Feynman-Kac 型公式の場の量子論への応用

廣島文生

2015/9/13
秋季総合分科会/京産大

解析ができる模型の例.

(1) スピン・ボゾン Hamiltonian

$$H_{SB} = \varepsilon\sigma_z \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f} + \alpha\sigma_x \otimes \phi(\hat{h})$$

(2) Nelson 模型で $\mathrm{h_p}$ を $\sqrt{-\Delta+m^2}-m+V$ に置換えて

$$H_{SRN} = (\sqrt{-\Delta+m^2}-m+V) \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f} + H_{\mathrm{I}}$$

(3) Pauli-Fierz 模型

$$H_{PF} = \frac{1}{2m}(p \otimes 1\!\!1 - A)^2 + V \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f}.$$

(4) スピンを含む PF 模型は

$$H_{PF}^{\sigma} = \frac{1}{2m}(\sigma \cdot (p \otimes 1\!\!1 - A))^2 + V \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f}$$

(5) 準相対論的 PF 模型

$$H_{SRPF} = \sqrt{(\sigma \cdot (p \otimes 1\!\!1 - A))^2 + m^2} - m + V \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f}$$

References

- **Self-adjointness** Arai (81,83), FH (00,02), Loss-Miyao-Spohn (07), Haslar-Herbst (08)
- **Existence of GS** Bach-Fröhlich-Sigal (97,99), Arai-Hirokawa (97), Spohn (99), Gérard (00), Griesemer-Lieb-Loss (01), Lieb-Loss (02), Arai(01), Bruneau-Dereziński (04), Hirokawa-FH-Spohn (05), Miyao-Spohn (08), Gérard-FH-Suzuki-Panatti (09), Könenberg-Matte-Stockmeyer (11)+many papers, Hidaka-FH (14)
- **Enhanced binding** FH-Spohn (02), Catto-Hainzl (02), Arai-Kawano (02), Chen-Vogalter-Vugalter (03), H-Sasaki (08,14)

References

- **Absence of GS** Arai-Hirokawa-FH (99), Chen(01), Derezinski-Gérard(04), Lorinczi-Minlos-Spohn(02), Hirokawa (06), Haslar-Herbst (06) Gérard-FH-Suzuki-Panatti (10)
- **Multiplicity of GS** Bach-Fröhlich-Sigal (97), Arai-Hirokawa (97), FH (00,02), FH-Spohn (01), Bach-Fröhlich-Pizzo (05)
- **Asymptotic field** Spohn(97), Derezinski-Gérard(99,04), Gérard (02), Fröhlich-Griesemer-Schlein (01, 02)

Schrödinger 作用素と FKF

- dD-Schrödinger 作用素

$$\mathrm{h_p} = -\frac{1}{2}\Delta + V$$

- $(f, e^{-t\mathrm{h_p}}g) = \int dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_0)} g(B_t) e^{-\int_0^t V(B_s)ds} \right]$

- ベクトル場 $a=(a_1,\cdots,a_d)$ を含むスピン 1/2 相対論的 Schrödinger 作用素

$$\sqrt{(\sigma\cdot(p-a))^2+m^2}-m+V$$

- Pauli 行列

$$\sigma_1=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_1=\begin{bmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{bmatrix},\quad \sigma_3=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

Bernstein 関数

$$h_2(a) = \frac{1}{2}(\sigma \cdot (p-a))^2 = \frac{1}{2}(p-a)^2 - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} b_3 & b_1 - ib_2 \\ b_1 + ib_2 & -b_3 \end{bmatrix}$$

- $(b_1, b_2, b_3) = \nabla \times a$
- $\Psi(h_2(a)) + V$
- $\Psi(u) = \sqrt{2u+m^2} - m$ は Bernstein 関数

$$\mathscr{B} = \left\{ f \in C^\infty \,\middle|\, f(x) \geq 0, (-1)^n \left(\frac{d^n f}{dx^n}\right)(x) \leq 0, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

- $\mathscr{B}_0 = \{f \in \mathscr{B} \,|\, \lim_{u \to 0+} f(u) = 0\}$.

スカラー化

- $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{\pm 1\}$
- $h_2(a)$ を $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ 上の作用素 $h_{\mathbb{Z}_2}$ へユニタリー変換

$$(h_{\mathbb{Z}_2} f)(x,\theta) = \left(\frac{1}{2}(p-a)^2 - \frac{1}{2}\theta b_3(x)\right) f(x,\theta)$$

$$-\frac{1}{2}\left(b_1(x) - i\theta b_2(x)\right) f(x,-\theta)$$

ユニタリー同値性

$$h_2(a) \cong h_{\mathbb{Z}_2}$$

スピンの一般化

- $\mathbb{Z}_2 = \{-1, 1\} \to Z_p = \{\theta_1^{(p)}, \dots, \theta_p^{(p)}\}$
- $\theta_\alpha^{(p)} = \exp\left(2\pi i \frac{\alpha}{p}\right)\ \alpha \in \mathbb{N}$.
- スピン $\mathbb{Z}_p$ をもった Schrödinger 作用素

スピン $\mathbb{Z}_p$

- **(対角部分)** $U : \mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{R}$ は $\max_{\theta \in \mathbb{Z}_p} |U(x,\theta)|$ が $-\Delta/2$ に相対有界な掛け算作用素.
- **(非対角部分)** $W_\beta : \mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}$, $1 \le \beta \le p-1$, は $\max_{\theta \in \mathbb{Z}_p} |W_\beta(x,\theta)|$ が $-\Delta/2$ に相対有界となる掛け算作用素.
- $U_\beta(x,\theta_\alpha) = \frac{1}{2}\left(W_\beta(x,\theta_{\alpha+\beta}) + \overline{W_{p-\beta}(x,\theta_\alpha)}\right)$
- **一般化されたスピン作用素**

$$\mathscr{M} : f(x,\theta_\alpha) \mapsto U(x,\theta_\alpha) f(x,\theta_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{p-1} U_\beta(x,\theta_\alpha) f(x,\theta_{\alpha+\beta})$$

一般化された Schrödinger 作用素

- $\mathrm{h_p} = \frac{1}{2}(p-a)^2 + \mathscr{M}$
- $\overline{h_p} = h_p - \inf \mathrm{Sp}(h_p)$
- 一般化された Schrödinger 作用素

$$\Psi \in \mathscr{B}_0 \Longrightarrow h_p^{\Psi} = \Psi\left(\overline{h_p}\right) + V$$

- $p-1$ 個の独立なポアソン過程 $(N_t^\beta)_{t\geq 0}$, $\beta=1,\ldots,p-1$,
- $N_t=\sum_{\beta=1}^{p-1}\beta N_t^\beta$

H.+Ichinose+Lorinczi (RMP12)

$$(f,e^{-th_p^\Psi}g)=$$

$$\sum_{\alpha=1}^{p}\int_{\mathbb{R}^d}dx\mathbb{E}_{W\times\mu\times\nu}^{x,\alpha,0}\left[e^{(p-1)T_t^\Psi}\overline{f(B_0,\theta_{N_0})}g(B_{T_t^\Psi},\theta_{N_{T_t^\Psi}})e^{\mathscr{S}^\Psi}\right].$$

$$\mathscr{S}^\Psi=\mathscr{S}_V^\Psi+\mathscr{S}_a^\Psi+\mathscr{S}_{\mathrm{S}}^\Psi$$
$$\mathscr{S}_V^\Psi=-\int_0^t V(B_{T_s^\Psi})ds$$
$$\mathscr{S}_a^\Psi=-i\int_0^{T_t^\Psi}a(B_s)\circ dB_s$$
$$\mathscr{S}_{\mathrm{S}}^\Psi=-\int_0^{T_t^\Psi}\Big(U(B_s,\theta_{N_s})-\xi\Big)ds+\sum_{\beta=1}^{p-1}\int_0^{T_t^\Psi+}\log(-U_\beta(B_s,\theta_{N_{s-}}))dN_s^\beta$$

スピン 1/2 相対論的 Schrödinger 作用素

例

- $L^2(\mathbb{R}^3;\mathbb{C}^2)$ 上に

$$h = \sqrt{(\sigma\cdot(p-a))^2+m^2}-m+V, \quad m \geq 0,$$

- スカラー化
$\Longrightarrow h = h_2^{\Psi}(a, -\frac{1}{2}\theta b_3, -\frac{1}{2}(b_1 - i\theta b_2), V)$
$\Psi(u) = \sqrt{2u+m^2}-m.$

$P(\phi)_1$ 過程

- $P(\phi)_1$ 過程は, OU 過程の一般化
- 自己共役作用素 $K \Longrightarrow \inf \mathrm{Sp}(K) = E$.
- $m = \dim \mathrm{Ker}(K - E)$
- **(基底状態)**$m \geq 1$ となるとき K の基底状態は存在するといい, $m = 1$ のとき K の基底状態は一意的に存在するという. また $m = 0$ のとき K の基底状態は存在しないという.

- $\mathrm{h_p} = -\frac{1}{2}\Delta + V \Longrightarrow$ ∃基底状態 $\varphi_\mathrm{p} > 0$ とする.
- $\mathrm{h_p}\varphi_\mathrm{p} = E_\mathrm{p}\varphi_\mathrm{p}$ として, $\overline{\mathrm{h_p}} = \mathrm{h_p} - E_\mathrm{p}$
- $d\mathsf{N}_0 = \varphi_\mathrm{p}^2(x)dx$ は $\mathbb{R}^d$ 上の確率測度
- **基底状態変換**
  $\mathscr{U} : L^2(\mathbb{R}^d, d\mathsf{N}_0) \to L^2(\mathbb{R}^d, dx)$, $f \mapsto \varphi_\mathrm{p} f$
- $L_\mathrm{p} = \mathscr{U}^{-1}\overline{\mathrm{h_p}}\mathscr{U} = \frac{1}{\varphi_\mathrm{p}}\overline{\mathrm{h_p}}\varphi_\mathrm{p}$

- L_p に付随した拡散過程 $(X_t)_{t\geq 0}$ が存在
- 形式的に $L_\mathrm{p} f = -\frac{1}{2}\Delta f - \nabla \log \varphi_\mathrm{p} \cdot \nabla f$ なので

$$dX_t = \nabla \log \varphi_\mathrm{p}(X_t)dt + dB_t, \quad X_0 = x$$

の解 $(X_t^x)_{t\geq 0}$ は $\mathbb{E}[f(X_t^x)] = \left(e^{-tL_\mathrm{p}} f\right)(x)$

$P(\phi)_1$ による FKF

V は Kato 分解可能で, $\mathrm{h_p}$ は基底状態 $\varphi_\mathrm{p} > 0$ をもち, $L_\mathrm{p} = \mathscr{U}^{-1}\overline{\mathrm{h_p}}\mathscr{U}$ をその基底状態変換とする. X_t は $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ 上の座標過程 $X_t(w) = w(t)$ とする. このとき $(\mathscr{X}, \mathscr{B})$ 上に確率測度 $\mathscr{N}_0^x$ で以下を満たすものが存在する.

$$(f, e^{-tL_\mathrm{p}} g)_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mathsf{N}_0)} = (f\varphi_\mathrm{p}, e^{-t(\mathrm{h_p}-E)} g\varphi_\mathrm{p})_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \mathbb{E}_{\mathscr{N}_0}[\bar{f}(X_0)g(X_t)].$$

- 確率空間 $(\mathscr{X}, \mathscr{B}, \mathscr{N}_0^x)$ 上の座標過程 X_t を $P(\phi)_1$ 過程という.
- $\mathscr{X} \times \mathbb{R}^d$ 上の確率測度 $d\mathscr{N}_0 = d\mathsf{N}_0 \otimes d\mathscr{N}_0^x$.

Gauss 超過程

$(\phi(f), f \in \mathscr{E})$ が確率空間 $(\mathscr{Q}, \Sigma, \mu)$ 上の $L^2(\mathbb{R}^d)$ を指数に持つ Gauss 超過程である $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$

(1) $\phi(f) : \mathscr{Q} \to \mathbb{R}$ は $(\mathscr{Q}, \Sigma, \mu)$ 上の Gauss 過程で平均ゼロ, 共分散が
$\mathbb{E}_\mu[\phi(f)\phi(g)] = \frac{1}{2}(f, g)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$

(2) $\phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\phi(f) + \beta\phi(g)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(3) $\Sigma = \sigma(\{\phi(f) \mid f \in L^2(\mathbb{R}^d)\})$

- フォック空間 $L^2(\mathscr{Q})$
- $\hat{\omega} = \sqrt{-\Delta + m^2}$
- $\mathrm{H_f}\mathbb{1} = 0$,
  $$\mathrm{H_f} : \prod_{j=1}^{n} \phi(f_j) := \sum_{j=1}^{n} :\phi(f_1)\cdots\phi(\hat{\omega} f_j)\cdots\phi(f_n):$$
- 相互作用項: UV 切断関数 $\hat{\varphi} \Longrightarrow \tilde{\varphi} = (\hat{\varphi}/\sqrt{\omega})^{\vee}$
  $H_{\mathrm{I}} : F(x,\phi) \mapsto \phi(\tilde{\varphi}(\cdot - x))F(x,\phi)$

Nelson 模型

$L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(Q)$ 上の Nelson Hamiltonian

$$H = \mathrm{h_p} \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f} + H_\mathrm{I}$$

同値な定義.

- L_p を $\mathrm{h_p}$ を基底状態変換
- $\mathsf{P}_0 = \mathsf{N}_0 \times \mu$ は $\mathbb{R}^d \otimes \mathscr{Q}$ 上の確率測度

$L^2(\mathsf{P}_0)$ 上の Nelson Hamiltonian

$$L = L_\mathrm{p} \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f} + H_\mathrm{I}$$

- $H \cong L$

e^{-tH} の FKF

BM による FKF

$$(F, e^{-tH}G) =$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}^x \left[e^{-\int_0^t V(B_s)ds} \left(\mathrm{J}_0 F(B_0), e^{-\phi_{\mathrm{E}}\left(\int_0^t \mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s)ds\right)} \mathrm{J}_t G(B_t) \right) \right]$$

$P(\phi)_1$ による FKF

$$(F, e^{-tL}G) = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[\left(\mathrm{J}_0 F(X_0), e^{-\phi_{\mathrm{E}}\left(\int_0^t \mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - X_s)ds\right)} \mathrm{J}_t G(X_t) \right) \right]$$

基底状態の解析

- H または L の $\exists_1$ 基底状態 $\varphi_{\rm g}>0$ を仮定する.
- $e^{-TL}1\!\!1/\|e^{-TL}1\!\!1\| \to \varphi_{\rm g}\ (T\to\infty)$.
- $\varphi_{\rm g}$ の性質を調べる処方箋の一つが

$$\varphi_{\rm g}^T = e^{-TL}1\!\!1/\|e^{-TL}1\!\!1\|$$

の極限の解析.

- $\varphi_{\rm g}^T \to \varphi_{\rm g}$

$$\gamma(T) = (1\!\!1, \varphi_{\rm g}^T)^2 = \frac{(1\!\!1, e^{-TL}1\!\!1)^2}{(1\!\!1, e^{-2TL}1\!\!1)}$$

真空期待値

BM による真空期待値

$$(f\otimes \mathbb{1}, e^{-TH} g\otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}^x \left[e^{-\int_0^T V(B_s)ds} \overline{f(B_0)} g(B_T) e^{\frac{1}{2}\int_0^T ds \int_0^T dt W(B_s - B_t, s-t)} \right]$$

$P(\phi)_1$ による真空期待値

$$\left(\mathbb{1}, e^{-TL}\mathbb{1}\right)_{L^2(\mathsf{P}_0)} = \mathbb{E}_{\mathscr{N}_0}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T ds \int_0^T dt W(X_s - X_t, s-t)} \right]$$

ここで ペアポテンシャル W は

$$W(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)} e^{-ik\cdot x} e^{-\omega(k)|t|} dk.$$

Criteria

$\lim_{T\to\infty}\gamma(T)=a$ とする. $a>0$ ならば H の基底状態は存在し, $a=0$ なら基底状態は存在しない.

$$\gamma(T)=\frac{\mathbb{E}_{\mathscr{N}_0}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^T ds\int_0^T dtW}\right]\mathbb{E}_{\mathscr{N}_0}\left[e^{\frac{1}{2}\int_{-T}^0 ds\int_{-T}^0 dtW}\right]}{\mathbb{E}_{\mathscr{N}_0}\left[e^{\frac{1}{2}\int_{-T}^T ds\int_{-T}^T dtW}\right]}$$

$$=\frac{\mathbb{E}_{\mathscr{N}_0}\left[e^{\frac{1}{2}\int_{-T}^T ds\int_{-T}^T dtW}e^{-\int_{-T}^0 ds\int_0^T dtW}\right]}{\mathbb{E}_{\mathscr{N}_0}\left[e^{\frac{1}{2}\int_{-T}^T ds\int_{-T}^T dtW}\right]}$$

$$=\mathbb{E}_{\mathscr{N}_T}[e^{-\int_{-T}^0 ds\int_0^T dtW}]$$

$\mathscr{N}_T$ は有限体積 Gibbs 測度と言われる.

Spohn (LMP 98)

$\int \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} dk < \infty$ かつ $\Sigma_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p}} > \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2} \frac{|k|^2}{2\omega(k) + |k|^2} dk \Longrightarrow$
$\exists$ 基底状態 φ_{g}.

Lorinczi+Minlos+Spohn (AHP 02)

$d = 3$, $\varphi \geq 0$ $(\varphi \not\equiv 0)$ とし $V(x) \geq C|x|^{2\beta}$, $\beta > 0$, $\Longrightarrow \not\exists$ 基底状態 φ_{g}.

時間的に不変な Lorentz 多様体上の Nelson 模型

Lorentz 多様体上の Nelson Hamiltonian

- dispersion relation $\omega = \sqrt{-\Delta + m^2}$ は KG 方程式 $(\Box + m^2)\phi(t,x) = 0$ から導かれる.
- $\mathscr{M} = (\mathbb{R}^4, g)$ を計量 テンソル g の時間的に不変な Lorentz 多様体
- Lorentz 多様体 $\mathscr{M}$ 上の KG 方程式は $\Box_g \phi + (m^2 + \eta \mathscr{R})\phi = 0$
- $\partial^2 \phi / \partial t^2 = K\phi$

$$K = g_{00} \left(\frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{i,j=1}^{3} \partial_j \sqrt{|\det g|} \gamma^{ji} \partial_i - m^2 - \eta \mathscr{R} \right)$$

- K は $L^2(\mathbb{R}^3, \rho(x)dx)$ 上対称 $\rho = \frac{\sqrt{|\det g|}}{g_{00}} = g_{00}^{-1/2} \sqrt{|\det \gamma|}$.

- K を $L^2(\mathbb{R}^3;\rho(x)dx)$ 上の作用素から $L^2(\mathbb{R}^3;dx)$ 上の作用素へユニタリー変換
- 時間的に安定な Lorentz 多様体上の dispersion relation は $\hat{\omega}=\left(-\sum_{i,j=1}^3 \partial_i g_{00}\gamma^{ij}\partial_j+v\right)^{1/2}$
- 時間的に安定な Lorentz 多様体 $(\mathbb{R}^4,g)$ 上の Nelson 模型

$$H_g = K\otimes 1\!\!1 + 1\!\!1\otimes \mathrm{H_f} + H_{\mathrm{I}}.$$

- $K=-\sum_{i,j=1}^3 \partial_i A^{ij}\partial_j+V$.
  $\hat{\omega}=\left(-\sum_{i,j=1}^3 c(x)^{-1}\partial_i a^{ij}(x)\partial_j c(x)^{-1}+m^2(x)\right)^{1/2}$
  $\phi(x)=\phi((\hat{\omega}^{-1/2}\varphi)(\cdot - X))$
- 変数質量 $m(x)\downarrow 0(|x|\to\infty)$

Gerard+H.+Panati+Suzuki (CMP 11)

$m(x) \geq a\langle x\rangle^{-1}$ ($a > 0$) ならば H は基底状態をもつ.

証明に確率論でてこない.

Gerard+H.+Panati+Suzuki (JFA 12)

$m(x) \leq a\langle x\rangle^{-1-\varepsilon}$ ならば H_g の基底状態は存在しない.

Proof $\lim_{T\to\infty}\gamma(T) = \lim_{T\to\infty}\mathbb{E}_{\mu_T}\left[e^{-\int_{-T}^0\int_0^T W_g}\right] = 0$ を示す. ω が擬微分作用素なので, W_g を具体的に書き表すことができない. 定数 $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ で次を満たすものが存在する.

$$C_1 e^{-C_2 t\hat{\omega}_\infty^2}(x,y) \leq e^{-t\hat{\omega}^2}(x,y) \leq C_3 e^{-C_4 t\hat{\omega}_\infty^2}(x,y).$$

ここで $\hat{\omega}_\infty^2 = -\Delta$. Nelson 模型に付随したペアポテンシャル W で

$$C_1 W(x-y, C_2|t|) \leq W_g(x,y,|t|) \leq C_3 W(x-y, C_4|t|)$$

となるから, W_g の評価を W の評価へ帰着できることになる.

- 平坦な空間

$$\omega = \sqrt{-\Delta + m^2} \Longrightarrow \begin{cases} \exists \varphi_{\mathrm{g}} & (m > 0) \\ \nexists \varphi_{\mathrm{g}} & (m = 0) \end{cases}$$

- 曲がった空間

$$\omega = \sqrt{-\Delta + m^2(x)} \Longrightarrow \begin{cases} \exists \varphi_{\mathrm{g}} & (m(x) > a \langle x \rangle^{-1}) \\ \nexists \varphi_{\mathrm{g}} & (m(x) \leq a \langle x \rangle^{-1}) \end{cases}$$

マルチンゲール性と固有ベクトルの空間的減衰性

$H\Phi = E\Phi$

- $X_t(x) = e^{tE} e^{-\int_0^t V(B_r+x)dr} e^{-\phi_{\mathrm{E}}(\int_0^t \mathrm{j}_s \tilde{\varphi}(\cdot - x - B_r)dr)} \mathrm{J}_t \Phi(B_t + x)$

H.(Adv Math 14)

$(X_t(x))_{t\geq 0}$ は マルチンゲール.

- $\Phi(x) = \mathbb{E}[\mathrm{J}_0^* X_t(x)] = \mathbb{E}[\mathrm{J}_0^* X_{t\wedge\tau}(x)]$.
- τ :停止時刻
- 適当な停止時刻 τ を選ぶことにより次が示せる.

H.(Adv Math 14)

$H\Phi = E\Phi$ とする. 次の (1) または (2) を仮定する.

(1) $\lim_{|x|\to\infty} V(x) = \infty$,

(2) $\lim_{|x|\to\infty} V_-(x) + E + \frac{1}{2}\|\hat{\varphi}/\omega\|^2 = a < 0$.

このとき $\|\Phi(x)\|_{L^2(\mathscr{Q})} \leq Ce^{-c|x|}$.

Gibbs 測度による基底状態に関する期待値

- 可測空間 $(\tilde{\mathscr{X}}, \tilde{\mathscr{B}})$ 上の測度

$$\mu_T : A \mapsto \mu_T(A) = \frac{1}{Z_T} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}^x \left[1_A e^{\frac{1}{2} \int_{-T}^{T} dt \int_{-T}^{T} ds W} e^{-\int_{-T}^{T} V(B_s) ds} \right]$$

- $\mathscr{B}_{[-t,t]} = \sigma(B_s; s \in [-t,t])$. $\mathscr{G} = \mathscr{G}_\infty = \bigcup_{0 \le t} \mathscr{B}_{[-t,t]}$

可測空間 $(\tilde{\mathscr{X}}, \sigma(\mathscr{G}))$ 上の測度 μ_T

- 任意の t を固定する. このとき, 任意の $A \in \mathscr{B}_{[-t,t]}$ に対して $\lim_{T \to \infty} \mu_T(A) = \mu_\infty(A)$ となるとき, 確率測度 μ_T は 確率測度 μ_∞ に**局所弱収束**するという.

H の基底状態 $\varphi_{\rm g}$ が存在すると仮定する. 加法的集合関数 $\mu : \mathscr{G} \to \mathbb{R}$ を

$$\mu(A) = e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}^x \left[1\!\!1_A \cdot (\Psi_{\rm g}(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \Psi_{\rm g}(B_t)) \right], \quad A \in \mathscr{B}_{[-t,t]}$$

で定義する. $(\tilde{\mathscr{X}}, \sigma(\mathscr{G}))$ 上への拡大を μ_∞ とする.

H.(Adv Math 14)

基底状態 $\varphi_{\rm g}$ が存在すると仮定する. このとき μ_T は $(\tilde{\mathscr{X}}, \sigma(\mathscr{G}))$ 上の 測度 μ_∞ へ局所弱収束する.

μ_∞ を Gibbs 測度という.

有限次元分布

$f_j : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$, $j = 0, \ldots, n$, は有界関数とする. このとき

$$\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[\prod_{j=0}^n f_j(B_{t_j}) \right] = (\varphi_{\rm g}, f_0 e^{-(t_1-t_0)(H-E)} f_1 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})(H-E)} f_n \varphi_{\rm g}).$$

オブザーバブル O の期待値 $(\varphi_{\mathrm{g}}, O\varphi_{\mathrm{g}})$ を Gibbs 測度 μ_∞ をもちいて表すことができる.

$f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, $\beta \in \mathbb{R}$ とする. このとき

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{i\beta\phi(f)}\varphi_{\mathrm{g}}) = e^{-\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2}\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{i\beta K(f)}\right].$$

ここで

$$K(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-|r|\omega}e^{-ikB_r}\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}, \hat{f})dr$$

は $(\tilde{\mathscr{X}}, \sigma(\mathscr{B}))$ 上の確率変数である.

- 調和振動子の固有ベクトル f は $e^{-|x|^2/2}$ で減衰する．さらに，$\lim_{\beta\uparrow 1}\|e^{(\beta/2)|x|^2}f\| = \infty$ になる．
- Nelson Hamiltonian の固有ベクトルも同様に Gauss 型に減衰することが予想される．

Hirokawa+H.+Lorinczi, Math Z (14)

$f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ とし，$|\beta| < 1/\|f\|^2$ のとき $\varphi_{\rm g} \in D(e^{(\beta/2)\phi(f)^2})$ かつ

$$\|e^{(\beta/2)\phi(f)^2}\varphi_{\rm g}\|^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta\|f\|^2}}\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{\frac{\beta K^2(f)}{1-\beta\|f\|^2}}\right].$$

特に

$$\lim_{\beta\uparrow 1/\|f\|^2}\|e^{(\beta/2)\phi(f)^2}\varphi_{\rm g}\| = \infty.$$

Betz+H.+Lorinczi+Minlos+Spohn (RMP 01)

$\rho \geq 0$ を可測関数とする. $\hat{\rho} = \rho(-i\nabla)$ とする. 任意の $\beta > 0$ に対して

$$(\varphi_g, e^{-\beta d\Gamma(\hat{\rho})}\varphi_g) = \mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-W_\infty^{\rho,\beta}}\right]$$

ここで

$$W_\infty^{\rho,\beta} = \int_{-\infty}^{0} dt \int_0^\infty W^{\rho,\beta}(B_t - B_s, t-s)ds$$

$$W^{\rho,\beta}(X,T) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} e^{-|T|\omega(k)} e^{-ikX}(1 - e^{-\beta\rho(k)})dk$$

※ **(赤外発散)** $d = 3$, $\hat{\varphi}(k) = \mathbb{1}_{[\lambda,\Lambda]}$ のとき $\lim_{\lambda\to 0}(\varphi_g, N\varphi_g) = \infty$.

紫外切断のくりこみ理論

- $D=3$ として, N-粒子 Nelson 模型を考える.
- $H_{\rm I}(x)=\sum_{j=1}^N\int_{\mathbb{R}^{dN}}^{\oplus}\phi(\tilde\varphi(\cdot-x_j)dx$
- $\hat\varphi\to 1\!\!1$ の極限を考える. $\varphi(x)\to(2\pi)^{3/2}\delta(x)$. 簡単のために $V=0$ と仮定をする. 切断関数 $\hat\varphi_\varepsilon(k)=e^{-\varepsilon|k|^2/2}1\!\!1_{|k|>\lambda}$, $\varepsilon\geq 0$,
- 正則化された Hamiltonian

$$H_\varepsilon=\mathrm{h_p}\otimes 1\!\!1+1\!\!1\otimes\mathrm{H_f}+gH_{\rm I}^\varepsilon,\quad \varepsilon>0,$$

- くりこみ項

$$E_\varepsilon=-\frac{g^2}{2}N\int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{\omega(k)}\beta(k)1\!\!1_{|k|>\lambda}dk$$

$\beta(k)=\frac{1}{\omega(k)+|k|^2/2}$. $E_\varepsilon\to-\infty$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ に注意.

Nelson (JMP 1964)

次を満たす下から有界な自己共役作用素 H_{ren} が存在する．

$$\mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} e^{-t(H_\varepsilon - E_\varepsilon)} = e^{-tH_{\mathrm{ren}}}, \quad t \geq 0.$$

- この定理を汎関数積分をつかって証明する．

- $(f\otimes 1\!\!1, e^{-2TH_\varepsilon}h\otimes 1\!\!1) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon} \right]$.
- $S_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{-T}^T dt W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)$
- $W_\varepsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\omega(k)} e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-ik\cdot x} e^{-\omega(k)|t|} 1\!\!1_{|k|>\lambda} dk, \quad \varepsilon \geq 0.$
- $(x,t)\neq(0,0)$ で $W_\varepsilon(x,t)$ は滑らかで, $W_\varepsilon(x,t)\to W_0(x,t)$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ が成り立つ. S_ε は $\varepsilon=0$ のとき対角成分に特異性が現れる.
- これを取り除きたい. アイデアは Itôの公式をつかって, 対角成分を引き出すことである.

$T>0$ を固定する. $[t]_T = -T \vee t \wedge T$. 正則化された相互作用を対角成分と非対角成分にわける: $S_\varepsilon = S_\varepsilon^{\mathrm{D}} + S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}$. ここで

$$S_\varepsilon^{\mathrm{D}} = 2\sum_{i,j=1}^{N} \int_{-T}^{T} ds \int_s^{[s+\tau]_T} dt\, W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)$$

$$S_\varepsilon^{\mathrm{OD}} = 2\sum_{i,j=1}^{N} \int_{-T}^{T} ds \int_{[s+\tau]_T}^{T} dt W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s).$$

$S_\varepsilon^{\mathrm{D}}$ は S_ε を対角成分の近傍 $\{(t,t)\in\mathbb{R}^2 \,|\, |t|\le T\}$ で積分したもの, そして $S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}$ はそれ以外の部分を表す.

$$S_\varepsilon^{\mathrm{D}} = 2\sum_{i,j=1}^{N}\int_{-T}^{T}\Phi(B_s^i - B_s^j, 0)ds$$
$$-2\sum_{i,j=1}^{N}\int_{-T}^{T}\Phi(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s)ds$$
$$+2\sum_{i,j=1}^{N}\int_{-T}^{T}ds\int_{s}^{[s+\tau]_T}\nabla\Phi(B_t^i - B_s^j, t-s)\cdot dB_t^i.$$

- $\Phi(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-\varepsilon|k|^2}e^{-ik\cdot x-\omega(k)|t|}}{2\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_{|k|>\lambda}dk, \quad \varepsilon \geq 0.$
- $\Phi(0,0) \to -\infty$ $(\varepsilon\downarrow 0)$
- 右辺第一項の $i=j$ の部分 $=4NT\Phi(0,0)$ がまさに発散項になっているので, くりこまれた作用を $S_\varepsilon^{\mathrm{ren}} = S_\varepsilon - 4NT\Phi(0,0)$ で定義する.

Gubinelli+H.+Lorinczi (JFA14)

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(f\otimes 1\!\!1, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\Phi(0,0))}h\otimes 1\!\!1)=\int_{\mathbb{R}^{3N}}dx\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}\right]$$

紫外切断のくりこみで最も本質的な部分が $H_\varepsilon - g^2N\Phi(0,0)$ の下からの一様有界性を示すことにある.

Gubinelli+H.+Lorinczi (JFA 14)

定数 C があって $H_\varepsilon+g^2N\Phi(0,0)>C$ が $\varepsilon>0$ に一様に成り立つ.

くりこみ項の正体

- $\inf\mathrm{Sp}(H_\varepsilon)=E(g)=\sum_{n=0}^\infty a_n g^{2n}$
- $a_0=0$, $a_1=N\Phi(0,0)$

- 弱結合極限 (WCL)
- κ をスケーリングパラメター.
  $H_\varepsilon(\kappa) = \mathrm{h_p} \otimes 1\!\!1 + \kappa^2 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f} + \kappa H_\mathrm{I}$
- $\exists \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (f \otimes 1\!\!1, e^{-t(H_\varepsilon(\kappa) - E_\varepsilon(\kappa))} h \otimes 1\!\!1) = (f \otimes 1\!\!1, e^{-tH_{\mathrm{ren}}(\kappa)} h \otimes 1\!\!1)$

Gubinelli+H.+Lorinczi (JFA14)

$$\lim_{\kappa \to \infty} (F, e^{-tH_{\mathrm{ren}}(\kappa)} G) = (F, e^{-th_{\mathrm{eff}}} \otimes P_0 G)$$

ここで

$$h_{\mathrm{eff}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \Delta_j + V(x^1, \ldots, x^N) - \frac{g^2}{4\pi} \sum_{i<j} \frac{e^{-\nu|x_i - x_j|}}{|x_i - x_j|}.$$

解析ができる模型の例.

(1) スピン・ボゾン Hamiltonian

$$H_{SB} = \varepsilon\sigma_z \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f} + \alpha\sigma_x \otimes \phi(\hat{h})$$

(2) Nelson 模型で $\mathrm{h_p}$ を $\sqrt{-\Delta + m^2} - m + V$ に置換えて

$$H_{SRN} = (\sqrt{-\Delta + m^2} - m + V) \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f} + H_{\mathrm{I}}$$

(3) Pauli-Fierz 模型

$$H_{PF} = \frac{1}{2m}(p \otimes 1\!\!1 - A)^2 + V \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f}.$$

(4) スピンを含む PF 模型は

$$H_{PF}^{\sigma} = \frac{1}{2m}(\sigma \cdot (p \otimes 1\!\!1 - A))^2 + V \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f}$$

(5) 準相対論的 PF 模型

$$H_{SRPF} = \sqrt{(p \otimes 1\!\!1 - A)^2 + m^2} - m + V \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \mathrm{H_f}$$