れた存在である．現在，172 ページのプレプリント [5] が公開されている．

謝辞　2009 年に Mirzakhani 氏の研究についてのワークショップを開催し，その詳細なノートを残して下さった田所勇樹氏と逆井卓也氏に感謝します．彼女の研究についてご教示下さった宮地秀樹氏，そして私がこの記事を書くことになる遠因をつくって下さった浅井哲也先生に感謝します．最後に，有益なコメントと提案をいただいた査読者の方に深く御礼申し上げます．

注　釈

1)　以下，$n=0$ のとき，すなわち，S が閉曲面のとき，二重添字 g,n の n を省略することがある．
2)　マーキングを込みで考えている．
3)　α の向きも考えれば，向きを逆にする写像類があるが，それは $\mathcal{T}_{1,1}(b)$ に自明に作用する．

文　献

[1] M. Mirzakhani, Simple geodesics and Weil–Petersson volumes of moduli spaces of bordered Riemann surfaces, Invent. Math., **167** (2007), 179–222.
[2] M. Mirzakhani, Weil–Petersson volumes and intersection theory on the moduli space of curves, J. Amer. Math. Soc., **20** (2007), 1–23.
[3] M. Mirzakhani, Growth of the number of simple closed geodesics on hyperbolic surfaces, Ann. of Math. (2), **168** (2008), 97–125.
[4] M. Mirzakhani, Ergodic theory of the earthquake flow, Inte. Math. Res. Not. IMRN, **2008**, Article ID rnm116, 39 pp.
[5] A. Eskin and M. Mirzakhani, Invariant and stationary measures for the $SL(2,\mathbb{R})$ action on Moduli space, arXiv:math.DS/1302.3320.
[6] 今吉洋一・谷口雅彦, タイヒミュラー空間論 (新版), 日本評論社, 2004.
[7] S. A Wolpert, Families of Riemann Surfaces and Weil–Petersson Geometry, CBMS Regional Conf. Ser. in Math., **113**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010.

(2015 年 2 月 14 日提出)
(なかにし　としひろ・島根大学大学院総合理工学研究科)

Martin Hairer 氏の業績

廣　島　文　生

2014 年の ICM は韓国ソウル市で 8 月 13 日から 21 日にかけて開催され，Martin Hairer が ‘2 次元 stochastic Navier–Stokes 方程式のエルゴード性を確立するための新方法の開発，及び正則構造理論を創始し，非線形確率偏微分方程式の解をくりこみ群の不動点として系統的に構成した’ という理由で Fields 賞を受賞した．本稿の目的は受賞理由となった正則構造理論について概説することである1)．[Hai13] によると，rough path 理論の確率偏微分方程式への応用 [Hai11], [Hai12] をみた Gérard Ben Arous は，それを KPZ 方程式へ応用することを Hairer に示唆したようだ．S^1 上の KPZ 方程式とは揺らぎをもった界面の時間発展方程式で Kardar, Parisi, Zhang [KPZ86] が 1986 年に導入した．$\xi=\xi_t(x)$ を確率空間 $(\Omega,\mathscr{F},P)$ 上の時空 $1+1$ 次元 white noise2) とし，その共分散を $\mathbb{E}_P[\xi_t(x)\xi_s(y)]=4\pi\delta(t-s)\delta(x-y)$ とすると KPZ 方程式は

$$\partial_t h=\partial_x^2 h+\lambda(\partial_x h)^2+\xi,\quad (x,t)\in S_1\times[0,\infty) \tag{1}$$

と表される．ここで，$\lambda\in\boldsymbol{R}$ は結合定数，$h=h_t(x)$ は時空 (x,t) での界面の高さを表す．(1) を解くために，ξ を滑らかな関数 ξ^ϵ で近似する．このときの解を h_ϵ とおき，$Z_\epsilon=e^{\lambda h_\epsilon}$ とすれば $\partial_t Z_\epsilon=$

$\partial_x^2 Z_\epsilon + \lambda\xi^\epsilon Z_\epsilon$ が成り立つ．これを Cole–Hopf (CH) 変換という．これは $\lambda\xi^\epsilon$ をポテンシャルにもつ拡散方程式なので一見解きやすくなったようにみえる．しかし，$h = \lim_{\epsilon\to 0}\lambda^{-1}\log Z_\epsilon$ が形式的に

$$\partial_t h = \partial_x^2 h + \lambda((\partial_x h)^2 - \infty) + \xi \tag{2}$$

の解になり，無限大 ∞ が現れるため，CH 解 Z_ϵ から (1) の解を再構成できるのか全く非自明であった[3)]．つまり，(1) は偏微分方程式であること，white noise ξ と非線形項 $(\partial_x h)^2$ を含むこと，くりこみが必要であることが特徴であり，古典的な確率解析で解くことは困難であった．

このような中，Hairer は CH 変換を経由せず，(1) をくりこみ理論と rough path 理論をもちいて [Hai13] で直接解いて注目され，さらに，その抽象化である正則構造理論 [Hai14] を創始した．これは $\mathscr{L}u = F(u,\xi)$ という形[4)] の非線形確率偏微分方程式の一般論を構築したことになり，KPZ 方程式の他に，3 次元トーラス上の stochastic Φ^4 模型 $\partial_t\Phi = \Delta\Phi - \Phi^3 + \xi$，放物型 Anderson 模型 $\partial_t u = \Delta u + \xi u$，stochastic Navier–Stokes 方程式 $\partial_t v = \Delta v - P(v\cdot\nabla)v + \xi$ もその範疇に入る．その特徴は，代数的な抽象化，くりこみ操作の導入，rough path 理論による正則性の弱い解の解析にある．本稿では KPZ 方程式を主題にしてその概略を紹介する．

この原稿を執筆するにあたり，小栗栖修氏，宮尾忠宏氏，佐々木格氏，鈴木章斗氏に多くの貴重な助言をいただいた．また，九州大学における笹本智弘氏の KPZ 方程式，稲浜譲氏の rough path 理論に関する集中講義，信州大での H. Weber 氏のくりこみ理論に関する講義は問題の背景を知る上で非常に役に立った．さらに，注意深く原稿を読んでいただいた査読者に感謝の意を表す．

1 Rough path 理論

Rough path 理論は T. Lyons [Lyo98] が創始し，M. Gubinelli [Gub04] が，KPZ 方程式に応用できる形に改良した．$V = \boldsymbol{R}^d$ を実線形空間，$V\otimes V$ を $d\times d$ 実行列全体と同一視する．$C^\alpha = C^\alpha([0,T],V)$ を $[0,T]$ 上の V に値をとる α-Hölder 連続関数全体とする．Rough path 理論とは，大雑把にいえば $(X,Y)\in C^\alpha\times C^\beta$ に対して，積分 $\int_0^t Y_s dX_s$ を定義するものである．例えば，$\alpha\geq 1$ であれば Stieltjes 積分として定義できるし，$\alpha+\beta\geq 1$ であればヤング積分として定義できるので，rough path 理論の出番はないが, $\alpha+\beta<1$ となるときに力を発揮する．Brown 運動のパスの Hölder 連続性より弱い連続性を考えたいので，$\alpha\in(1/3,1/2)$ を一つ固定する．$\Delta = \{(s,t)\in\boldsymbol{R}^2 | 0\leq s\leq t\leq T\}$ とし，$A:\Delta\to\boldsymbol{R}$ に対してノルムを $\|A\|_\alpha = \sup_{s\neq t\in[0,T]}|A_{s,t}|/|t-s|^\alpha$ と定める．$\mathbf{X} = (X,\mathbb{X}):\Delta\to V\oplus(V\otimes V)$ が α-Hölder 連続な rough path であるとは,

(1) $X_{s,t} = X_{s,u} + X_{u,t}$ かつ $\mathbb{X}_{s,t} = \mathbb{X}_{s,u} + \mathbb{X}_{u,t} + X_{s,u}\otimes X_{u,t}$ $(0\leq s\leq u\leq t\leq T)$,

(2) $\|X\|_\alpha<\infty$ かつ $\|\mathbb{X}\|_{2\alpha}<\infty$

を満たすことである．典型的な rough path の例は，α 次の有界変動関数 $X:[0,T]\to\boldsymbol{R}$ に対して $X_{s,t} = X_t - X_s$, $\mathbb{X}_{s,t} = \int_s^t X_{s,u}\otimes dX_u$ である．α-Hölder 連続な rough path 全体を $\mathscr{C}^\alpha = \mathscr{C}^\alpha([0,T],V)$ で表す．W を線形空間とし, $\bar{W} = L(V,W)$ を V から W への有界線形作用素全体とする．$\mathbf{X} = (X,\mathbb{X})\in\mathscr{C}^\alpha$ とし $f:V\to\bar{W}$ は C^1 関数とする．区間 $[s,t]$ が十分小さく，$r\in[s,t]$ とすれば，X_s で Taylor 展開して $f(X_r)\sim f(X_s) + \nabla f(X_s)(X_r - X_s)$ となる．ここで $\nabla f\in L(V,\bar{W})$ とみなしている．そこで，$Y\in C^\alpha([0,T],\bar{W})$ に対して，ある $Y'\in C^\alpha([0,T],L(V,\bar{W}))$ が存在して

$$R^Y_{s,t} = Y_t - Y_s - Y'_s X_{s,t}$$

が $\|R^Y\|_{2\alpha} < \infty$ となるとき $(Y, Y') \in \mathscr{D}^{2\alpha}_X$ と書いて (Y, Y') を X で control された rough path という．気持ちは Y'_s が $\nabla f(X_s)$ の代役であるが，Y' は Y の微分ではない！ $\mathscr{D}^{2\alpha}_X$ は適当なノルムでバナッハ空間になる．$\mathbf{X} = (X, \mathbb{X}) \in \mathscr{C}^\alpha$ とするとき，$\mathcal{P}$ を $[0, T]$ の分割として，

$$\int_0^T Y_s d\mathbf{X}_s = \lim_{|\mathcal{P}|\to 0} \sum_{[s,t]\in\mathcal{P}} (Y_s X_{s,t} + Y'_s \mathbb{X}_{s,t})$$

が収束し，写像 $\mathscr{D}^{2\alpha}_X \ni (Y, Y') \mapsto (\int_0^\cdot Y_s d\mathbf{X}_s, Y) \in \mathscr{D}^{2\alpha}_X$ が連続になることが示せる ([Gub04])．これを rough path 積分といい，Young 積分の拡張になっている[5)]．

2　KPZ 方程式とくりこみ理論

KPZ 方程式を解くために，white noise ξ を滑らかな関数で近似することを考える．φ は滑らかでコンパクトな台をもつ正の単調減少偶関数で $\varphi(0) = 1$ とする．$\xi^\epsilon = \xi^\epsilon_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(\epsilon k)\hat{\xi}_t(k)e^{ikx}$ とする．ここで，$\hat{\xi}_t(k)$ は ξ_t のフーリエ級数の第 k 成分．形式的には $\xi^\epsilon \to \xi$ $(\epsilon \to 0)$ となる．くりこみ理論を考えるとき二分木グラフでインデックスをつけると便利である．そこで二分木グラフ全体を $\mathscr{T}$ とする．二分木グラフは $[\vee,\bullet], \vee$ のように表し，特に根を $\bullet$ と表す．$\tau \in \mathscr{T}$ を添字にもつ確率過程 $X^\tau_\epsilon = X^\tau_{\epsilon,t}(x)$ を以下のように帰納的に定義する．$X^\bullet_\epsilon$ は，期待値ゼロの確率過程で，$\partial_t X^\bullet_\epsilon = \partial_x^2 X^\bullet_\epsilon + \Pi_0^\perp \xi^\epsilon$ を満たすとする．ここで，$\Pi_0^\perp$ は定数関数の直交補空間への射影を表す．二つの $\tau_1, \tau_2 \in \mathscr{T}$ を根 $\bullet$ でつなげた二分木グラフを $\tau = [\tau_1, \tau_2]$ と表す．例えば，$[\vee, \bullet] = [\vee,\bullet]$ である．さて，$X^{\tau_1}_\epsilon$ と $X^{\tau_2}_\epsilon$ が定義されているとき，X^τ_ϵ, $\tau = [\tau_1, \tau_2]$, を線形微分方程式 $\partial_t X^\tau_\epsilon = \partial_x^2 X^\tau_\epsilon + \Pi_0^\perp(\partial_x X^{\tau_1}_\epsilon \partial_x X^{\tau_2}_\epsilon)$ の解として定義する．さらに，Brown 運動を加えて $Y^\bullet_\epsilon = Y^\bullet_{\epsilon,t} = X^\bullet_{\epsilon,t} + \sqrt{2}\, B_t$ とする．このとき微分方程式 $\partial_t Y^\tau_\epsilon = \partial_x^2 Y^\tau_\epsilon + \partial_x Y^{\tau_1}_\epsilon \partial_x Y^{\tau_2}_\epsilon - C^\tau_\epsilon$, $Y^\tau_{\epsilon,0} = X^\tau_{\epsilon,0}$ の解 $Y^\tau_\epsilon (\tau \neq \bullet)$ と $\lim_{\epsilon\to 0} Y^\tau_\epsilon$ が存在するような定数 $C^\tau_\epsilon (\tau \neq \bullet)$ がとれる (これが主結果の一つともいえる)．$|\tau|$ を τ の節数として，

$$h_\epsilon = h_{\epsilon,t} = \sum_{\tau\in\mathscr{T}} \lambda^{|\tau|} Y^\tau_{\epsilon,t} \tag{3}$$

と定めれば，形式的に h_ϵ は均された KPZ 方程式

$$\partial_t h_\epsilon = \partial_x^2 h_\epsilon + \lambda(\partial_x h_\epsilon)^2 + \xi^\epsilon - \sum_{\tau\in\mathscr{T}} \lambda^{|\tau|} C^\tau_\epsilon \tag{4}$$

の解になる．しかし，このアプローチには困難が伴う．まず h_ϵ が定義できるのか自明ではないし，また，$\lim_{\epsilon\to 0} h_\epsilon$ を考察するときに $\lim_{\epsilon\to 0} Y^\tau_\epsilon$ の存在が示せたとしても，$\lim_{\epsilon\to 0} h_\epsilon$ の存在は自明ではない．そこで，有限個を除いて $C^\tau_\epsilon = 0$ とおく．具体的には $\tau \in \mathcal{S} = \{\vee, [\vee,\vee], [[\vee,\bullet],\bullet], [[\bullet,\vee],\bullet], [\bullet,[\vee,\bullet]], [\bullet,[\bullet,\vee]]\}$ のとき

$$C^{\vee}_\epsilon = \frac{1}{\epsilon}\int_{\boldsymbol{R}} \varphi^2(x)dx, \quad C^{[\vee,\vee]}_\epsilon = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}|\log\epsilon| - C^{6)}, \quad C^{[[\vee,\bullet],\bullet]}_\epsilon = C^{[[\bullet,\vee],\bullet]}_\epsilon = C^{[\bullet,[\vee,\bullet]]}_\epsilon = C^{[\bullet,[\bullet,\vee]]}_\epsilon = -\frac{C^{[\vee,\vee]}_\epsilon}{4}$$

とし，それ以外は $C^\tau_\epsilon = 0$ とする．よって，(4) の無限級数は有限和 $\sum_{\tau\in\mathcal{S}} \lambda^{|\tau|} C^\tau_\epsilon = \lambda C^{\vee}_\epsilon$ となる．もちろん $C^{\vee}_\epsilon \to \infty (\epsilon \to 0)$ である．さて，$h_{\epsilon,t} = h^\star_{\epsilon,t} + u_{\epsilon,t}$, $h^\star_{\epsilon,t} = \sum_{\tau\in\bar{\mathscr{T}}} \lambda^{|\tau|} Y^\tau_{\epsilon,t}$ とわける．ここで，$\bar{\mathscr{T}} = \{\bullet, \vee, [\vee,\bullet], [\bullet,\vee], [\vee,\vee], [[\vee,\bullet],\bullet], [[\bullet,\vee],\bullet], [\bullet,[\vee,\bullet]], [\bullet,[\bullet,\vee]]\}$．まず，各 τ に対して確率収束の意味で $Y^\tau_\epsilon \to Y^\tau$ が適当な可

分フレッシェ空間 $\mathcal{X}_\tau$ で示せる ([Hai13, Theorem 2.1])．特に $h^\star_\epsilon$ の極限 $h^\star$ が存在する．もう少し詳しく説明しよう．$\alpha_\bullet = 1/2$, $\alpha_\vee = 1$ と定義して帰納的に $\alpha_{[\tau_1,\tau_2]} = (\alpha_{\tau_1} \wedge \alpha_{\tau_2}) + 1$ と定義する．例えば，$\alpha_{\triangledown} = (\alpha_\vee \wedge \alpha_\vee) + 1 = 2$ となる．大雑把にいえば，Y^τ_ϵ は $C^{\alpha_\tau -}$ で Y^τ に収束することが示せる7)．次に，$u_{\epsilon,t}$ の極限の存在を示そう．以下，$\bar{Y}^\tau_\epsilon = \partial_x Y^\tau_\epsilon$ とおく．このとき $h^\star_\epsilon$ が

$$(\partial_t - \partial_x^2) h^\star_\epsilon = \lambda \left((\partial_x h^\star_\epsilon)^2 - C^\vee_\epsilon \right) + \xi^\epsilon - \sum_{\substack{\tau,\kappa \in \bar{\mathscr{T}} \\ [\tau,\kappa] \notin \bar{\mathscr{T}}}} \lambda^{|\tau|+|\kappa|+1} \bar{Y}^\tau_\epsilon \bar{Y}^\kappa_\epsilon \tag{5}$$

を満たすことが直接わかる．よって (3)–(5) から $v_\epsilon = \partial_x u_\epsilon$ は複雑な非線形偏微分方程式

$$(\partial_t - \partial_x^2) v_\epsilon = 2\lambda \partial_x \left(\bar{Y}^\bullet_\epsilon (v_\epsilon + \lambda^3 \bar{Y}^{\triangledown}_\epsilon + 4\lambda^3 \bar{Y}^{\curlyvee}_\epsilon) \right) + \partial_x F_\epsilon(v_\epsilon, t) \tag{6}$$

を満たすことがわかる．$Y^\bullet_\epsilon$ は $C^{1/2-}$ で収束なので, 他の Y^τ_ϵ の収束に比べて正則性が弱い．よって $Y^\bullet_\epsilon$ を含む項を右辺の第 1 項にまとめた．F_ϵ は Y^τ_ϵ が複雑に入りくんだ非線形項だが $Y^\bullet_\epsilon$ は含んでいない8)．F_ϵ の評価は容易である．(6) を積分方程式に戻したとき第 1 項からは，例えば $8\lambda^4 \int \bar{Y}^{\curlyvee}_\epsilon(z) dY^\bullet_\epsilon(z)$ の項が現れる．$Y^\bullet_\epsilon \in C^{1/2-}$ に注意すると，$\bar{Y}^{\curlyvee}_\epsilon \in C^{1/2-}$ なので，Hölder 指数の和が 1 より真に小さくなり，例えばヤング積分として意味をつけることができない．同じく $\bar{Y}^\bullet_\epsilon v_\epsilon$ も意味付けができない．一方で $\bar{Y}^{\triangledown}_\epsilon \in C^{1-}$ なので $\bar{Y}^\bullet_\epsilon \bar{Y}^{\triangledown}_\epsilon$ は問題ない．さて，$Y^\bullet_\epsilon \bar{Y}^{\curlyvee}_\epsilon, \bar{Y}^\bullet_\epsilon v_\epsilon$ に対して rough path 積分で意味を与えることを考える．(6) を方程式 $(\partial_t - \partial_x^2)\Phi_\epsilon = \partial_x^2 Y^\bullet_\epsilon$ の摂動とみなす．このとき熱半群 P_t で $\Phi_{\epsilon,t}(x) = \int_{-\infty}^t P_{t-s} \partial_x^2 Y^\bullet_{\epsilon,s}(x) ds$ と表せる．以下，$\delta f(x,y) = f(x) - f(y)$ とする．実は,

$$R^v_{\epsilon,t}(x,y) = \delta v_{\epsilon,t}(x,y) - v'_{\epsilon,t}(x) \delta\Phi_{\epsilon,t}(x,y) \tag{7}$$

が，適当な $\alpha > 1/2$ で ϵ に一様に $\|R^v_{\epsilon,t}\|_\alpha < \infty$ となるような $v'_{\epsilon,t}$ が存在する．また,

$$R^{\curlyvee}_{\epsilon,t}(x,y) = \delta \bar{Y}^{\curlyvee}_{\epsilon,t}(x,y) - \bar{Y}^{\Upsilon}_{\epsilon,t}(x) \delta\Phi_{\epsilon,t}(x,y) \tag{8}$$

かつ, $\|R^{\curlyvee}_{\epsilon,t}\|_\alpha < \infty$ が適当な $\alpha > 1/2$ でいえる．よって, 座標変数 x に関して $(v_\epsilon, v'_\epsilon)$ と $(\bar{Y}^{\curlyvee}_{\epsilon,t}, \bar{Y}^{\Upsilon}_{\epsilon,t})$ は $\Phi_{\epsilon,t}$ で control された rough path である．さらに $R^{\curlyvee}_\epsilon \to R^{\curlyvee} (\epsilon \to 0)$ を $C(\boldsymbol{R}, C^{1-})$ で示せる ([Hai13, Section3.2, Theorem 7.2])．ただし，この証明は非常に難解であると Hairer 自身が述べている ([Hai13, p.577])．さて $\mathbb{Y}_{\epsilon,t}(x,y) = \int_x^y \delta\Phi_{\epsilon,t}(x,z) dY^\bullet_{\epsilon,t}(z)$ とすれば，自明な等式

$$\mathbb{Y}_{\epsilon,t}(x,z) - \mathbb{Y}_{\epsilon,t}(x,y) = \mathbb{Y}_{\epsilon,t}(y,z) + \delta\Phi_{\epsilon,t}(x,y) \delta Y^\bullet_{\epsilon,t}(y,z) \tag{9}$$

が成立し，$\mathbb{Y}_\epsilon \to \mathbb{Y}$ が $C(\boldsymbol{R}, C^\gamma \times C^\gamma)$, $\gamma < 1$ で示せる ([Hai13, Proposition 7.9])．$\mathbf{Y} = (Y^\bullet, \mathbb{Y})$ とする．$p'_t(x)$ を P_t の積分核の微分とすれば，(7)–(9) から $d\mathbf{Y}_s$ を rough path 積分として,

$$(\mathcal{M}v)_t(x) = \int_0^t ds \int_{S^1} p'_{t-s}(x-y)(v_s(y) + 4\lambda^3 \bar{Y}^{\curlyvee}_s(y)) d\mathbf{Y}_s(y) \tag{10}$$

が定義できる．$\mathcal{W} = (\bigoplus_{\tau \in \bar{\mathscr{T}}_0} \mathcal{X}_\tau) \oplus C(\boldsymbol{R}, C^{3/4}) \oplus C(\boldsymbol{R}, C^{3/4})$ とし，$\Psi = (\bigoplus_{\tau \in \bar{\mathscr{T}}_0} Y^\tau) \oplus \mathbb{Y} \oplus R^{\curlyvee}$ を $\Psi : \Omega \to \mathcal{W}$ とみなす．$\delta v_t(x,y) = v'_t(x)\delta\Phi_t(x,y) + R^v_t(x,y)$, $\|R^v_t\|_\alpha < \infty$, $\alpha > 1/2$ を満たす四つ組 $\mathscr{V} = (m, v, v', R^v)$ 全体を $\mathcal{B}$ とする．m は v の空間平均．(6) と (10) から，形式的に $\epsilon \to 0$

として

$$\mathcal{K}(v_0, \mathscr{V}, \Psi)_t = P_t v_0 + 2\lambda \mathcal{M}(v)_t + \partial_x \int_0^t P_{t-s}(8\lambda^4 \bar{Y}_s^{\triangledown} \bar{Y}_s^{\bullet} + F(v, \Psi, s))ds \tag{11}$$

を定義する．ただし，非線形項 F_ϵ の $\epsilon \to 0$ の極限 F に Ψ を代入し，v_ϵ を v とおいた．形式的には写像 $v. \mapsto \mathcal{K}(v_0, V, \Psi).$ の不動点が (6) の解になる．$\mathcal{K}'(\mathscr{V}, \Psi) = 2\lambda(v + 4\lambda^3 \bar{Y}^{\curlyvee} + \lambda^3 \bar{Y}^{\triangledown})$ として，$R^M = \delta\mathcal{K}(x, y) - \mathcal{K}'(x)\delta\Phi(x, y)$ とする．$h_0 \in C^\beta$ を初期値として，$\widehat{M} : C^\beta \times \mathcal{W} \times \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ を

$$\widehat{M}(h_0, \Psi, \mathscr{V}) = (\mathcal{J}(\mathscr{V}, \Psi), \mathcal{K}(\partial_x(h_0 - h_0^\star(\Psi)), \mathscr{V}, \Psi), \mathcal{K}'(\mathscr{V}, \Psi), R^M) \in \mathcal{B}$$

と定義すると，写像 $\mathcal{B} \ni \mathscr{V} \mapsto \widehat{M}(h_0, \Psi, \mathscr{V}) \in \mathcal{B}$ が縮小写像であることが示せる．その固定点を $S = S(h_0, \Psi)$ とおき，$\pi : \mathcal{B} \to C((0, T], C^{1/2-\kappa})$ を射影とすれば，$h_t = h_t^\star + \pi(S)_t$ が KPZ 方程式の解になり，CH 解と一致することが示せる ([Hai13, Theorem 4.3])．

3 正則構造の理論

前章で概略を示した KPZ 方程式の解法を正則構造理論として抽象化できる．$k < \gamma < k+1$ とすれば $f_t \in C^\gamma$ の s でのテイラー展開は $f_t = f_s + \sum_{l=1}^k f_s^{(l)}(t-s)^l + O(|t-s|^\gamma)$ となる．一方，$(Y, Y') \in \mathscr{D}_W^{2\alpha}$ のとき $Y_t = Y_s + Y_s' W_{s,t} + O(|t-s|^{2\alpha})$ と表せた．つまり，rough path (Y, Y') を，W に関するフーリエ展開系数と思える．展開したときの斉次次数の空間を考えるため次数付き空間 T を導入する．さらに，ある点でのテイラー展開のテイラー系数を他の点のテイラー展開のテイラー系数に対応させる写像の抽象化として T 上に群構造 G を導入する．$\mathscr{T} = (A, T, G)$ が正則構造であるとは，次を満たすことである：

(1) $A \subset \boldsymbol{R}$ は下から有界かつ局所有限で $0 \in A$,

(2) $T = \bigoplus_{\alpha \in A} T_\alpha$ で T_α はバナッハ空間で $T_0 \cong \boldsymbol{R}$,

(3) $G \ni \Gamma : T \to T$ で $\tau_\alpha \in T_\alpha$ に対して $\Gamma\tau_\alpha - \tau_\alpha \in \bigoplus_{\beta < \alpha} T_\alpha$ を満たす．

例を示す．$\alpha \in (1/3, 1/2]$ として rough path 積分の正則構造を与えよう．$\mathbf{W} = (W, \mathbb{W}) \in \mathscr{C}^\alpha$, $(Y, Y') \in \mathscr{D}_W^{2\alpha}$ とする．このとき $Z_{s,t} = \int_s^t Y d\mathbf{W} \approx Y_s W_{s,t} + Y_s' \mathbb{W}_{s,t}$ より $\dot{Z} \approx Y_s \dot{W} + Y_s' \dot{\mathbb{W}}$ となる．ここで $\dot{W}$, $\dot{\mathbb{W}}$ は超関数なので，Y_s, Y_s' が滑らかでない限り $Y_s \dot{W} + Y_s' \dot{\mathbb{W}}$ は定義されない．正則構造は $A = \{\alpha - 1, 2\alpha - 1, 0, \alpha\}$, $T = T_{\alpha-1} \oplus T_{2\alpha-1} \oplus T_0 \oplus T_\alpha = \langle [\![\dot{W}]\!], [\![\dot{\mathbb{W}}]\!], [\![\mathbb{1}]\!], [\![W]\!] \rangle$ となる．T の元は $[\![\cdots]\!]$ で表す．構造群は h を $\boldsymbol{R}$ の加法群の元として $\Gamma_h [\![\dot{W}]\!] = [\![\dot{W}]\!]$, $\Gamma_h [\![\dot{\mathbb{W}}]\!] = [\![\dot{\mathbb{W}}]\!] + h[\![\mathbb{1}]\!]$, $\Gamma_h [\![\mathbb{1}]\!] = [\![\mathbb{1}]\!]$, $\Gamma_h [\![W]\!] = [\![W]\!] + h[\![\mathbb{1}]\!]$ で与えられる．線形和 $[\![\dot{Z}]\!]_s = Y_s [\![\dot{W}]\!] + Y_s' [\![\dot{\mathbb{W}}]\!]$ を **jet** という．

次に **model** を定義する．抽象的なベクトル **jet** を我々の世界 (超関数 $\mathscr{D}'$ の世界) に引き戻すものが **model** である．$\mathscr{T} = (A, T, G)$ を正則構造とする．写像 $\Pi : \boldsymbol{R}^d \to L(T, \mathscr{D}')$ と $\Gamma : \boldsymbol{R}^d \times \boldsymbol{R}^d \to G$ が以下の代数的な関係式を満たすとき $M = (\Pi, \Gamma)$ を $\boldsymbol{R}^d$ 上の **model** という：

(1) $\Gamma_{xy}\Gamma_{yz} = \Gamma_{xz}$,

(2) $\Pi_x \Gamma_{xy} = \Pi_y$.

Model が与えられたときに写像 $f : \boldsymbol{R}^d \to \bigoplus_{\alpha < \gamma} T_\alpha$ が，$\|f(x) - \Gamma_{xy} f(y)\|_\alpha \le C|x-y|^{\gamma-\alpha}$ を $x, y \in \boldsymbol{R}^d$ に関して局所一様に満たすとき f を **model distribution** といい，その全体を $\mathscr{D}_M^\gamma$ で表す．重要なことは，この f は抽象的な概念だが再構成写像 $\mathscr{R} : \mathscr{D}_M^\gamma \to \mathscr{D}'$ というものが存在して，f が超関

数 $\mathscr{D}'$ として実現できることである．つまり $\mathscr{R}f(x) \sim \Pi_x f(x)$ が成り立つ．Rough path 積分 $\mathbf{W} = (W, \mathbb{W})$ の **model** (Π, Γ) の例を示そう．正則構造を (A, T, G) とする．$\Gamma_{ts} = \Gamma_{W_{s,t}}$, $\Pi_s[\![\dot{W}]\!](\psi) = \int \psi(t) dW_t$, $\Pi_s[\![\dot{\mathbb{W}}]\!](\psi) = \int \psi(t) d\mathbb{W}_{s,t}$, $\Pi_s[\![\mathbb{1}]\!] = 1$, $\Pi_s[\![W]\!]_t = W_{s,t}$ である．さらに，rough path $(Y, Y') \in \mathscr{D}^{2\alpha}_W$ に対して $Y_\cdot[\![\mathbb{1}]\!] + Y'_\cdot[\![W]\!] \in \mathscr{D}^{2\alpha}_M$ となる．**Model distribution** には積 $f_1 \star f_2$ と合成 $G \circ f(x)$ も定義される．また，D を微分作用素として，$\mathscr{L} = \sum_{|k|=m} a_k D^k$ とする．$T' \subset T$ をセクターとして，線形作用素 $\partial : T' \to T$ が (1) $\partial T_\alpha \to T_{\alpha - m}$，(2) $\Gamma \partial \tau = \partial \Gamma \tau$，(3) $\Pi_x \partial \tau = \mathscr{L} \Pi_x \tau$ を満たすとき，$\mathscr{L}$ の **realize** という．$f \in \mathscr{D}^\gamma_M$ に対して $\partial f \in \mathscr{D}^{\gamma - m}_M$ かつ $\mathscr{R} \partial f = \mathscr{L} \mathscr{R} f$ が成り立つ．以上が，正則構造，**model**，再構成写像，**model distribution** である．

4 KPZ 方程式と正則構造

Admissible model を導入する．正則構造 $\mathscr{T} = (A, T, G)$ と **model** $M = (\Pi, \Gamma)$ が与えられているとする．$\bar{T} \subset T$ を次で定義する．(1) $\bar{T}_\alpha \neq 0 \iff |\alpha| \in \mathbb{N}$，(2) $\bar{T}_\alpha$ の基底は $[\![X]\!]^{|\alpha|}$，(3) 群構造は $\Gamma_h [\![X^k]\!] = ([\![X]\!] + h[\![\mathbb{1}]\!])^k$．また，$T' (\subset T)$ 上のオーダー β の積分写像 $\mathcal{I} : T' \to T$ とは以下を満たすものである．(1) $\mathcal{I} T'_\alpha \subset T_{\alpha + \beta}$，(2) $\mathcal{I}(T' \cap \bar{T}) = 0$，(3) $\Gamma \mathcal{I} \tau - \mathcal{I} \Gamma \tau \in \bar{T}$, $\forall \tau \in T'$, $\forall \Gamma \in G$. 最後に核 $K = \sum_{n \geq 0} K_n$ を定義する．核 K は，$K_n : \boldsymbol{R}^d \to \boldsymbol{R}$, $\mathrm{supp} K_n$ は $\{x \in \boldsymbol{R}^d ; \|x\| < 2^{-n}\}$ に含まれ，$\sup_x |D^k K_n(x)| \leq C 2^{n(d - \beta + |k|)}$ が n に一様に満たされていて，$\int_{\boldsymbol{R}^d} K_n(y) y^k dy = 0$ が $|k| < s$ で成り立つ．これらの仮定のもと **model** $M = (\Pi, \Gamma)$ が次を満たすとき **admissible** という．

(1) $(\Pi_x [\![X^k]\!])(y) = (y - x)^k$,

(2) $\Pi_x \mathcal{I} [\![\tau]\!] = K * \Pi_x [\![\tau]\!] - \Pi_x \mathcal{J}(x) [\![\tau]\!]$.

ここで $\mathcal{J}(x)[\![\tau]\!] = \sum_{|k| < |\tau| + \beta} [\![X]\!]^k D^k K * \Pi_x [\![\tau]\!] / k!$ は $[\![\tau]\!]$ の **realization** の K による多項式展開である．**Model** M が **admissible** なとき，次のシャウダー型定理が成り立つ．つまり，$\mathscr{R}$ を再構成写像として，$f \in \mathscr{D}^\gamma_M(V)$, $0 < \gamma < s - \beta$, $\gamma + \beta \notin \mathbb{N}$，ならば，$\mathscr{R} \mathscr{K} f = K * \mathscr{R} f$ となる $\mathscr{K} = \mathscr{K}_\gamma : \mathscr{D}^\gamma_M(V) \to \mathscr{D}^{\gamma + \beta}_M$ が存在する ([Hai14, Theorem 5.12])．実際それは

$$(\mathscr{K} f)(x) = \mathcal{I} f(x) + \mathcal{J}(x) f(x) + (\mathcal{N} f)(x) \tag{12}$$

という形をしている．ここで $(\mathcal{N} f)(x) = \sum_{|k| < \gamma + \beta} [\![X]\!]^k D^{(k)} K * (\mathscr{R} f - \Pi_x f(x)) / k!$．KPZ 方程式の正則構造の概略をみてみよう．$\lambda = 1$ とおく．$\mathscr{G}$ を $\partial_t - \partial_x^2$ のグリーン関数とすれば KPZ 方程式は

$$h = \mathscr{G} * ((\partial_x h)^2 + \xi) + \mathscr{G} h_0$$

になる．h_0 は初期値である．$\mathscr{G} = K + \hat{K}$ にわける．ここで，K はシャウダー型定理が成立する核である．KPZ 方程式に付随する正則構造と **admissible model** が存在すると仮定して，方程式

$$[\![H]\!] = (\mathscr{K} + \hat{\mathscr{K}})((\partial [\![H]\!])^2 + [\![\Xi]\!]) + \mathscr{G} h_0 \tag{13}$$

を考える．ここで $[\![H]\!], [\![\Xi]\!]$ は **model distribution**，$\hat{\mathscr{K}} f(x) = \sum_k [\![X]\!]^k (D^{(k)} \hat{K} * \mathscr{R} f)(z) / k!$. (12) より $[\![H]\!] = \mathcal{I}((\partial [\![H]\!])^2 + [\![\Xi]\!]) + (\cdots)$ となる．ここで $(\cdots)$ は $[\![X^k]\!]$ で張られる項である．そこで，$[\![H]\!]$ を $[\![\mathcal{I}(\Xi)]\!]$ と表し，$U = \{[\![\mathbb{1}]\!], [\![X^k]\!], [\![\mathcal{I}(\Xi)]\!]\}$ とすれば，$U \cup \{[\![\Xi]\!]\} \cup \{\partial [\![\tau_1]\!] \partial [\![\tau_2]\!], [\![\tau_j]\!] \in$

$U\}$ の線形和 T が正則構造を与えると思える．Hairer は，T に次数 A と構造群 G を導入し正則構造 (A,T,G) を定義した．また，滑らかな ξ に対して $\Pi_z[\![\Xi]\!](x)=\xi(x)$，さらに $\Pi_z[\![X]\!]^k(x)=(x-z)^k$, $\Pi_z[\![\mathcal{I}(\Xi)]\!]=K*\Pi_z[\![\Xi]\!]-\Pi_z\mathcal{J}(z)[\![\Xi]\!]$ と定義して，適当な Γ を選ぶと (Π,Γ) が **admissible model** になることを示した．(13) の右辺を $\mathcal{M}([\![H]\!])$ としたとき，適当なノルムで $[\![H]\!]\mapsto\mathcal{M}([\![H]\!])$ が縮小写像になることが証明でき，その固定点として (13) の解の存在が示される ([Hai14, Theorem 7.8]).

(13) と KPZ 方程式の関係をみよう．くりこみ群 $\mathfrak{R}$ という群構造をもつ写像 $M:T\to T$ の族を定義する．$L_i:T\to T$ を具体的に与えて，$M=\exp(-\sum_{i=0}^{3}C_iL_i)\in\mathfrak{R}$ を定義し，等式 $\Pi_x^M=\Pi_xM$ が成り立つような **model** (Π^M,Γ^M) の存在が示せる．(Π^M,Γ^M) の再構成写像を $\mathscr{R}^M$ とすれば，ξ が滑らかなとき，$h_t(x)=(\mathscr{R}^M[\![H]\!])_t(x)$ は $\partial_th=\partial_x^2h+(\partial_xh)^2-4C_0\partial_xh+\xi-(C_1+C_2+4C_3)$ を満たすことが示せる ([FH14, Proposition 15.12])．そこで，white noise ξ を滑らかな ξ^ϵ に置き換えて **model** $(\Pi^\epsilon,\Gamma^\epsilon)$ が定義できて，$h_{\epsilon,t}(x)=(\mathscr{R}^{M_\epsilon}[\![H]\!])_t(x)$ が

$$\partial_th_\epsilon=\partial_x^2h_\epsilon+(\partial_xh_\epsilon)^2+\xi^\epsilon-(C_1^\epsilon+C_2^\epsilon+4C_3^\epsilon) \tag{14}$$

を満たすことがわかる．ここで $C_0^\epsilon=0$ とおいた．大雑把にいえば，(13) の解の存在から，再構成写像 $\mathscr{R}^{M_\epsilon}$ をつかって (14) の解の存在がいえて，$\epsilon\to0$ の極限操作から KPZ 方程式の解の存在が示せる．

以上述べたことは，一般の非線形確率偏微分方程式 $(\partial_t-L)h=F(h,\xi)$ に拡張できる．適当な正則構造 $\mathscr{T}$ と **admissible model** を定義して $\mathscr{T}$ 上の方程式 $[\![H]\!]=(\mathscr{K}+\hat{\mathscr{K}})F([\![H]\!],[\![\Xi]\!])$ を考え，$[\![H]\!]\mapsto(\mathscr{K}+\hat{\mathscr{K}})F([\![H]\!],[\![\Xi]\!])$ の固定点をみつける．次に滑らかな ξ^ϵ に対してくりこみ写像 M とくりこんだ **model** $(\Pi^{M_\epsilon},\Gamma^{M_\epsilon})$ の再構成写像 $\mathscr{R}^{M_\epsilon}$ から $h_{\epsilon,t}(x)=(\mathscr{R}^{M_\epsilon}[\![H]\!])_t(x)$ が

$$(\partial_t-L)h_\epsilon=F(h_\epsilon,\xi^\epsilon)+C_\epsilon$$

を満たすことを示す．最後に $\epsilon\to0$ の極限操作を行い解の存在が示される．

5　おわりに

筆者が Hairer と初めて出会ったのは 2010 年の 34th Conference on Stochastic Processes and Their Applications であった．Hairer はそこで総合講演を行っている．Fields 賞受賞の頃は，雑誌の編集で Hairer とメールの交換をしている最中だった．その数ヶ月前から，Hairer が Fields 賞の候補に挙がっていることは噂で聞いていたので，発表当日はインターネットを眺めながら期待していたら，予想通り受賞が決まり，即座に congratulations とメールすると，2 日後に thanks と返事がきた．

全く新しい概念や発想で，複雑極まりない計算を突き進めていく Hairer の能力は驚嘆に値する．KPZ 方程式を解いた [Hai13] は 105 ページ，正則構造理論を展開した [Hai14] は 236 ページの長大な論文である．Hairer は斬新なアイデアをつかって KPZ 方程式に厳密な意味を与えただけではなく，正則構造理論という壮大な一般論まで構築した．この理論は非線形 (確率) 偏微分方程式に新しい道を切り開き，これからの現代数学に大きな発展をもたらすことは間違いないだろう．率直にいって Fields 賞受賞は出発点に過ぎない．原稿を執筆して実感した次第である．

注　　釈

1) 筆者の理解と紙数の都合上，本稿で厳密な条件・仮定・結果を述べることは不可能である．また 2D-NS 方程式のエルゴード性については言及しなかった．

2) Brown 運動は $|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \le \kappa(\omega)|t-s|^\gamma$, $\gamma \in (0, 1/2)$ となり，確率 1 で Hölder 連続性は 1/2 より真に小さい．そこで超関数の意味での微分 $\dot{B}_t = dB_t/dt$ を white noise と呼ぶ．

3) $-\partial_x^2 - \lambda\xi^\epsilon$ を $\lambda\xi^\epsilon$ を外場ポテンシャルにもった Schrödinger 作用素とみて，Feynman–Kac 公式で
$$Z_{\epsilon,t}(x) = \mathbb{E}^x[Z_{\epsilon,0}(B_t)e^{+\lambda\int_0^t \xi^\epsilon(B_s,t-s)ds}]$$
と表せば，ξ に関する期待値は
$$\langle Z_{\epsilon,t}(x)\rangle = e^{c/\epsilon}\mathbb{E}^x[Z_{\epsilon,0}(B_t)]$$
となり $\epsilon \to 0$ で $e^{+\infty}$ が現れる．時空 $1+1$ 次元の場の量子論でやられるように Wick 積 : : によって $e^{+\lambda\int_0^t \xi^\epsilon(B_s,t-s)ds}$ を $:e^{+\lambda\int_0^t \xi^\epsilon(B_s,t-s)ds}:$ に置き換えて Z_ϵ の $\epsilon \to 0$ の極限が定義できる [SS10] が，それが KPZ 方程式のどういう意味の解なのか知られていなかった．

4) $\mathscr{L}$ は放物型または楕円型の作用素，F は非線形項．

5) $\forall\alpha \in (1/3, 1/2)$ とする．$(\Omega, \mathscr{F}, P)$ 上の Brown 運動 $(B_t)_{t\ge 0}$ を考えよう．$P(N_j) = 1$ とする．$\mathbb{B}_{s,t} = \int_s^t (B_s - B_r) \otimes dB_r$ と定めると，$\mathbf{B}(\omega) = (B(\omega), \mathbb{B}(\omega)) \in \mathscr{C}^\alpha$, $\omega \in N_1$ となる．$(Y(\omega), Y'(\omega)) \in \mathscr{D}^\alpha_{B(\omega)}$, $\omega \in N_2$ のとき，rough path 積分 $\int_0^t Y_s d\mathbf{B}_s$ が $\omega \in N_1 \cup N_2$ に対して定義でき，Y, Y' が adapted であれば，
$$\int_0^t Y_s d\mathbf{B}_s = \int_0^t Y_s dB_s$$
となる ([FH14, Proposition 5.1])．

6) C の値は
$$-8\int_{[0,\infty)\times\boldsymbol{R}} \frac{x\varphi'(y)\varphi(y)\varphi^2(y-x)\log y}{x^2 - xy + y^2} dxdy.$$

7) X_τ は滑らかな関数の空間をセミノルム
$$\sup_{s,t\in[-T,T]}\left(\|X_t\|_\infty + \|X_t\|_{\alpha_\tau-\delta} + \frac{\|X_t - X_s\|_\infty}{|t-s|^{1/2-\delta}}\right),$$
$1 \le T$, $0 < \delta < 1/4$, で完備化した空間．C^{a-} は $C^{a-\kappa}\forall\kappa > 0$ の意味．

8) $F_\epsilon = \lambda\{v_\epsilon^2 + 2v_\epsilon\partial_x(h_\epsilon^\star - Y_\epsilon^\bullet)\} + \lambda^5(2\bar{Y}_\epsilon \bar{Y}_\epsilon + 8\bar{Y}_\epsilon \bar{Y}_\epsilon + \bar{Y}_\epsilon \bar{Y}_\epsilon) + \lambda^6(2\bar{Y}_\epsilon \bar{Y}_\epsilon + 8\bar{Y}_\epsilon \bar{Y}_\epsilon) + \lambda^7(\bar{Y}_\epsilon \bar{Y}_\epsilon + 8\bar{Y}_\epsilon \bar{Y}_\epsilon + 16\bar{Y}_\epsilon \bar{Y}_\epsilon)$.

文　　献

[FH14] P. K. Friz and M. Hairer, A Course on Rough Path, Universitext, Springer, 2014.

[Gub04] M. Gubinelli, Controlling rough paths, J. Funct. Anal., **216** (2004), 86–140.

[Hai11] M. Hairer, Rough stochastic PDEs, Comm. Pure. Appl. Math., **64** (2011), 1547–1585.

[Hai12] M. Hairer, Singular perturbations to semi-linear stochastic heat equations, Probab. Theory Related Fields, **152** (2012), 265–297.

[Hai13] M. Hairer, Solving the KPZ equation, Ann. of Math. (2), **178** (2013), 559–664.

[Hai14] M. Hairer, A theory of regularity structures, Invent. Math., **198** (2014), 269–504.

[KPZ86] M. Kardar, G. Parisi and Y.-C. Zhang, Dynamic scaling of growing interfaces, Phys. Rev. Lett., **56** (1986), 889–892.

[Lyo98] T. J. Lyons, Differential equations driven by rough signals, Rev. Mat. Iberoamericana, **14** (1998), 215–310.

[SS10] T. Sasamoto and H. Spohn, One-dimensional Kardar–Parisi–Zhang equation: An exact solution and its universality, Phys. Rev. Lett., **104** (2010), 230602.

(2015 年 3 月 17 日提出)

(ひろしま　ふみお・九州大学大学院数理学研究院)

Manjul Bhargava 氏の業績

──楕円曲線の平均階数と数の幾何──

谷　口　　隆

1　はじめに

有理数体上の楕円曲線について，階数の平均はどれぐらいだろう？ 1/2 ではないか？ ──そんな予想があった．素朴な疑問だが，長らく答えはなく，有限になることの証明も困難だと考えられていたようである．Bhargava は彼の学生であった Shankar との共同研究で，“高さで並べると平均は 0.885 未満である” こと (これを示した論文は査読中，現時点での出版論文では 7/6 以下であることまで) を示した．国際数学連合による，Bhargava の 2014 年 Fields 賞授賞理由は次のようになっている：