Spectral analysis of particles interacting through quantum fields

廣島文生　摂南大学 工学部 数学物理学系教室*

平成 17 年 12 月 5 日

質量 m の電子のシュレディンガー作用素を $H_{\mathrm{p}} = -\Delta/2m + V$ とする．いま電子と光子の相互作用系を考える．電子のエネルギーが十分低いと仮定すれば, この系のハミルトニアンは Pauli-Fierz ハミルトニアン H_{PF} で与えられる．1996 年以来, Pauli-Fierz ハミルトニアン及びそれに関連するモデルのスペクトル解析 (基底状態，共鳴，散乱理論，平衡状態，くりこみ理論) が大きく進展した．今回は特に, 基底状態について最新の結果を報告する．詳しくは [1] 及びそこに掲載されている References を参照.

ボゾンフォック空間 $\mathcal{F} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}[\otimes_s^n L^2(\mathbb{R}^3 \times 1, 2)]$ のベクトルは光子の状態ベクトルをあらわす. $\mathcal{F}$ 上の生成・消滅作用素を $\{a^*(k,j), a(k,j)\}_{j=1,2}$ とする．H_{PF} は $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C})\otimes\mathcal{F} \cong \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus}\mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}dx$ 上の作用素として次で定義される．

$$H_{\mathrm{PF}} = \frac{1}{2m}\left\{\vec{\sigma}\cdot(-i\vec{\nabla}_x \otimes 1 - e\vec{A})\right\}^2 + V \otimes 1 + 1 \otimes H_{\mathrm{f}}.$$

ここで, $\vec{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ は Pauli-行列, $e \in \mathbb{R}$ は結合定数, A は輻射場作用素

$$\vec{A} = \sum_{j=1,2}\int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus}\left(\int a^*(k,j)\vec{e}(k,j)e^{-ikx}\frac{\overline{\hat{\varphi}(k)}}{\sqrt{2|k|}}dk + h.c.\right)dx,$$

H_{f} は $\mathcal{F}$ の自由ハミルトニアンとよばれ, $\sqrt{-\Delta}$ の第 2 量子化作用素で,

$$\sum_{j=1,2}\int |k|a^*(k,j)a(k,j)dk$$

と書かれるものである．$\sigma(H_{\mathrm{f}}) = [0,\infty)$, $\sigma_{\mathrm{p}}(H_{\mathrm{f}}) = \{0\}$ は既知である．$e = 0$ のとき H_{PF} は $H_{\mathrm{PF}}^{\text{非結合}} = H_{\mathrm{p}} \otimes 1 + 1 \otimes H_{\mathrm{f}}$ となるから, 典型的な $\sigma(H_{\mathrm{p}}) = \{E_j\}_{j=0}^{\infty} \cup [0,\infty)$ のとき, $\sigma(H_{\mathrm{PF}}^{\text{非結合}}) = [E_0, \infty)$, $\sigma_{\mathrm{p}} = \{E_j\}_{j=0}^{\infty}$ となり E_j は全て埋め込まれた点スペクトルになる．つまり H_{PF} のスペクトル解析とは**埋め込まれた点スペクトルの摂動問題**といえる．

物理的には $\hat{\varphi}(0) = 1$ なので, $\hat{\varphi}(k)/|k|^3$ の原点での特異性により $\int \hat{\varphi}(k)^2/|k|^3 dk = \infty$ となる．これは赤外発散といわれる．H_{PF} のスペクトルを解析するにあたり, 赤外発散はつねに悩みの種である．今回は主に次のことについて講演する．

*e-mail hiroshima@mpg.setsunan.ac.jp

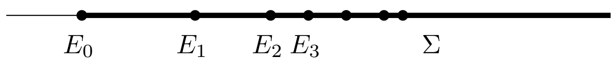

図 1: $H_{\mathrm{PF}}^{\text{非結合}}$ の埋め込まれた点スペクトル

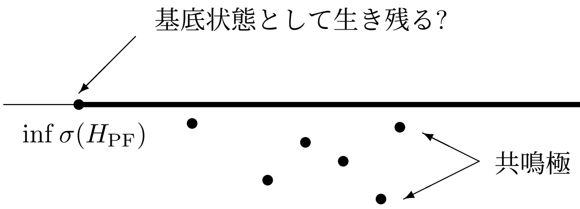

図 2: H_{PF} $(e > 0)$ のスペクトルと共鳴極

(1) **自己共役性.** H_{PF} の摂動項が非摂動項 $H_{\mathrm{PF}}^{\text{非結合}}$ に比べて大きいので自己共役性を示すことは自明ではない．しかし, 任意の e に対して H_{PF} が $D(\Delta \otimes 1) \cap D(1 \otimes H_{\mathrm{f}})$ 上自己共役であることが証明できる．

(2) **基底状態の存在, 非存在.** 任意の e で H_{PF} の基底状態が存在することが証明されている．さらに, 適当な条件のもと, $H_{\mathrm{PF}}^{\text{非結合}}$ に基底状態が存在していなくても, 十分大きな e で H_{PF} に基底状態が存在 (出現!) することが示されている．これは Enhanced Binding とよばれている．関連するモデルでは基底状態の非存在も示されている．

(3) **基底状態の縮退度.** 電子のスピンがないと仮定すれば $e^{-tH_{\mathrm{PF}}}$ を汎関数積分表示し, 無限次元版 Perron-Frobenius の定理を応用して基底状態の一意性が任意の e で示されている．スピンがある場合には $|e| \ll 1$ のときのみ, 基底状態が 2 重に縮退していることが対称性をつかって代数的に示されている．

(4) **局所性と光子数の評価.** 基底状態を Ψ_{g} とする．Ψ_{g} は電子の変数 x について指数型に減衰していることが示せる．また N を $\mathcal{F}$ の個数演算子とすれば $\Psi_{\mathrm{g}} \in \bigcap_{l=1}^{\infty} D(1 \otimes N^{l/2})$ となることがわかっている．予想は $\Psi_{\mathrm{g}} \in D(e^{\beta N})$, $\beta > 0$ である．

(5) **観測可能効果とスケーリング極限.** 直感的には H_{p} が光子と相互作用すれば $m \to m_{\mathrm{eff}} = m + \delta m > m$, $V \to V_{\mathrm{eff}} = (V(\cdot + \Delta x))_{\text{平均}}$ と補正を受けることが予想される．有効ハミルトニアン $H_{\mathrm{eff}} = -\Delta/2m_{\mathrm{eff}} + V_{\mathrm{eff}}$ を H_{PF} に適当なスケーリングを行なって, その極限から導き出すことができる．

(6) **有効質量のくりこみ.** $V = 0$ とおけば, H_{PF} は電子と光子の運動量をたし合わせた全運動量 $P_{\text{全運動量}} = -i\vec{\nabla} \otimes 1 + 1 \otimes P_{\text{輻射場}}$ と可換になり, 併進不変となる．$H_{\mathrm{PF}} = \int_{\sigma(P_{\text{全運動量}})}^{\oplus} H_{\mathrm{PF}}(p)dp$ と分解して $E(p) = \inf \sigma(H_{\mathrm{PF}}(p))$, $p \in \mathbb{R}^3$, とおく．$E(p)$ の $p = 0$ での曲率の逆数は有効質量 m_{eff} といわれている．m_{eff} の紫外発散に対する漸近挙動が摂動理論のレベルではあるが最近わかってきた．

参考文献

[1] F. Hiroshima, Analysis of ground states of atomes interacting through quantized radiation fields, preprint, 2001.