量子場と結合したSchrödinger 作用素のスペクトル

廣島文生*

1　序

量子場と結合したSchrödinger 作用素のスペクトル解析は抽象的には埋め込まれた固有値の摂動問題ととらえることができる．離散スペクトルの摂動問題は加藤の regular perturbation theory により確立されているといえるが, 埋め込まれた固有値の摂動問題は摂動が小さくても離散スペクトルのそれとは大きく異なる．

1.1　離散スペクトル

3 次元調和振動子

$$H_{\rm osc} := -\Delta + |x|^2$$

は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の自己共役作用素で, そのスペクトル $\sigma(H_{\rm osc})$ は純粋離散スペクトルである．

$$\begin{aligned}&\sigma(H_{\rm osc}) = \{E_n(0)\}_{n=0}^\infty,\\ &H_{\rm osc}\phi_n(0) = E_n(0)\phi_n(0), \quad n = 0, 1, 2, ...,\end{aligned}$$

とする．$H_{\rm osc}$ に相対有界な対称作用素 $H_{\rm I,osc}$ を加えて $H_{{\rm osc},g}$ を

$$H_{{\rm osc},g} := H_{\rm osc} + gH_{\rm I,osc}, \quad g \in \mathbb{R},$$

で定義すれば $|g| \ll 1$ のとき $H_{{\rm osc},g}$ は ${\rm Dom}(H_{\rm osc})$ 上で自己共役で, n 番目の固有値 $E_n(g)$ は離散スペクトルである．さらに

$$H_{{\rm osc},g}\phi_n(g) = E_n(g)\phi_n(g)$$

とすれば, $E_n(g)$ と $\phi_n(g)$ は g に関して解析的でり, $E_n(g)$ の多重度は **min-max priciple** で評価できる．

1.2　埋め込まれた固有値

質量ゼロの量子場の自由ハミルトニアン $H_{\rm f}$ と結合した $H_{\rm osc}$ を考えれば上述の状況は一変する．$H_{\rm f}$ はフォック空間 $\mathcal{F}_{\rm b}$ 上の自己共役作用素で, そのスペクトルは

$$\sigma(H_{\rm f}) = [0, \infty), \quad \sigma_{\rm p}(H_{\rm f}) = \{0\}$$

である．$H_{\rm f}$ と $H_{\rm osc}$ が結合したハミルトニアンはヒルベルト空間

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{F}_{\rm b}$$

*摂南大学 工学部 数学物理学系教室, e-mail: hiroshima@mpg.setsunan.ac.jp

上の作用素

$$H_0 = H_{\mathrm{osc}} \otimes 1 + 1 \otimes H_{\mathrm{f}}$$

で定義され, そのスペクトル $\sigma(H_0)$ は図 1 のようになる. 図 1 からわかるように H_0 の点ス

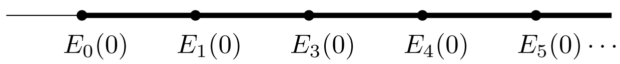


図 1: H_0 のスペクトル

ペクトル $E_n(0)$ は全て連続スペクトルへ埋め込まれている. その結果 H_0 に対称作用素 H_{I} を摂動として加えたとき埋め込まれた点スペクトル $E_n(0)$ がどのような摂動をうけるのか一般にはわからない. $E_n(0)$ は埋め込まれた固有値として生き残るのか?, また生き残った場合の固有値の g に関する解析性は保たれるのか? 実際, 具体的な模型では $E_0(0)$ は埋め込まれた固有値 $E_0(g)$ として生き残り H_g の基底状態 φ_{g} が存在して

$$H_g \varphi_{\mathrm{g}} = E_0(g) \varphi_{\mathrm{g}}$$

となる. しかし $E_n(0)$, $n \geq 1$, は摂動を加えた瞬間に H_g のスペクトルから消え去り, ある複素下半平面上の関数の特異点になる. この特異点は**共鳴極**と呼ばれる.

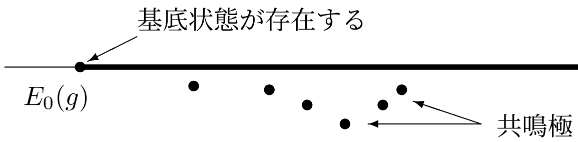


図 2: H_g のスペクトルと共鳴極

重要な模型として Pauli-Fierz 模型, Nelson 模型, Dirac-Maxwel 模型, spin-boson 模型, さらに GSB 模型が知られている. 特に Pauli-Fierz 模型は非相対論的量子電気力学の模型ともいわれ最も重要な模型である. しかし, この講演では Nelson 模型に焦点をあてて現在までの解析結果を紹介することにする. その理由は (1) スカラー場の線形結合模型であり構造が単純, (2) 汎関数積分を応用した解析が成功している, (3) 紫外発散を取り除ける, (4) 赤外発散の問題が解析されている, ということが挙げられる. Pauli-Fierz 模型のレヴューとして例えば [34, 35, 36, 42] を挙げておく.

2 Nelson 模型

2.1 定義

ボゾンフォック空間 $\mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ を $\mathcal{F}_{\mathrm{b}} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n L^2(\mathbb{R}^3)$ で定義し, フォック真空 $\Omega \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ を $\Omega = \{1, 0, 0, ...\}$ と定める. $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$ で均された生成作用素, 消滅作用素を $a^\dagger(f)$, $a(f)$ で表す. これらは**正準交換関係**

$$[a(f), a^\dagger(g)] = (\bar{f}, g)_{L^2(\mathbb{R}^3)}, \quad [a(f), a(g)] = [a^\dagger(f), a^\dagger(g)] = 0$$

を満たす. $a^\sharp(f)$ は f について線形であるから形式的に

$$a^\sharp(f) = \int a^\sharp(k) f(k) dk$$

と書くことにする. $\omega(k)=|k|$ とし, $\omega: L^2(\mathbb{R}^3)\to L^2(\mathbb{R}^3)$ を掛け算作用素とみなす. $d\Gamma(\omega):\mathcal{F}_{\rm b}\to\mathcal{F}_{\rm b}$ を

$$d\Gamma(\omega)a^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(f_n)\Omega=\sum_{j=1}^n a^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(\omega f_j)\cdots a^\dagger(f_n)\Omega$$

で定義し ω の**第 2 量子化**とよび,

$$H_{\rm f}:=d\Gamma(\omega)$$

とかく. 同様に恒等作用素 1 の第 2 量子化を**個数作用素**とよび, $N:=d\Gamma(1)$ とかく. 全ヒルベルト空間 $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R}^3)\otimes\mathcal{F}_{\rm b}$ を $\mathcal{F}_{\rm b}$-値 L^2 関数と同一視することがある. I.e.,

$$\mathcal{H}\cong\int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus}\mathcal{F}_{\rm b}dx. \tag{2.1}$$

$H_{\rm p}=(-1/2m)\Delta+V$ とおいて $\mathcal{H}$ 上の作用素 H_0 を

$$H_0:=H_{\rm p}\otimes 1+1\otimes H_{\rm f}$$

と定める. 相互作用項 $\phi_{\hat\lambda}$ は (2.1) の同一視の下 $\phi_{\hat\lambda}=\int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus}\phi_{\hat\lambda}(x)dx$ で定義する. ここで

$$\phi_{\hat\lambda}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{\hat\lambda(k)}{\sqrt{(2\pi)^3\omega(k)}}\left\{a^\dagger(k)e^{-ikx}+a(k)e^{ikx}\right\}dk.$$

形式的には

$$(\phi_{\hat\lambda}\Psi)(x)=\phi_{\hat\lambda}(x)\Psi(x),\quad \Psi\in\mathcal{H},$$

のように作用する. Nelson 模型のハミルトニアン $H_{\rm N}$ は

$$H_{\rm N}:=H_0+g\phi_{\hat\lambda},\quad g\in\mathbb{R},$$

で定義される. 尚 $H_{\rm N}$ で $\omega(k)=|k|$ を $\sqrt{|k|^2+\nu^2}$ で置き換えたものを **massive** 模型という. λ は物理的にはチャージの分布を表しており, $\hat\lambda$ は λ のフーリエ変換である. 特に $\lambda(x)\ge 0$, $\lambda(x)=\lambda(|x|)$ なる仮定は自然である.

(A) $\hat\lambda(k)=\hat\lambda(-k)=\overline{\hat\lambda(k)}$ かつ $\hat\lambda/\omega,\hat\lambda/\sqrt{\omega}\in L^2(\mathbb{R}^3)$.

この仮定の下で $\phi_{\hat\lambda}$ は $H_{\rm f}$ に無限小相対有界であることが知られているので $H_{\rm N}$ は任意の $g\in\mathbb{R}$ で ${\rm Dom}(H_{\rm p}\otimes 1)\cap{\rm Dom}(1\otimes H_{\rm f})$ 上で下から有界な自己共役作用素であることがわかる (Kato-Rellich の定理). 粒子が理想的に点だとすれば $\lambda(x)=\sqrt{(2\pi)^3}\delta(x)$ であり, このとき $\hat\lambda=1$ である. しかし, 数学的には (A) の仮定の下 $H_{\rm N}$ が自己共役作用素として定義される. E. Nelson [40] は 1964 年, 紫外切断の除去に関する次の命題を示した.

命題 2.1 $\hat\lambda:=\begin{cases}0, & |k|<\kappa,\\ 1, & \kappa\le|k|\le\Lambda,\\ 0, & \Lambda<|k|.\end{cases}$ とする. $E_\Lambda:=g^2\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\hat\lambda(k)/\sqrt{(2\pi)^3\omega(k)}|^2}{\omega(k)+|k|^2/(2m)}dk$ とすれば

$$u-\lim_{\Lambda\to\infty}e^{-it(H_{\rm N}-E_\Lambda)}=e^{-itH_\infty}$$

となる自己役作用素 H_∞ が存在する.

次に $\hat{\lambda}(k)$ の $k=0$ での特異性について説明する. 次の (1) と (2) の場合を考える.

$$(1) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{\lambda}(k)^2}{\omega(k)^3} dk < \infty, \quad (2) \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\hat{\lambda}(k)^2}{\omega(k)^3} dk = \infty.$$

(1) は**赤外正則条件**, (2) は**赤外特異条件**といわれる. $\hat{\lambda}(0) \neq 0$ かつ $\hat{\lambda}(k)$ が $k=0$ の近傍で連続なとき (2) が満たされる. 赤外特異条件の下では慣習的にハミルトニアンの基底状態は存在しないと信じられている.

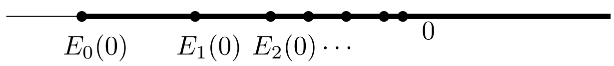
2.2 スペクトル解析

2.2.1 基底状態

H_{p} のスペクトルを

$$\sigma(H_{\mathrm{p}}) = \{E_j\}_{j=0}^{\infty} \cup [0, \infty), \quad E_0(0) \leq E_1(0) \leq \cdots < 0$$

とすれば $H_{\mathrm{p}} \otimes 1 + 1 \otimes H_{\mathrm{f}}$ の固有値は図のように全て連続スペクトルに埋め込まれている.



特に基底状態エネルギ- $E_0(0)$ も埋め込まれた固有値であるため $|g| \ll 1$ でも, H_{N} の基底状態エネルギー $E_0(g)$ が固有値として存在するのかどうか即座にはわからない. もちろん $E_0(g)$ の g に関する解析性どころか微分可能性すら一般にはよくわからない. また埋め込まれた固有値の多重度を解析するのは一般には容易ではない. H_{N} の基底状態 (存在すれば) を φ_{g} と表記することにする.

H_{p} の基底状態を f_{p} として $H_{\mathrm{p}} f_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{p}} f_{\mathrm{p}}$ とすれば $\varphi_0 := f_{\mathrm{p}} \otimes \Omega$ が H_0 の基底状態である. 実際 $H_0 \varphi_0 = E_{\mathrm{p}} \varphi_0$ となる. V に関する適当な条件の下, ある $\gamma > 0$, $k > 0$ に対して $f_{\mathrm{p}} \in \mathrm{Dom}(e^{\gamma|x|^k})$ となること, 及び $N\Omega = 0$ であるから

$$\varphi_0 \in \mathrm{Dom}(e^{\gamma|x|^k} \otimes e^{\beta N}), \quad \beta > 0, \tag{2.2}$$

が従う. しかし相互作用を加えたとき (2.2) の性質が保存されるかどうか自明ではない. I.e.,

$$\varphi_{\mathrm{g}} \in \mathrm{Dom}(e^{\gamma|x|^k} \otimes e^{\beta N}) \quad \beta > 0,$$

は一般にはわからない. これは量子場との相互作用が基底状態にどのような効果を与えるかという興味深い問題のひとつである. 量子場との相互作用の効果が現れるもうひとつの問題が **Enhanced binding** である. はじめに H_{p} に基底状態が存在すると仮定しない. このとき $g=0$ で H_{N} に基底状態が存在しないこともわかる. 結合定数 g を十分大きくしたとき H_{N} に基底状態が現れれば Enhanced binding が起きているという. Enhnaced binding が起きることも適当な条件の下で示されている.

次に基底状態の非存在について説明する. " $\hat{\lambda}$ が赤外特異条件を満たすとき基底状態 φ_{g} があれば, それがまとうソフトボゾンの個数は無限大になってしまうから基底状態は存在しない "と慣習的に説明される. この事実を数学的に示したい. つまり (1) 赤外特異条件の下で基底状態は非存在? (2) 基底状態は存在すれば $(\varphi_{\mathrm{g}}, N\varphi_{\mathrm{g}}) < \infty$? (3) 赤外特異条件と $(\varphi_{\mathrm{g}}, N\varphi_{\mathrm{g}})$ の関係?

2.2.2 共鳴

共鳴の問題とは, 次の (1) と (2) を示すことである.

(1) ある稠密な定義域 $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ を定義し, 任意の $\Psi, \Phi \in \mathcal{D}$ に対し,

$$f(z) = (\Psi, (H_{\mathrm{N}} - z)^{-1}\Phi)$$

が z について複素上半平面 $\mathbb{C}_+$ から複素下半平面 $\mathbb{C}_-$ へ解析接続できる.

(2) $\mathbb{C}_-$ 上に $f(z)$ の極が存在する.

共鳴を解析するための方法のひとつが **complex dilation** である. $\theta > 0$ としよう. $L^2(\mathbb{R}^3)$ の上のユニタリー作用素を $u_\theta f(k) = e^{3\theta/2} f(e^\theta k)$ で定義し, $\mathcal{F}$ 上のユニタリー作用素を

$$U_\theta := 1 \otimes \Gamma(u_\theta)$$

で定義する.

$$H_{\mathrm{N}}(\theta) := U_\theta H_{\mathrm{N}} U_\theta^{-1} = H_0(\theta) + gH_{\mathrm{I,N}}(\theta)$$

とおけば,

$$H_0(\theta) := H_{\mathrm{p}} \otimes 1 + e^\theta 1 \otimes H_{\mathrm{f}}$$

である. U_θ がユニタリー作用素なので

$$f(z) = (U_\theta \Psi, (H_{\mathrm{N}}(\theta) - z)^{-1} U_\theta \Phi). \tag{2.3}$$

$H_0(\theta)$ は $\theta \to -i\theta$ と解析接続できる. $H_0(-i\theta)$ のスペクトルは H_{p} のスペクトルから角度 $-\theta$ の方向に H_{f} のスペクトル $[0, \infty)$ が伸び形をしているている (図 3).

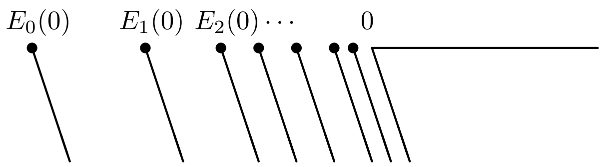


図 3: $H_0(-i\theta)$ のスペクトル

$f(z)$ の解析接続性を解析するためには (2.3) より $H_{\mathrm{I,N}}(\theta)$ の $\theta \to -i\theta$ への解析接続性と $H_{\mathrm{N}}(-i\theta)$ のスペクトルを調べればよい. 図 3 から $H_0(-i\theta)$ の固有値 $E_j(0)$, $j = 0, 1, 2, ..,$ は全て連続スペクトルに埋め込まれていることがわかる. その結果, 摂動 $H_{\mathrm{I,N}}(-i\theta)$ を加えたときにこれらの固有値がそのまま固有値として残るかどうか自明ではない. もし残ればそれらは共鳴極になることがわかる. これから共鳴の問題も本質的に埋め込まれた固有値の摂動問題ととらえることができる.

以上まとめて H_{N} のスペクトル解析では次のような問題がある. (1) 赤外正則条件を満たすとき (i) H_{p} に基底状態が存在するとき H_{N} に基底状態が存在するのか? (ii) H_{p} の基底状態の存在の有無に関わらず, 十分大きな g で H_{N} に基底状態が存在するのか? Enhanced binding の問題, (2) 赤外特異条件を満たすとき H_{N} の基底状態は非存在か? (3) $(\varphi_{\mathrm{g}}, (1 \otimes N)\varphi_{\mathrm{g}})_{\mathcal{H}}$ と赤外特異条件の関係は? (4) 基底状態の多重度, (5) $\|(e^{\gamma|x|^k} \otimes e^{\beta N})\varphi_{\mathrm{g}}\|_{\mathcal{H}} < \infty$? (6) 共鳴の問題.

3 基底状態

3.1 結合定数が小さな場合

ほとんどいたるとこころの $k \in \mathbb{R}^3$ で定義された作用素

$$T(k) := e^{-ikx}\hat{\lambda}(k)/\sqrt{(2\pi)^3\omega(k)} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$$

は次を満たす.

定理 3.1 (Hiroshima [33], Arai-Hirokawa-Hiroshima [6]) φ_{g} を H_{N} の**任意の基底状態**とする. このとき

$$\varphi_{\mathrm{g}} \in \mathrm{Dom}(1 \otimes N^{1/2}) \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \|(H_{\mathrm{N}} - E(H_{\mathrm{N}}) + \omega(k))^{-1}T(k)\varphi_{\mathrm{g}}\|_{\mathcal{H}}^2 dk < \infty$$

さらに, 上の両辺のどちらかが成り立てば

$$\|(1 \otimes N^{1/2})\varphi_{\mathrm{g}}\|_{\mathcal{H}}^2 = g^2 \int_{\mathbb{R}^3} \|(H_{\mathrm{N}} - E(H_{\mathrm{N}}) + \omega(k))^{-1}T(k)\varphi_{\mathrm{g}}\|_{\mathcal{H}}^2 dk. \tag{3.1}$$

定理 3.2 $\sigma_{\mathrm{gap}}(H_{\mathrm{p}}) := \inf \sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mathrm{p}}) - \inf \sigma(H_{\mathrm{p}}) > 0$ とし, 赤外正則条件を仮定する. このとき $\exists g_* \ st\ |g| < g_*$ となる g に対して H_{N} の基底状態が存在する.

証明: H_{N} で $\omega(k) = |k|$ を $\sqrt{|k|^2 + \nu^2}$, $\nu > 0$, でおき変えたものを $H_{\mathrm{N}\nu}$ とおく. $H_{\mathrm{N}\nu}$ の基底状態 φ_{g_ν} の存在は示すことができる. $\varphi_{\mathrm{g}_\nu} \in \mathrm{Dom}(1 \otimes N^{1/2})$ もわかる. $\|\varphi_{\mathrm{g}_\nu}\|_{\mathcal{H}} = 1$ と正規化し $\{\nu\}$ の部分列 $\{\nu'\}$ で $w - \lim_{\nu' \to 0} \varphi_{\mathrm{g}_{\nu'}} = \varphi_{\mathrm{g}}$ となるものを選ぶ ($\varphi_{\mathrm{g}} = 0$ かもしれない). Ker T への射影作用素を P_T とかけば

$$(\varphi_{\mathrm{g}_{\nu'}}, (P_{H_{\mathrm{p}}} \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\varphi_{\mathrm{g}_{\nu'}})_{\mathcal{H}} \geq 1 - \|(1 \otimes N^{1/2})\varphi_{\mathrm{g}_{\nu'}}\|_{\mathcal{H}}^2 - \|(P_{H_{\mathrm{p}}}^{\perp} \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\varphi_{\mathrm{g}_{\nu'}}\|_{\mathcal{H}}^2$$

が示せる. (3.1) と赤外正則条件から

$$\|(1 \otimes N^{1/2})\varphi_{\mathrm{g}_{\nu'}}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq g^2 C_1$$

が示せる. $\|(P_{H_{\mathrm{p}}}^{\perp} \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\varphi_{\mathrm{g}_{\nu'}}\|_{\mathcal{H}}^2 < g^2 C_2$ も示せる. ゆえに, $|g| \ll 1$ のとき ν' に一様に $(\varphi_{\mathrm{g}_{\nu'}}, (P_{H_{\mathrm{p}}} \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\varphi_{\mathrm{g}_{\nu'}})_{\mathcal{H}} > 0$ となる. ここで $P_{H_{\mathrm{p}}} \otimes P_{d\Gamma(\omega)}$ が finite rank 作用素であるから $\nu' \to 0$ とすれば $(\varphi_{\mathrm{g}}, (P_{H_{\mathrm{p}}} \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\varphi_{\mathrm{g}})_{\mathcal{H}} > 0$ がわかる. 特に $\varphi_{\mathrm{g}} \neq 0$ である. $\varphi_{\mathrm{g}} \neq 0$ ならば φ_{g} は H_{N} の基底状態であることが Arai-Hirokawa [4] で示されているので定理が従う. □

3.2 任意の結合定数への拡張

$t > 0$ に対して

$$\phi_t := e^{-tH_{\mathrm{N}}}(f \otimes \Omega)/\|e^{-tH_{\mathrm{N}}}(f \otimes \Omega)\|_{\mathcal{H}}, \quad f \geq 0, \quad f \not\equiv 0), \tag{3.2}$$

とする. $\varphi_{\mathrm{g}} = w - \lim_{t \to \infty} \phi_t \neq 0$ ならば φ_{g} は H_{N} の基底状態であることが知られている. $R := E_{H_{\mathrm{p}}}([E(H_{\mathrm{p}}), \Sigma(H_{\mathrm{p}}) - \delta])$ とおく. ここで $E_T(\cdots)$ は T のスペクトル射影作用素, $\Sigma(H_{\mathrm{p}}) := \inf \sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mathrm{p}})$, $\delta > 0$ は十分小さな数. $\sigma_{\mathrm{gap}}(H_{\mathrm{p}}) > 0$ の下

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, (R \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\varphi_{\mathrm{g}}) = \liminf_{t \to \infty} (\phi_t, (R \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\phi_t) \geq e^{-\tau E(H_{\mathrm{p}}) - g^2 \ell(\tau)} - e^{-\tau(\Sigma(H_{\mathrm{p}}) - \delta)} \tag{3.3}$$

が示せる. ここで τ, $\ell(\tau)$ はある正数. 特に $\Sigma(H_{\mathrm{p}}) = \infty$ のとき, 任意の g で $\varphi_{\mathrm{g}} \neq 0$ となるから次の定理をえる.

定理 3.3 (Spohn [41]) $\Sigma(H_{\rm p}) = \infty$ のとき $H_{\rm N}$ の基底状態は任意の g で存在する.

Gérard [20] は $H_{\rm p}$ のリゾルベントがコンパクト作用素であるという仮定の下, 定理 3.3 の関数解析的な別証明を与えた. Hiroshima [29, 32] は Pauli-Fierz 模型のハミルトニアンが任意の結合定数で自己共役であることを示し, Griesemer-Lieb-Loss [23] はその基底状態が任意の結合定数で存在することを証明した.

Enhanced binding の問題は Hiroshima-Spohn [37] が双極子近似を施した Pauli-Fierz 模型で考察した. その後 Arai-Kawano [7], Catto-Hainzl [14], Chen-Vougalter-Vugalter [15], Hainzl-Vougalter-Vugalter [24] らによって考察されている.

3.3 紫外赤外両切断のないハミルトニアンの基底状態の存在

$\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素

$$K_{\rm N} = -\frac{1}{2m}\Delta \otimes 1 + 1 \otimes d\Gamma(\omega) + g(Z\phi_{\hat{\lambda}}(0) + \phi_{\hat{\lambda}})$$

を考える. $K_{\rm N}$ は 2 粒子系の Nelson 模型で 1 つの粒子の質量が無限大で原点に固定されている状態を表す. ここで $\hat{\lambda}(k) := \begin{cases} 0, & |k| < \kappa, \\ 1, & \kappa \le |k| \le \Lambda, \\ 0, & |k| > \Lambda \end{cases}$, $Z > 0$ は定数である.

$$R_\Lambda := g^2 \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{\lambda}(k)|^2}{2(2\pi)^3\omega(k)\left\{(|k| + |k|^2/2)^{-1} + Z^2/\omega(k)\right\}} dk,$$

とおけばユニタリー作用素 $U_{\Lambda,\kappa}$ ($U_{\Lambda,\kappa}$ は $\kappa = 0$ で定義されない) が存在してリゾルベントの意味で一様に

$$\lim_{\kappa\to 0}\lim_{\Lambda\to\infty} U_{\Lambda,\kappa}^{-1}(K_{\rm N} + R_\Lambda)U_{\Lambda,\kappa} = {}^{\exists}H_{\infty,0}$$

となることが Nelson [40] と同様に示せる.

定理 3.4 (Hirokawa-Hiroshima-Spohn [26]) $0 < |g| \ll 1$ のとき $H_{\infty,0}$ の基底状態が存在する.

定理は多くの重要な事実を含んでいる. まず $g = 0$ で $H_{\infty,0}$ に基底状態が存在していないので Enhnaced binding が起きている. また Nelson 模型は $\kappa = 0$ で基底状態が存在しないことが示されているので, $H_{\infty,0}$ は基底状態が存在するような表現 (赤外正則条件) へ移ったと考えられる.

3.4 汎関数積分表現

$(\Psi, e^{-tH_{\rm N}}\Phi)_{\mathcal{H}}$ を汎関数積分表示できる. 以下 $\# = 3, 4$ を表す. $(Q_\#, d\nu_\#)$ を確率空間, $(\phi_\#(f), f \in L^2_{\rm real}(\mathbb{R}^\#))$ を $f \in L^2_{\rm real}(\mathbb{R}^\#)$ を指標にもつ平均が 0, 共分散が

$$\int_{Q_\#} \phi_\#(f)\phi_\#(g) d\nu_\#(\phi_\#) = \frac{1}{2}(\hat{f}, \hat{g})_{L^2(\mathbb{R}^\#)}$$

の **Gauss 型確率超過程**とする. ユニタリー作用素 $\mathcal{U} : \mathcal{F}_{\rm b} \to L^2(Q_3)$ で

$$\phi_3(\hat{\lambda}_\omega(\cdot - x)) = \mathcal{U}\phi_{\hat{\lambda}}(x)\mathcal{U}^{-1}$$

となるものが存在する．ここで $\hat{\lambda}_\omega = (\hat{\lambda}/\sqrt{\omega})\check{}$ である．等長作用素 $j_t : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^4)$ で $j_t^* j_s = e^{-|t-s|\omega}$ をみたすものが構成できる．$J_t : L^2(Q_3) \to L^2(Q_4)$ は $L^2(Q_3) \cong \mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ の同一視の下

$$J_s^* J_t \cong e^{-|s-t|d\Gamma(\omega)}$$

をみたす．dP を $C([0,\infty);\mathbb{R}^3)$ 上の Wiener 測度, $(B(s))_{s\geq 0}$ を 3 次元 Brown 運動, $X_s := x + B(s)$, $W := C([0,\infty);\mathbb{R}^3) \times \mathbb{R}^3$, $dX := dP \otimes dx$,

$$K(t) := \int_0^t j_s \hat{\lambda}_\omega(\cdot - X_s) ds$$

は $L^2(\mathbb{R}^4)$-値積分とする．次式が成り立つ [27].

$$(\Psi, e^{-tH_{\mathrm{N}}}\Phi)_{\mathcal{H}} = \int_W e^{-\int_0^t V(X_s)ds} \left(\Psi(X_0), J_0^* e^{-g\phi_4(K(t))} J_t \Phi(X_t)\right)_{L^2(Q_3)} dX. \tag{3.4}$$

Carmona の評価 [13] を (3.4) へ応用すれば次の系を示すことができる．

系 3.5 (Hiroshima [31]) $V = Z + W$ は次をみたすと仮定する．$(i) \inf Z > -\infty$, $(ii) W < 0$, $(iii) Z \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^3)$, $(iv) W \in L^p(\mathbb{R}^3)$, $p > 3/2$. このとき H_{N} の基底状態 φ_{g} は次をみたす．(1) $Z(x) \geq c|x|^{2n}$ $(|x| \gg 1)$ ならば $\|\varphi_{\mathrm{g}}(x)\|_{\mathcal{F}_{\mathrm{b}}} \leq c_1 e^{-c_2|x|^{n+1}}$. (2) $\liminf_{|x|\to\infty} Z(x) > \inf \sigma(H_{\mathrm{N}})$ ならば $\|\varphi_{\mathrm{g}}(x)\|_{\mathcal{F}_{\mathrm{b}}} \leq c_1 e^{-c_2|x|}$. ここで c, c_1, c_2 は適当な定数．

3.5　赤外発散と基底状態の非存在

赤外正則条件を仮定しよう．ϕ_t を (3.2) で定義すれば $(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{-\beta N}\varphi_{\mathrm{g}}) = \lim_{t\to\infty}(\phi_t, e^{-\beta N}\phi_t)$ が示せる．$(\phi_t, e^{-\beta N}\phi_t)$ を汎関数積分表示して $t \to \infty$ の極限操作をおこなえば, $C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^3)$ 上のある確率測度 μ_{Gibbs} が存在して

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{-\beta N}\varphi_{\mathrm{g}})_{\mathcal{H}} = \int_{C(\mathbb{R},\mathbb{R})} e^{-(g^2/2)(1-e^{-\beta})F_\infty(q)} d\mu_{\mathrm{Gibbs}}(q) \tag{3.5}$$

と表せることが Betz-Hiroshima-Lőrinczi-Minlos-Spohn [12] で示された．ここで

$$F_\infty(q) = \int_{-\infty}^0 ds \int_0^\infty dt \int_{\mathbb{R}^3} e^{-|t-s|\omega(k)} e^{ik(q(s)-q(t))} |\hat{\lambda}(k)|^2/\omega(k) dk$$

は **2 重ポテンシャル** といわれ $|F_\infty(q)| \leq \|\hat{\lambda}/\omega^{3/2}\|_{\mathcal{H}}^2 < \infty$ をみたす．μ_{Gibbs} は **無限体積 Gibbs 測度**とよばれる．$(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{-\beta N}\varphi_{\mathrm{g}})_{\mathcal{H}}$ の β は (3.5) の右辺により複素平面上に解析接続できる．

定理 3.6 (Betz-Hiroshima-Lőrinczi-Minlos-Spohn [12]) 赤外正則条件を仮定する．このとき任意の $\beta > 0$ で $(\varphi_{\mathrm{g}}, (1 \otimes e^{\beta N})\varphi_{\mathrm{g}})_{\mathcal{H}} < \infty$ が成り立つ．

定理 3.6 は H_{N} の基底状態に含まれるボゾンの個数が任意の g に対しても非常に少ないことを示している．また (3.5) から

$$-a + b\|\hat{\lambda}/\omega^{3/2}\|_{\mathcal{H}}^2 \leq (\varphi_{\mathrm{g}}, N\varphi_{\mathrm{g}})_{\mathcal{H}} \leq (g^2/2)\|\hat{\lambda}/\omega^{3/2}\|_{\mathcal{H}}^2$$

となる正の定数 a, b が存在することがわかる．

定理 3.7 (Betz-Hiroshima-Lőrinczi-Minlos-Spohn [12])

$$\lim_{\|\hat{\lambda}/\omega^{3/2}\|\to\infty}(\varphi_{\mathrm{g}},(1\otimes N)\varphi_{\mathrm{g}})=\infty.$$

定理 3.6 と 定理 3.7 から Nelson 模型では赤外発散が基底状態の非存在とボゾン粒子数期待値の発散をまねくことが数学的に証明されたことがわかるだろう.

H_{N} の基底状態の非存在をはじめて証明したのは, Lőrinczi-Minlos-Spohn [39] である.

定理 3.8 (Lőrinczi-Minlos-Spohn [39]) 赤外特異条件を仮定する. V は次の (1), (2) のいずれかをみたす. (1)$V(x)=C|x|^{2s}+o(|x|^{2s}), s>1$. (2) V が Kato クラスで $V(x)>C|x|^s, s>0$. このとき H_{N} の基底状態は任意の g で存在しない.

Arai [3] は赤外特異条件を仮定しても **Non-Fock 表現**で Nelson 模型のハミルトニアンを再定義すれば基底状態が存在することを示した. 基底状態の非存在は [5, 6, 17, 25] でも議論されている. また Pauli-Fierz 模型の場合は赤外特異条件の下でも基底状態が存在することが [10, 23] で示されている.

3.6 基底状態の多重度

定義 3.9 (M,dm) を σ 有界な測度空間とする. $L^2(M)$ 上の有界作用素 T が, 恒等的にゼロではない任意の非負関数 $f,g\geq 0$ に対して $(f,Tg)_{L^2(M)}>0$ となるとき, T は **正値性改良型作用素**という. また $(f,Tg)_{L^2(M)}\geq 0$ となるとき**正値性保存型作用素**という.

補題 3.10 (Glimm-Jaffe [22]) $L^2(M)$ 上の自己共役作用素 K の熱半群 e^{-tK} が正値性改良型作用素と仮定する. このとき K の基底状態が存在すれば一意的である.

定理 3.11 (Bach-Fröhlich-Sigal [9]) $e^{-tH_{\mathrm{P}}}$ が正値性改良型作用素とする. H_{N} の基底状態が存在すれば一意的である.

証明: $(\Psi,e^{-tH_{\mathrm{N}}}\Phi)_{\mathcal{H}}$ の汎関数積分表示を応用して $e^{-tH_{\mathrm{N}}}$ が正値性改良型作用素であることが示せる. □

Pauli-Fierz 模型の基底状態の一意性は Hiroshima [28] が示した. 一般的な模型の基底状態の多重度の評価は Hiroshima [33] で示されている. また Hiroshima-Spohn [38] はスピンがある場合の Pauli-Fierz 模型の基底状態が 2 重に縮退していることを示した.

4 共鳴と散乱理論

4.1 共鳴

Bach-Fröhlich-Sigal [8, 9] は, **Feshbach 写像**をもちいて共鳴の問題を解いた.

定理 4.1 (Bach-Fröhlich-Sigal [8, 9]) $|g|\ll 1$ と仮定する. *(1)* $(\Psi,(H_{\mathrm{N}}-z)^{-1}\Phi)$ は $E_j(0)$, $j\geq 1$, の十分小さな実軸上の近傍を通り $\mathbb{C}_+$ から $\mathbb{C}_-$ へ解析接続可能である, *(2)* $E_j(0)$ の $\mathbb{C}_-$ 内の近傍に $H_{\mathrm{N}}(\theta)$ の固有値 $E_j^{(1)}(g),...,E_j^{(m)}(g)$ が存在する. *(3)* $E_j^{(1)}(g),...,E_j^{(m)}(g)$ は共鳴極である. *(4)* $\lim_{g\to 0}E_j^{(k)}(g)=E_j$, $k=1,...,m$.

定理 4.1 (2) で $E_j^{(k)}(g)$ はある写像 $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の不動点として与えられる [8, 9]. Hiroshima [31] は 特異なポテンシャル V に対して埋め込まれた固有値が共鳴極にならず, 埋め込まれた固有値のままである例を構成した. $E_j(0)$ の多重度が m のとき, 一般に共鳴極は $E_j(0)$ の近傍で m 個, $E_j^{(k)}(g)$, $k = 1, ..., m$, あらわれる. $|\mathrm{Re}(E_j^{(k)}(g) - E_i^{(l)}(g))|$ が数理物理学的観点からみた **Lamb のずれ** である.

定理 4.2 (Bach-Fröhlich-Sigal-Soffer [11]) Δ を $E_j(0)$ を含む十分小さい区間, 又は $\Delta \subset [E_j(0), E_{j+1}(0)]$ を $E_j(0)$, $E_{j+1}(0)$ から十分離れた区間とする. $|g| \ll 1$ とする. このとき Δ に含まれる H_N のスペクトルは純粋絶対連続スペクトルである.

定理 4.2 は Pauli-Fierz 模型に対して**正交換子法** を用いて示されている. また Bach-Fröhlich-Sigal [10] は Feshbach 写像を応用した別証明を与えている.

4.2 漸近場の存在

散乱理論における Cook の方法は H_N へ応用できる. 簡単のために, $\hat{\lambda} \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ と仮定する. $a_t^\dagger(f) = e^{itH_\mathrm{N}} e^{-itH_0} a^\dagger(f) e^{itH_0} e^{-itH_\mathrm{N}}$ の両辺を t で微分して積分すれば

$$a_t^\dagger(f)\Psi = a^\dagger(f)\Psi - i\int_0^t e^{isH_\mathrm{N}} K(s, x, f) e^{-isH_\mathrm{N}} \Psi ds. \tag{4.1}$$

ここで $K(s, x, f) := \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\lambda}(k) e^{-ikx} e^{-is\omega(k)} f(k)/\sqrt{2(2\pi)^3\omega(k)} dk$ である.

定理 4.3 (Hiroshima [30]) $V(x) = |x|^2$, $|g| \ll 1$, $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus P)$ とする. ここで P はルベーグ測度ゼロのある集合. このとき $\Psi \in \mathrm{Dom}(H_\mathrm{N})$ に対して

$$s - \lim_{t \to \infty} a_t^\sharp(f)\Psi = a_\pm^\sharp(f)\Psi$$

が存在する.

$a_\pm^\sharp(f)$ のテスト関数は $f, f/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^3)$ となる f まで拡張できる. $a_\pm^\sharp(f)$ を**漸近的生成消滅作用素**とよぶ. $a_\pm^\sharp(f)$ は正準交換関係をみたす. 漸近的生成消滅作用素の存在がわかれば $\sigma_\mathrm{gap}(H_\mathrm{N}) = 0$ が示せる.

$\{a_\pm^\dagger(f_1) \cdots a_\pm^\dagger(f_n)\varphi_\mathrm{g}, \varphi_\mathrm{g} | f_j \in, n \in \mathbb{N}\}$ の線形結合全体の閉包を $\mathcal{F}_{\mathrm{asy}\pm}$ で表し, $W_\pm : \mathcal{F}_{\mathrm{asy}\pm} \to \mathcal{F}_\mathrm{b}$ を

$$W_\pm a_\pm^\dagger(f_1) \cdots a_\pm^\dagger(f_n)\varphi_\mathrm{g} = a^\dagger(f_1) \cdots a^\dagger(f_n)\Omega$$

で定義する. 線形に拡張すれば $W_\pm$ はユニタリー作用素になる. $\mathcal{F}_{\mathrm{asy}\pm}$ は H_N を約し,

$$W_\pm e^{it(H_\mathrm{N}\lceil_{\mathcal{F}_{\mathrm{asy}\pm}})} = e^{it(d\Gamma(\omega) + E(H_\mathrm{N}))} W_\pm$$

をみたから, 特に $\mathcal{H} \cong \mathcal{F}_{\mathrm{asy}\pm} \oplus \mathcal{F}_{\mathrm{asy}\pm}^\perp$, $H_\mathrm{N} \cong (d\Gamma(\omega) + E(H_\mathrm{N})) \oplus (H_\mathrm{N}\lceil_{\mathcal{F}_{\mathrm{asy}\pm}})$ となる.

定理 4.4 (Hiroshima [30]) H_N の基底状態が存在し $V = |x|^2$ とする. $|g| \ll 1$ のとき H_N の絶対連続スペクトルは $[E(H_\mathrm{N}), \infty)$. 特に $\sigma_\mathrm{gap}(H_\mathrm{N}) = 0$.

Ammari [1] は massive Nelson 模型で $\sigma_\mathrm{ess}(H_\mathrm{N}) = [E(H_\mathrm{N}) + \nu, \infty)$ を証明した. Arai [2] は基底状態の存在を仮定せずに定理 4.4 よりも一般的な結果を示した. Dereziński-Gérard [17] は非フォック空間上の massless Nelson 模型の漸近的生成消滅作用素を構成した. Pauli-Fierz 模型の漸近場の構成は Fröhlich-Griesemer-Schlein [18], Hiroshima [30] を見よ.

4.3 漸近完全性

$e^{-itH_\mathrm{N}}\Psi$ は時間が経過すればボゾンを自発放射して固有状態へ緩和すると予想されている. $\mathcal{I}:\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}_\mathrm{b}\to\mathcal{H}$ を

$$\mathcal{I}(\phi\otimes(a^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(f_n)\Omega)=a^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(f_n)\phi$$

で定義する. $\Omega_+:\mathcal{H}\otimes\mathcal{F}_\mathrm{b}\to\mathcal{H}$ を

$$\Omega_+=s-\lim_{t\to\infty}e^{itH_\mathrm{N}}\mathcal{I}e^{-it\tilde{H}_\mathrm{N}}(P_\mathrm{pp}(H_\mathrm{N})\otimes 1)$$

で定義する. ここで, $\tilde{H}_\mathrm{N}:=H_\mathrm{N}\otimes 1+1\otimes d\Gamma(\omega)$, $P_\mathrm{pp}(H_\mathrm{N})$ は H_N の点スペクトルへの射影作用素である.

定義 4.5 $\mathrm{Ran}\Omega_+\supset E_{H_\mathrm{N}}((-\infty,\Sigma))\mathcal{H}$ のとき **Rayleigh 散乱に対する漸近的完全** という.

Rayleigh 散乱に対する漸近的完全とは任意の $\Psi\in E_{H_\mathrm{N}}((-\infty,\Sigma))\mathcal{H}$ に対して固有状態 $\Phi_\mathrm{b}\in\mathcal{H}$, $H_\mathrm{N}\Phi_\mathrm{b}=E\Phi_\mathrm{b}$, と光子だけの状態 $\phi\in\mathcal{F}_\mathrm{b}$ が存在して

$$e^{-itH_\mathrm{N}}\Psi\cong e^{-itE}\Phi_\mathrm{b}\otimes_s e^{-itd\Gamma(\omega)}\phi,\quad t\to\infty,$$

となることである. Fröhlich-Griesemer-Schlein [19] は massive Nelson 模型の Rayleigh 散乱の漸近完全性を証明した. 次に H_N の任意の固有状態 Φ に対してある稠密な集合 $\mathcal{D}\subset L^2(\mathbb{R}^3)$ が存在して $a_\pm(f)\Phi=0$, $f\in\mathcal{D}$, が成り立つことは知られている. よって

$$\mathcal{K}_\pm:=\{\Psi\in\mathcal{H}|a_\pm(f)\Psi=0,f\in\mathcal{D}\}$$

とすれば $P_\mathrm{pp}(H_\mathrm{N})\mathcal{H}\subset\mathcal{K}_\pm$ がわかる.

定義 4.6 $P_\mathrm{pp}(H_\mathrm{N})\mathcal{H}=\mathcal{K}_\pm$ のとき**漸近的完全** という.

Dereziński-Gérard [16] は massive Nelson 模型の漸近完全性を証明した. massles Nelson 模型の漸近完全性については, Gérard [21] の部分的な結果がある.

参考文献

[1] Z. Ammari, Asymptotic completeness for a renormalized non-relativistic hamiltonian in quantum field theory: the Nelson model, *Math. Phys., Anal. Geom.* **3** (2000), 217–285.

[2] A. Arai, Essential spectrum of a self-adjoint operator on an abstract Hilbert space of Fock type and applications to quantum field Hamiltonians, J. Math. Anal. Appl. **246** (2000), 189–216.

[3] A. Arai, Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation, *Rev. Math. Phys.* **13** (2001), 1075–1094.

[4] A. Arai and M. Hirokawa, On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model, *J. Funct. Anal.* **151** (1997), 455–503.

[5] A. Arai, M. Hirokawa, and F. Hiroshima, On the absence of eigenvectors of Hamiltonians in a class of massless quantum field models without infrared cutoff, *J. Funct. Anal.* **168** (1999), 470–497.

[6] A. Arai, M. Hirokawa, and F. Hiroshima, Regularities of ground states in quantum field models, preprint, 2004.

[7] A. Arai and H. Kawano, Enhanced binding in a general class of quantum field models, Rev. Math. Phys.**15** (2003), 387–423.

[8] V. Bach, J. Fröhlich, I. M. Sigal, Renormalization group analysis of spectral problems in quantum field theory, *Adv. Math.* **137** (1998), 205–298.

[9] V. Bach, J. Fröhlich, I. M. Sigal, Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles, *Adv. Math.* **137** (1998), 299–395.

[10] V. Bach, J. Fröhlich, I. M. Sigal, Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation field, *Commun. Math. Phys.* **207** (1999), 249–290.

[11] V. Bach, J. Fröhlich, I. M. Sigal, and A. Soffer, Positive commutators and the spectrum of Pauli-Fierz Hamiltonian of atoms and molecules, *Commun. Math. Phys.* **207** (1999), 557–587.

[12] V. Betz, F. Hiroshima, J. Lőrinczi, R. A. Minlos and H. Spohn, Gibbs measure associated with particle-field system, *Rev. Math. Phys.*, **14** (2002), 173–198.

[13] R. Carmona, Pointwise bounds for Schrödinger operators, *Commun. Math. Phys.* **62** (1978), 97–106.

[14] I. Catto and C. Hainzl, Self-energy of one electron in non-relativistic QED, arXiv:math-ph/0207036, preprint, 2002.

[15] T. Chen, V. Vougalter and S. A. Vugalter, The increase of binding energy and enhanced binding in nonrelativistic QED, *J. Math. Phys.* **44** (2003), 1961–1970.

[16] J. Dereziński and C. Gérard, Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli-Fierz Hamiltonian, *Rev. Math. Phys.* **11** (1999), 383–450.

[17] J. Dereziński and C. Gérard, Scattering theory of infrared divergent Pauli-Fierz Hamiltonians, preprint, 2003.

[18] J. Fröhlich, M. Griesemer and B. Schlein, Asymptotic electromagnetic fields in a mode of quantum-mechanical matter interacting with the quantum radiation field, mp-arc 00–374, preprint, 2000.

[19] J. Fröhlich, M. Griesemer and B. Schlein, Asymptotic completeness for Reyleigh scattering, preprint, 2001.

[20] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. Henri Poincaré* **1** (2000), 443–459.

[21] C. Gérard, On the scattering theory of massless Nelson models, *Rev. Math. Phys.* **14** (2002), 1165–1280. 2001.

[22] J. Glimm and A. Jaffe, The $\lambda(\phi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs:II. The field operators and approximate vacuum, *Ann. Math.* **91** (1970), 362–401.

[23] M. Griesemer, E. Lieb and M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, *Invent. math.* **145** (2001), 557–595.

[24] C. Hainzl, V. Vougalter and S. A. Vugalter, Enhanced binding in non-relativistic QED, *Commun. Math. Phys.* **233** (2003), 13–26.

[25] M. Hirokawa, Infrared catastrophe for Nelson's model, mp-arc 03-512, preprint, 2003.

[26] M. Hirokawa, F. Hiroshima, and H. Spohn, Ground state for point particles interacting through a massless scalr field, arXiv:math-ph/0211050, preprint, 2003, to be published in *Adv. in Math.*

[27] F. Hiroshima, Functional integral representation of a model in quantum electrodynamics, *Rev. Math. Phys.* **9** (1997), 489–530.

[28] F. Hiroshima, Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics I, *J. Math. Phys.* **40** (1999), 6209–6222, II *J. Math. Phys.* **41** (2000), 661–674.

[29] F. Hiroshima, Essential self-adjointness of translation-invariant quantum field models for arbitrary coupling constants, *Commun. Math. Phys.* **211** (2000), 585–613.

[30] F. Hiroshima, Ground states and spectrum of quantum electrodynamics of non-relativistic particles, *Trans. Amer. Math. Soc.* **353** (2001), 4497–4528.

[31] F. Hiroshima, Embedded eigenvalues, localization and asymptotics of quantum field models: a functional integral approach, *J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002), 351–375.

[32] F. Hiroshima, Self-adjointness of the Pauli-Fierz Hamiltonian for arbitrary values of coupling constants, *Ann. Henri Poincaré*, **3** (2002), 171–201.

[33] F. Hiroshima Multiplicity of ground states in quantum field models: applications of asymptotic fields, mp-arc 04-049, preprint, 2004.

[34] F. Hiroshima, Analysis of ground states of atoms interacting with a quantized radiation field, *Topics in the Schrödinger operator*, World Scientific, 145–272, 2004.

[35] 廣島文生, 非相対論的量子電気力学, 現代物理学の歴史 第 44 章, 570-590, 朝倉書店, 2004.

[36] 廣島文生, 場の理論における埋蔵固有値の摂動問題, 数学, 日本数学会, 2004, 掲載予定.

[37] F. Hiroshima and H. Spohn, Enhanced binding through coupling to a quantum field, *Ann. Henri Poincaré* **2** (2001), 1159–1187.

[38] F. Hiroshima and H. Spohn, Ground state degeneracy of the Pauli-Fierz model with spin, *Adv. Theor. Math. Phys.* **5** (2001), 1091–1104.

[39] J. Lőrinczi, R. A. Minlos and H. Spohn, The infrared behaviour in Nelson's model of a quantum particle coupled to a massless scalar field, *Ann. Henri Poincaré* **3** (2001), 1–28.

[40] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1190–1197.

[41] H. Spohn, Ground state of quantum particle coupled to a scalar boson field, *Lett. Math. Phys.* **44** (1998), 9–16.

[42] H. Spohn, *The Dynamics of Charged Particles and Radiation*, preprint, 2003.