\bar{F}(z) = \limsup_{r \downarrow 0} \{F_n(\zeta) \mid n \geq 1/r, |\zeta-z| \leq r\}, \quad \underline{F}(z) = \liminf_{r \downarrow 0} \{F_n(\zeta) \mid n \geq 1/r, |\zeta-z| \leq r\}$$

とおく.  $\bar{u} \in USC(\Omega), u \in LSC(\Omega), \bar{F} \in USC(\Gamma), \underline{F} \in LSC(\Gamma)$  となる.

**命題 5** ([2]). 上の局所一様有界性の仮定に加えて,  $F_n[u_n] \leq 0$  in  $\Omega$  ( $n=1, 2, \dots$ ) と仮定する. このとき,  $\underline{F}[\bar{u}] \leq 0$  in  $\Omega$ .

**証明.**  $\varphi \in C^2(\Omega)$  とし,  $\bar{u} - \varphi$  が  $\hat{x} \in \Omega$  で極大値をとるとする.  $(\bar{u} - \varphi)(\hat{x}) = 0, (\bar{u} - \varphi)(x) \leq -|x - \hat{x}|^4 \quad \forall x \in B_\varepsilon(\hat{x})$  と仮定してよい. ただし,  $\varepsilon > 0$  である.  $\{n\}$  の部分列に置き替えることを考えれば,  $x_n \rightarrow \hat{x}, u_n^*(x_n) \rightarrow \bar{u}(\hat{x})$  となる列  $\{x_n\}$  が取れるとしてよい.  $((u_n^* - \varphi)(x) + |x - \hat{x}|^4)^+ \rightarrow 0$  ( $B_\varepsilon(\hat{x})$  上で一様収束) が分かる. 十分に大きな  $n$  のみ考えて,  $u_n^* - \varphi$  は  $y_n$  で極大値をとり,  $u_n^*(y_n) \rightarrow \bar{u}(\hat{x}), y_n \rightarrow \hat{x}$  となるような  $\{y_n\} \subset B_\varepsilon(\hat{x})$  が存在するとしてよい.  $F_n[u_n] \leq 0$  より,  $(F_n)_*(y_n, u_n^*(y_n), D\varphi(y_n), D^2\varphi(y_n)) \leq 0. n \rightarrow \infty$  として,  $\underline{F}(\hat{x}, \bar{u}(\hat{x}), D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \leq 0. \blacksquare$

**命題 6.**  $S$  はある空でない粘性劣解の族とする.  $S$  は局所一様有界であるとする.  $u(x) = \sup\{v(x) \mid v \in S\} \quad \forall x \in \Omega$  とおく. このとき,  $u \in SUB$  である.

**証明.**  $\varphi \in C^2(\Omega)$  とし,  $u^* - \varphi$  は  $\hat{x} \in \Omega$  で極大値をとるとする.  $x_n \rightarrow \hat{x}, v_n(x_n) \rightarrow u^*(\hat{x})$  となる列  $v_n \in S, x_n \in \Omega$  を取ることができる.  $\bar{v}(x) = \limsup_{r \downarrow 0} \{v_n(y) \mid n \geq 1/r, |y-x| \leq r\}$  とおく.  $\bar{v} \leq u^*, \bar{v}(\hat{x}) = u^*(\hat{x})$  となり,  $\bar{v} - \varphi$  は  $\hat{x}$  で極大値をとる. 命題 5 より,  $F_*(\hat{x}, \bar{v}(\hat{x}), D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \leq 0. \blacksquare$

**命題 7** (Perron の方法).  $F$  は退化楕円型であり,  $f, g: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  は局所有界であるとする.  $f \in SUB, g \in SUP, f \leq g$  in  $\Omega$  とし,  $u(x) = \sup\{v(x) \mid v \in SUB, f \leq v \leq g \text{ in } \Omega\} \quad \forall x \in \Omega$  とおく. このとき,  $u \in SOL$ . さらに,  $f \leq u \leq g$  in  $\Omega$ .

**証明.** まず,  $f \leq u \leq g$  in  $\Omega$  は明らか. 従って,  $u$  は局所有界である. 命題 6 より,  $u \in SUB$  が分かる.  $u \in SUP$  を示したい.  $u \notin SUP$  と仮定する.  $\hat{x} \in \Omega$  と  $\varphi \in C^2(\Omega)$  が存在し,  $u_* - \varphi$  は  $\hat{x}$  で極小値をとり,  $F^*(\hat{x}, u_*(\hat{x}), D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) < 0$  を満たす. まず,  $u_*(\hat{x}) < g_*(\hat{x})$  を示す. 仮に,  $u_*(\hat{x}) \geq g_*(\hat{x})$  ならば,  $u_*(\hat{x}) = g_*(\hat{x})$ . すると,  $g_* - \varphi$  は  $\hat{x}$  で極小値をとることになり,  $g \in SUP$  より  $F^*(\hat{x}, g_*(\hat{x}), D\varphi(\hat{x}), D^2\varphi(\hat{x})) \geq 0$ . これは矛盾である.  $u_*(\hat{x}) < g_*(\hat{x})$  が分かった.

$(u_* - \varphi)(\hat{x}) = 0$  としてよい.  $\varphi(x)$  を  $\varphi(x) - |x - \hat{x}|^4$  に置き替え,  $(u_* - \varphi)(x) \geq |x - \hat{x}|^4 \quad \forall x \in B_{2\delta}(\hat{x})$  とできる. ただし,  $\delta > 0$ . 半連続性より,  $F^*(x, \varphi(x) + r, D\varphi(x), D^2\varphi(x)) < 0 \quad \forall x \in B_{2\delta}(\hat{x})$  としてよい. 同様に,  $\varphi(x) + r < g_*(x) \quad \forall x \in B_{2\delta}(\hat{x}), 0 \leq r \leq \delta$ . としてよい.  $0 < \varepsilon \leq \delta$  とし,  $v(x) = \varphi(x) + \varepsilon$  とおく.

$$\begin{cases} F^*(x, v(x), Dv(x), D^2v(x)) < 0 \quad \forall x \in B_{2\delta}(\hat{x}), v(x) < g_*(x) \quad \forall x \in B_{2\delta}(\hat{x}), \\ u(x) \geq u_*(x) \geq \varphi(x) + \delta^4 \quad \forall x \in B_\delta(\hat{x}) \end{cases}$$

が成り立つ.  $\varepsilon \leq \delta^4$  とする. このとき,  $u \geq v \quad \forall x \in B_\delta(\hat{x})$ .  $w: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  を  $w(x) = u(x)$  ( $x \in \Omega \setminus B_{2\delta}(\hat{x})$ ),  $w(x) = \max\{u(x), v(x)\}$  ( $x \in B_{2\delta}(\hat{x})$ ) により定義する.  $w(x) = u(x) \quad \forall x \in \Omega \setminus B_\delta(\hat{x})$  であるから,  $F[w] \leq 0$  in  $\Omega \setminus B_\delta(\hat{x})$ . 命題 6 より,  $F[w] \leq 0$  in  $\text{int} B_{2\delta}(\hat{x})$ . 従って,  $F[w] \leq 0$  in  $\Omega$ .

ところが,  $w_*(\hat{x}) = \max\{u_*(\hat{x}), \varphi(\hat{x}) + \varepsilon\} > u_*(\hat{x})$ . ゆえに,  $w \not\leq u$ . また,  $f \leq w \leq g$  in  $\Omega$ . これは,  $u$  の定義に矛盾する. ■

以下では, 再び  $\Omega$  は有界な開集合であるとする.

**定理 4.** (A1)-(A3) を仮定する.  $u \in SUB$ ,  $v \in SUP$ ,  $u^* \leq v_*$  on  $\partial\Omega$  とする. このとき,  $u^* \leq v_*$  in  $\Omega$ .

**注意.**  $x \in \partial\Omega$  のときには,  $u^*, v_*$  の値をつぎのように定義する.

$$u^*(x) = \lim_{r \downarrow 0} \sup \{u(y) \mid y \in \Omega, |y-x| \leq r\}, \quad v_*(x) = \lim_{r \downarrow 0} \inf \{v(y) \mid y \in \Omega, |y-x| \leq r\}.$$

つぎの事に注意すれば, 定理 3 と同じ方針で証明される.  $\max_{\bar{\Omega}}(u^* - v_*) > 0$  と仮定する.  $\Phi_\alpha(x, y) = u^*(x) - v_*(y) - \frac{\alpha}{2}|x-y|^2$  とおく.  $\Phi_\alpha \in USC(\bar{\Omega} \times \bar{\Omega})$  なので,  $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}$  上に  $\Phi_\alpha$  の最大点が存在する. 一つの最大点を  $(x_\alpha, y_\alpha)$  と表す.  $\Phi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) \geq u^*(x_\alpha) - v_*(y_\alpha) \quad \forall x_\alpha \in \bar{\Omega}$  であり, 従って,  $\Phi_\alpha(x_\alpha, y_\alpha) \geq \max(u^* - v_*) > 0$ . ゆえに,  $\alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 \leq 2M$ . ただし,  $M = \sup_{\bar{\Omega}}|u| + \sup_{\bar{\Omega}}|v|$  とする. これより,  $\alpha \rightarrow \infty$  のとき  $x_\alpha - y_\alpha \rightarrow 0$ . さらに,  $\alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 \rightarrow 0$  ( $\alpha \rightarrow \infty$ ) が成り立つ. これを確かめるために,  $\overline{\lim}_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 = 2\varepsilon$ ,  $\varepsilon > 0$  と仮定する. 適当な列  $\{\alpha_n\}$  に対して,  $\alpha_n \rightarrow \infty$  と  $\alpha_n|x_{\alpha_n} - y_{\alpha_n}|^2 \geq \varepsilon$  が成り立つ.  $\Omega$  の有界性より, さらに  $x_{\alpha_n} \rightarrow \hat{x}$ ,  $y_{\alpha_n} \rightarrow \hat{x}$  としてよい.  $n \rightarrow \infty$  として

$$u^*(\hat{x}) - v_*(\hat{x}) \geq \varepsilon + \max(u^* - v_*).$$

これは矛盾である. ゆえに  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha|x_\alpha - y_\alpha|^2 = 0$ .

**定理 5.** (A1)-(A3) を仮定する.  $f, g \in C(\bar{\Omega})$ ,  $f \leq g$  in  $\bar{\Omega}$ ,  $f = g$  on  $\partial\Omega$ ,  $f \in SUB$ ,  $g \in SUP$  と仮定する. このとき,  $u \in SOL \cap C(\bar{\Omega})$  が存在する. さらに,  $f \leq u \leq g$  in  $\bar{\Omega}$  を満たす.

**証明.**  $u(x) = \sup\{v(x) \mid v \in SUB, f \leq v \leq g \text{ in } \Omega\}$  とおく. 命題 7 より,  $u \in SOL$  であり, また  $f \leq u \leq g$  である.  $f, g \in C(\bar{\Omega})$  なので,  $f \leq u_* \leq u^* \leq g$  in  $\bar{\Omega}$ .  $f = g$  on  $\partial\Omega$  より,  $u^* = u_*$  on  $\partial\Omega$ . 従って, 定理 4 より,  $u^* \leq u_*$  in  $\bar{\Omega}$ . ゆえに,  $u_* = u^* \in USC \cap LSC(\bar{\Omega}) = C(\bar{\Omega})$ . この  $u$  が求めるものである. ■

**おわりに** 以上のことを理解すれば, 粘性解を一通り勉強したことになる. User's Guide をさらに進んで学べば, これまでの研究の発展や今後の方向などを知ることができるだろう. 粘性解の研究に興味を持たれた方は, 最適制御, 大偏差原理 (large deviation), 均質化理論 (homogenization), 曲面の運動への応用などの具体的な問題を頭において, 研究の方向を見極めていくのがよいだろう. このような具体的な問題として, 最近の Jensen の研究 [24] も興味深い. 参考文献は User's Guide に詳しいので, ここでは極く一部の文献のみを挙げておいた. この拙文を書くにあたり小池茂昭氏と佐藤元彦氏に貴重な意見を頂いた. レフリーの方には, たくさんのミスプリの指摘と有用な意見を頂いた. ここに, これら 3 氏に感謝する.

#### 文 献

[1] A. D. Aleksandrov, Almost everywhere exist-

ence of the second differential of a convex function and some properties of convex functions, Leningrad Univ. Ann. (Math. Ser.) 37 (1939),

- 3-35 (Russian).
- [2] G. Barles and B. Perthame, Discontinuous solutions of deterministic optimal stopping time problems, *Modèl Math. Anal. Num.*, **21** (1987), 557-579.
- [3] G. Barles, H. M. Soner and P. E. Souganidis, Front propagation and phase field theory, *SIAM J. Control Optim.*, **31** (1993), 439-469.
- [4] L. Caffarelli, Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations, *Ann. Math.*, **130** (1989), 180-213.
- [5] Y.-G. Chen, Y. Giga and S. Goto, Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations, *J. Diff. Geometry*, **33** (1991), 749-786.
- [6] M. G. Crandall, L. C. Evans and P.-L. Lions, Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **282** (1984), 487-502.
- [7] M. G. Crandall and H. Ishii, The maximum principle for semicontinuous functions, *Differential and Integral Equations*, **3** (1990), 1001-1014.
- [8] M. G. Crandall, H. Ishii and P.-L. Lions, User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **27** (1992), 1-67.
- [9] M. G. Crandall and P.-L. Lions, Condition d'unicité pour les solutions generalises des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **292** (1981), 183-186.
- [10] M. G. Crandall and P.-L. Lions, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **277** (1983), 1-42.
- [11] M. G. Crandall and P.-L. Lions, Hamilton-Jacobi equations in infinite dimensions, Part IV. Unbounded linear terms, *J. Func. Anal.*, **90** (1990), 237-283.
- [12] L. C. Evans, The perturbed test function technique for viscosity solutions of partial differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A* **111** (1989), 359-375.
- [13] L. C. Evans and R. Gariepy, Measure theory and fine properties of functions, *Studies in Advanced Math.* CRC Press, Boca Raton, 1992.
- [14] L. C. Evans and H. Ishii, A PDE approach to some asymptotic problems concerning random differential equations with small noise intensities, *Ann. Inst. H. Poincaré Analyse Non Linéaire*, **2** (1985), 1-20.
- [15] L. C. Evans, H. M. Soner and P. E. Souganidis, Phase transitions and generalized motion by mean curvature, *Comm. Pure Appl. Math.*, **45** (1992), 1097-1123.
- [16] L. C. Evans and P. E. Souganidis, Differential games and representation formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Indiana Univ. Math. J.*, **33** (1984), 773-797.
- [17] L. C. Evans and J. Spruck, Motion of level sets by mean curvature I, *J. Diff. Geometry*, **33** (1991), 635-681.
- [18] W. H. Fleming and H. M. Soner, Controlled markov processes and viscosity solutions, Springer-Verlag, Berlin, 1993.
- [19] W. H. Fleming, Controlled markov processes and viscosity solutions of nonlinear evolution equations, *Lezioni Fermiane, Accademia Nazionale dei Lincei, Scuola Normale Superiore Pisa*, 1986.
- [20] W. H. Fleming and P. E. Souganidis, On the existence of value function of two-player, zero-sum stochastic differential games, *Indiana Univ. Math. J.*, **38** (1989), 293-314.
- [21] H. Ishii, Perron's method for Hamilton-Jacobi equations, *Duke Math. J.*, **55** (1987), 369-384.
- [22] H. Ishii, On uniqueness and existence of solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDE's, *Comm. Pure Appl. Math.*, **42** (1989), 14-45.
- [23] R. Jensen, The maximum principle for viscosity solutions of fully nonlinear second order partial differential equations, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **101** (1988), 1-27.
- [24] R. Jensen, Uniqueness of Lipschitz extensions: Minimizing the sup norm of the gradient, to appear in *Arch. Rat. Mech. Anal.*
- [25] R. Jensen, Uniformly elliptic pdes with bounded, measurable coefficients, preprint.
- [26] P.-L. Lions, Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Research Notes in Math.*, Vol. 69, Pitman, Boston, 1982.
- [27] P.-L. Lions, Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, Part I: The dynamic programming principle and applications; Part II: Viscosity solutions and uniqueness, *Comm. Partial Differential Equations*, **8** (1983), 1101-1174; 1229-1276.
- [28] P.-L. Lions, Viscosity solutions of fully nonlinear second-order equations and optimal stochastic control in infinite dimensions Part II: Optimal control of Zakai's equation, in *Lecture notes in Math.*, vol. 1390 (G. Da Prato and L. Tubaro, eds.), Springer-Verlag, Berlin, 1988.
- [29] D. Tataru, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations with unbounded nonlinear terms, *J. Math. Anal. Appl.*, **163** (1992), 345-392.

(1993年9月3日提出)

(いしいひとし・中央大学理工学部)