

# ヒルベルト空間の命名とその後 ～フォン・ノイマンの時代～

廣島 文生 九大・数理

RIMS 研究会 関数空間論とその周辺  
2023/ 2/13-15

# 1. フォン・ノイマンの生涯

- ★2013年に現代数学社から「フォン・ノイマン」の執筆依頼
- ★2020年7月にコロナ禍の中, 全てをストップして書き始める.
- ★2021年8月に3巻校了.

## ★Neumann János Lajos

★1903年12月28日誕生. オーストリア・ハンガリー帝国時代のブダペストで3人兄弟の長男として生まれた.

★1913年に貴族の称号 Margittai が与えられ, Margittai Neumann János と名乗るが, 独に渡ってからは独風に von Neumann János と名乗る.

★以下の分野に絶大な足跡を残した.

(数学) 集合論の公理化, 量子力学の数学的基礎付け, 関数解析, 位相群, エルゴード理論, 作用素環, 概周期関数の理論, 数値解析, 束論

(物理学) 量子力学, 流体力学, 量子統計力学, 量子測定理論

(ミクロ経済学) ゲーム理論, 経済成長モデル

(計算機) ノイマン型コンピューター, 線形プログラミング, オートマトン

## ヒルベルトの 23 の問題

1900 年, パリで開催された第 2 回 ICM でヒルベルトが 23 の問題を発表.  
vN は以下の問題に大きく貢献した.

ヒルベルトの 23 問

- 第 2 問 算術の公理と無矛盾性
- 第 5 問 位相群がリー群となるための条件
- 第 6 問 物理学の公理化

### 3大著作

★1927年の3部作に教授資格審査論文と‘量子論における観測理論’を加筆してまとめたのが、

量子力学の数学的基礎付け

Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik (1932)

ノイマン型コンピューターの原型を与えた、

ノイマン型コンピューター

First Draft of a Report on the EDVAC (1945)

vN とオスカー・モルゲンシュテルンによる

ゲーム理論

Theory of Games and Economic Behavior (1944)

世代	vN と関わった事項
1880 年頃 (大御所)	シュミット (76) ヒルベルト・シュミットクラス アインシュタイン (79) 高等研究所で同僚 ヴェブレン (80) 高等研究所に vN を招聘 リース (80) 同郷, リースの表現定理 etc バーコフ父 (84) 個別エルゴード定理, vN とバトル ワイル (85) ワイル関係式, 一様分布定理, コンパクト群 etc ハール (85) 同郷, ハール測度
1900 年代 (同僚)	クープマン (00) バーコフの学生, エルゴード定理 ウィグナー (02) 幼馴染, シュレディンガー方程式 ディラック (02) 妻がウィグナーの妹, 輻射場の理論 ホップ (02) バーコフの学生, ザルツブルク出身, エルゴード定理 <b>vN(03)</b> 本人 ストーン (03) バーコフの学生, ストーンの定理 ロバートソン (03) バーコフ vs vN のバトルの仲裁 ゲーデル (06) 高等研究所で同僚, 不完全性定理
1910 年代 (弟分)	バーコフ息子 (11) 量子論理と束論 マレー (11) クープマンの学生, vN 代数 タウプ (11) ロバートソンの学生, vN 全集編集  疾風怒濤の時代 (1925 年-1940 年) の主な登場者

## vN の履歴

ブダペスト+ETH 時代 (1903-1926)

→ゲッチンゲン時代 (1926-28)

→ベルリン時代 (1928-1930)

→プリンストン時代 (1930-1957)



	ワイル	シュレディンガー	vN
ゲッチンゲン	1904-1908 1909-1912 (私講師) 1930-1933		1927 (ポスドク)
チューリッヒ	1913-1930 (ETH)	1921-1926 (チューリッヒ大学)	1923-1926 (ETH) (応用化学の学生)
ベルリン		1927-1933 (プランクの後任)	1921-1923 (応用化学の学生) 1928-1933 (私講師)
プリンストン	1933-1951 (高等研究所)		1930-1932 (プリンストン大学) (非常勤講師) 1933-1957 (高等研究所)

1920-30年頃のゲッチンゲン, チューリッヒ, ベルリン, プリンストン

## ブダペスト+ETH時代

ミンタ校	テラー, カルドア
ルーテル校	vN, ウィグナー, フェルナー
レアール校	シラード

ブダペストのギムナジウムの同級生

- ★ブダペストのギムナジウムの卒業生で名を成した学者の大半はユダヤ人だった。この時代ハンガリーから多くの天才が現れた。
- ★ギムナジウムではエトベシュ数学・物理学賞と呼ばれる全国競争試験があり、vNは1918年(まだ14歳!)に非公式参加が認められ1等を受賞。
- ★1928年までの1等受賞者はフェイエール, フォン・カールマン, クーニック, ハール, リース, セゲー, テラーである。シラードは2等だった。
- ★ETHでヘルマン・ワイルに入り浸る。

## 集合論の研究

vN による順序数の定義

順序数は全ての先行する順序数の集合である。

順序数  $0 = O$  から始まって、順序数  $1$  は、先行する順序数の集合だから  $\{O\}$  となる。これを続けると下のようになる。

$$0 = O$$

$$1 = \{O\}$$

$$2 = \{O, \{O\}\}$$

$$3 = \{O, \{O\}, \{O, \{O\}\}\}$$

$\vdots$

$$\omega = \{O, \{O\}, \{O, \{O\}\}, \dots, \}$$

$$\omega + 1 = \{O, \{O\}, \{O, \{O\}\}, \dots, \omega\}$$

## ゲーデル登場

★ ツェロメル・フレンケルの集合論における公理系では、無限個の公理が必要であったが、 $\forall N$ のそれは有限個の公理だけだった。そのため、 $\forall N$ は、この公理系の無矛盾性に自身があったという。



★1930年、集合論における否定的な結果がウィーン大学のゲーデルにより示された。「ある性質を満たす自然数論の理論において決定不能な命題が存在する」

集合論の公理化に関する論文発表数

1923年(1編)→1925年(1編)→1927年(1編)→  
1928年(2編)→1929年(1編)→1931年(2編)

## ゲッチンゲン時代

- ★ ゲッチンゲン大学には、19世紀初頭以降から面々と続く名誉ある数学教授職“Erster Lehrstuhl”が存在。その職に就いた最初の数学者はガウス。その後、順番に、ディリクレ、リーマン、クレブシュ、フックス、ヘルマン・シュワルツ、ヴェーバー、ヒルベルト、ワイル。
- ★ 第二講座の教授には、クライン、カラテオドリ、クーラント。
- ★ 第三講座の教授には、ミンコフスキー、エトムント・ランダウ、ネヴァンリンナ、ジーゲル。
- ★ 例外なく、伝説的な数学者が名を連ねる。1930年、ゲッチンゲンは世界の数学センターであった。



- ★ 学位取得後ヒルベルトの待つゲッチンゲンに赴く.
- ★ 1926年7月, 行列力学と波動力学の激突の遭遇.
- ★ 1926年から量子力学の数学的基礎付けを大量生産.
- ★ 1927年, ヒルベルト空間論, 非有界作用素の理論, スペクトル分解の理論と現代の関数解析の基礎を築きあげる.

Name in full	John Lewis Weimann <u>unmarried</u>	
Present Position	Doctor of Philosophy (mathematics)	
Present address	Zürich, Kränzlestrasse 14	
Permanent address	Budapest, Vilmos s. u. 62	
Place of birth	Budapest, Hungary	
Date of birth	28 Jul 1903	Citizenship Hungarian
Single, Married, Widowed, Divorced	Single	
Wife's name	/	
Wife's address	/	
Name and address of nearest kin if unmarried	My father: Dr. Oskar v. Weimann, Budapest, Vilmos s. u. 62.	
Age and sex of children	/	
Have you any constitutional disorder or physical defects	None	
What languages do you speak	Hungarian, German, English, French, Italian	
What languages do you read	Latin as well as the above mentioned	



- ★1927年12月13日に教授資格を得る.
- ★1928年にベルリン大学で私講師.
- ★ベルリン大学にはヒルベルトの愛弟子シュミット.

## プリンストン時代



- ★ ヴェブレン (プリンストン) は米数学会の現状と将来を心配していた. そんなときに目をつけたのが  $vN$  だった.
- ★ 当時, プリンストンのジョーンズ教授職に就いていたワイルが, ヒルベルトの後任としてゲッチンゲンに戻っていたので, 将来  $vN$  がジョーンズ教授職に就くという計画.
- ★ ヴェブレンは  $vN$  を 1930 年にプリンストン大学に客員教授として招聘する. 同時にマリエッタ・ケベシと結婚.

- ★ 1932 年, プリントン高等研究所開所
- ★ 1933 年,  $vN$  はプリントン高等研究所に移る.
- ★ 1938 年, 離婚. クララ・ダンと再婚.



## 大戦前の研究

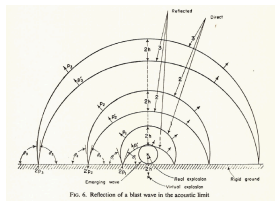
- ★1932年、『Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik』を出版。続いて、エルゴード理論の研究。バーコフ(父)らに影響を与える。
- ★1933年、ヒルベルトの第5問題に関する位相群の研究。
- ★1934年、コロンビア大学で学位をとったマレーと共同で作用素環の研究開始。マレーの回想によれば、30分の議論で $vN$ は因子環を分類した。 $I_n$ 型,  $II_1$ 型,  $II_\infty$ 型, III型。
- ★1934年、局所コンパクトアーベル群上の概周期関数の理論を構築しボーシェ賞を受賞。
- ★1936年、バーコフ(息子)と量子論理(束論)の研究。経済拡大モデルの9ページの論文。

## 1939年-1945年のvN

- 39年** 陸軍将校予備軍中尉の試験に失敗する.
- 39年9月** 第二次世界大戦勃発する.
- 40年** 弾道学研究所 (Ballistic Research Laboratory) 科学諮問委員会委員に就く.
- 41年** 国防研究委員会 (National Defense Research Committee) の顧問に就く.
- 41年12月** 日本の真珠湾攻撃により米参戦
- 42年9月** 海軍兵器局の顧問に就く.
- 42年10月** マンハッタン計画が始まる.
- 43年7月** 英海軍と接触する.
- 43年9月** ロスアラモス研究所顧問かつ陸軍兵器局顧問に就く.
- 44年8月** ENIAC を見学する.
- 45年6月** EDVAC に関する報告書を提出する.
- 45年8月** 第二次世界大戦終結する.

## 戦時中の研究

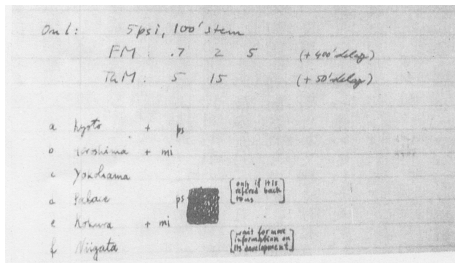
- ★ 衝撃波や爆撃波に関する論文を発表している。また、爆弾を爆発させる場所とその効果の関係について研究している (下図)。



- ★ 衝撃波に関する微分方程式を導出して、それを差分方程式に変形している。「弾道学研究所の punch-card equipment を使えば 10 時間以内で解ける」と自信たっぷり。
- ★ チャンドラセカールと星の分布による重力場の研究を行う。
- ★ 1944 年, モルゲンシュテルンとの大著『Theory of Games and Economic Behavior』を出版。
- ★ 1945 年, 拡大経済モデルの英訳が世に出る。

## 原爆の研究

- ★ 爆縮レンズの開発に従事し、爆薬を 32 面体に配置することによって効率的な核爆弾が開発できることを導き出した。
- ★ これらを導き出すには 10ヶ月に渡る計算を要したが、この際に vN は高速計算の必要性を痛感する。
- ★ ロスアラモスでのオッペンハイマーの原爆実験。



vN の原爆投下地候補のメモ

- ★ENIAC を用いた**数値解析**.
- ★数値解析は ENIAC をつかって大量に論文を生産. ENIAC で計算した 2000 桁の  $\pi$  と  $e$  のデータをもとに,  $\pi$ ,  $e$  に表れる, 非負整数の  $\chi^2$  分布を調べる. ENIAC を使うことが楽しくて仕方がない雰囲気伝わってくる.
- ★1948 年から, **オートマトン**に関する 5 編の論文を出版している.
- ★20 万個の格子点と各格子点に 29 通りの状態→無限自己複製マシンの存在証明

# ノイマン型コンピューター

## ENIAC の仕様

- 幅 30m ・ 高さ 2.4m ・ 奥行き 0.9m, 設置面積  $167m^2$
- 重量 27 トン, 消費電力 150kW, 真空管 17468 本
- 計算回数 5000 回/秒, 逐次制御方式, 10 進数

## ENIAC の問題点

- (1) 記憶容量が足りない.
- (2) 10 進数のため回路が複雑で真空管の本数が多過ぎる.
- (3) プログラム毎に配線を変えるので時間と手間がかかる.

★1944年8月, vNはENIACを見学し, ENIACの論理設計に大きな問題があることに気づいた. このときENIACはまだ稼働していない.

★vNは改良に取り組む. ENIACの後継機はEDVAC(electronic discrete variable automatic computer)と呼ばれた.

★次の点を改良した.

#### 改良点

- (1) 記憶容量の不足解消のために, 水銀遅延線を使った.
- (2) 2進数を採用し, 真空管の本数を1/3に減らした.
- (3) 基本回路に論理回路を採用し, 演算部と記憶部を分離した. 記憶部にプログラムとデータを一緒に格納し, プログラムの変更が簡単に出来るようにした.

★1945年春, ロスアラモスまでの電車で通勤中に EDVAC の報告書を手書きで書く. **First Draft of a Report on the EDVAC (1945)**

★1951年に部分的に稼動した.

#### EDVAC の仕様

- 設置面積  $45.5m^2$ , 重量 7850 kg
- 消費電力 56kW, 計算回数 1182 回/秒
- 真空管約 6000 本, ダイオード約 12000 個
- プログラム記憶方式, 2進数



2013年に発表されたスマートフォン向けの Tegra K1 SoC の仕様.

### Tegra K1 SoC の仕様

- 設置面積 指の先 重量 1 グラム以下
- 消費電力 5W 計算回数  $3.65 \times 10^{11}$  回/秒

計算能力は ENIAC の 7300 万倍で, 消費電力は 3 万分の 1. 1W あたりの計算性能は約 2.2 兆倍改善.

### 富岳の仕様

- 設置面積約  $480m^2$  重量約 860 トン
- 消費電力 3-4 万 kW 計算回数  $4.1553 \times 10^{17}$  回/秒

計算能力は EDVAC の 350 兆倍. ただし, 維持費は 160 億円/年. 幅 80cm, 奥行き 140cm, 高さ 220cm, 約 2 トンの計算機が 432 台連なっている.

## 1950年-1952年のvN

- 武器体系評価グループ (Weapons Systems Evaluation Group) 顧問
- 国軍特殊武器計画 (Armed Forces Special Weapons Project) 顧問
- 中央情報局 (Central Intelligence Agency) 顧問
- 原子力委員会 (Atomic Energy Commission) の総合諮問委員会 (Governmental Advisory Committee) 委員
- リヴァモア研究所顧問
- 米空軍科学諮問委員会顧問

## 最晩年

- ★1950年に米のケンブリッジで開催された ICM(戦争で中断されて14年ぶりに開催)で講演.

### Shock Interaction and Its Mathematical Aspects.

- ★フィールズ賞はセルバーグとシュワルツが受賞.
- ★1951-52年にかけて米数学会会長に就く.
- ★1954年のアムステルダムで開催された ICM でも講演.

### On Unsolved Problems in Mathematics.

- ★1957年2月8日永眠. 53歳

## 2. 1926年 量子力学の発見

## 1900年初頭の物理学会

- ★1900年の世界中の物理学者の総数は1200人-1500人と見積もられている。英, 独, 仏, 米のビッグフォーが約半数を占めていた。
- ★特に独は1900年頃の物理学の中心だった。

教授と助手	物理学者数	人口100万人当たり
オーストリア・ハンガリー	64	1.5
ベルギー	15	2.3
英	114	2.9
仏	105	2.8
独	145	2.9
イタリア	63	1.8
日本	8	0.2
オランダ	21	4.1
ロシア	35	0.3
北欧	29	2.3
スイス	27	8.1
米	215	2.8

1900年前後の大学の物理学

- ★ 仏パリ科学アカデミーの Comptes Rendus (1835 年創刊)
- ★ 英の Nature (1869 年創刊)
- ★ 独のゲッチンゲン科学会の Göttingen Nachrichten (1894 年創刊)
  
- ★ vN の 1927 年の量子力学の数学的基礎付け 3 部作も Göttingen Nachrichten から出版されている.
- ★ ルベーグの測度論や, リース, フレッシュェの  $L^2(\mathbb{R}^d)$  に関する論文も Comptes Rendus から出版されている.

## 物理学の国際的な専門誌

- ★ 英の Philosophical Magazine (1798 年創刊)
  - ★ 独の Annalen der Physik (1799 年創刊)
  - ★ 仏の Journal de physique (1872 年創刊)
  - ★ イタリアの Nuovo Cimento (1855 年創刊)
  - ★ 米の Physical Review (1899 年創刊)
- 
- ★ アインシュタインの 1905 年の 4 部作は Annalen der Physik から出版.
  - ★ ボーアの 1913 年の 3 部作は Philosophical Magazine から出版.

国	物理の専門誌	1900年の論文数
英	Philosophical Magazine	420
仏	Journal de physique	360
独	Annalen der Physik	580
イタリア	Nuovo Cimento	120
米	Physical Review	240
その他		280

### 1900年の物理論文数

- ★1910年頃まで物理の第一級の雑誌は Annalen der Physik.
- ★英語圏では英の Philosophical Magazine が対抗.
- ★Annalen der Physik で掲載拒否された論文は, 1899年創刊の短い論文を集めた Physikalische Zeitschrift にしばしば掲載された.



# 量子力学は誰が命名？

379

## Über Quantenmechanik.

Von **M. Born** in Göttingen.

(Eingegangen am 13. Juni 1924.)

Die Arbeit enthält einen Versuch, den ersten Schritt zur Quantenmechanik der Kopplung aufzustellen, welcher von den wichtigsten Eigenschaften der Atome (Stabilität, Resonanz für die Sprungfrequenzen, Korrespondenzprinzip) Rechenschaft gibt und in natürlicher Weise aus den klassischen Gesetzen entsteht. Diese Theorie enthält die Dispersionsformel von Kramers und zeigt eine enge Verwandtschaft zu Heisenbergs Formulierung der Regeln des anomalen Zeemaneffekts.

1924 年のボルンの論文に現れた Quantenmechanik

# 行列力学 vs 波動力学



VS



- ★ ボーアの対応原理から出発したハイゼンベルクの行列力学
- ★ ド・ブロイの物質波から出発したシュレディンガーの波動力学
- ★ 1925-27年にかけてハイゼンベルクとシュレディンガーの間で激しい論争が巻き起きた。

	指導原理	発見者
行列力学	ボーアの対応原理	ハイゼンベルク
波動力学	ド・ブロイの物質波	シュレディンガー

## ハイゼンベルクの行列力学

ハイゼンベルク	1925/7/29	最初の量子力学の論文
ディラック	1925/11/7	行列力学の定式化
ボルン・ハイゼンベルク・ヨルダン	1925/11/16	行列力学の定式化
パウリ	1926/1/17	バルマー系列の導出

行列力学の論文

★ 奇妙な男：1925年12月に米滞在中のボルンのもとに論文が届いた。開けてみると、その内容はボルン、ハイゼンベルク、ヨルダンの三人で完成させた行列力学だった。その論文の受理された日付が1925年11月7日で、3名による論文より9日も早かった。著者はディラックという名の奇妙で寡黙なケンブリッジの学生だった。



## シュレディンガーの波動力学

シュレディンガーは 1926 年に第 1 論文 (1 月 27 日), 第 2 論文 (2 月 23 日), 第 3 論文 (5 月 10 日), 第 4 論文 (6 月 21 日) の 4 編を発表した.

第 1 論文	ハミルトン・ヤコビ方程式と変分原理でシュレディンガー方程式を導入.
第 2 論文	古典力学と幾何光学の対応関係から出発し, 波動光学に対応するものとして波動力学を位置づける. 調和振動子, 軸が固定された回転子, 軸が自由な回転子, 非剛体的回転子の波動方程式を解く.
第 3 論文	摂動論を展開しシュタルク効果を論じる.
第 4 論文	時間に依存するシュレーディンガー方程式が登場する. $\psi\bar{\psi}$ を電荷密度とする解釈を提示し保存則が成り立つことを証明.

1926 年のシュレディンガーの論文

## 同値性の証明



- ★ 同値性の問題を, シュレディンガーは ETH のワイルに相談した. しかし, 残念ながら聖ワイルも解けなかった.
- ★ シュレディンガーは両者は数学的に同値であることを示したと主張. 論文受理は 1926 年 3 月 18 日. 結果的に, それは数学的に不十分なものだが, ハイゼンベルクをはじめ

当時の物理学者はそれを信じた.

- ★ 1926 年にはディラックやヨルダンも各々独立に行列力学と波動力学の同値性を証明している.

3/18	シュレディンガー
4/12	パウリ (非公表)
4/27, 7/9	ヨルダン
8/26	ディラック

1926 年の行列表力学と波動力学の同値性の証明

★シュレディンガーの第1論文を読んだパウリはシュレディンガーと同様に行列力学と波動力学の同値性に気がつき, その証明を4月12日にヨルダン宛に手紙で送っている. しかし, シュレディンガーが一足先に論文を出してしまったために, パウリの証明は日の目を見ることはなかった. ただ, パウリは死の直前まで自身の証明のカーボンコピーを大事に保存していた.

# 行列力学 vs 波動力学

1926/4/28	ハイゼンベルクがベルリンで講演. アインシュタインの私邸で質問攻めに合う
5/1	ハイゼンベルクがコペンハーゲン大学に移る
6/8	ハイゼンベルクがパウリに手紙を送って, 「シュレディンガーの理論には物理がない. . . . .」
6/25	ボルンによる波動関数の確率解釈
7/21, 23	シュレディンガーがミュンヘンで講演. vN も聴講. ハイゼンベルクが悄然となる
10/1	シュレディンガーがコペンハーゲンでボーアと討論. その後シュレディンガーが寝込む
12/4	アインシュタインのボルンへの返信で「神はサイコロ遊びをしない」
1927/2-3 月	ボーアがノルウェイにスキー休暇. 相補性原理に到達. ハイゼンベルクは不確定性原理に到達.
9/26	コモ湖畔国際会議でボーアが相補性原理を公表
10/24	第 5 回ソルヴェイ会議にてアインシュタインが「神はサイコロ遊びをしない」を連発
1930/10	第 6 回ソルヴェイ会議にてアインシュタイン・ボーア論争

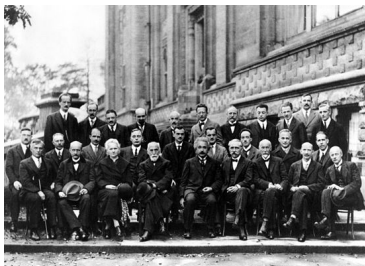
## 長老 vs 若者

ボーア派

ボーア (42), ハイゼンベルク (26), パウリ (27), ボルン (45), ヨルダン (25)  
ディラック (25)

アインシュタイン派

アインシュタイン (48), シュレディンガー (40), プランク (69), ヴィーン (63)



1927年の第5回ソルヴェイ会議



## 確率解釈



- ★1926年6月25日, ボルンが規格化された波動関数  $\Psi(t)$  を  $\Psi(t) = \sum_n c_n(t)\Psi_n$  と展開したときの係数  $|c_n(t)|^2$  に確率解釈を与えた. しかし, これはやや限定的であった.
- ★現代的な確率解釈を与えたのは, ヨルダン.  $\psi(x,t)$  に対して, 下式を  $A$  に存在する確率と解釈した.

$$\int_A |\psi(x,t)|^2 dx$$

- ★この確率解釈はパウリのアイデアによるとヨルダンは正直にコメントしている. Pauli hat im Anschluss an Überlegungen von Born folgende physikalische Deutung der Schrödingerschen Eigenfunktionen vorgeschlagen.
- ★シュレディンガーはボルンの確率解釈に従わなかった.
- ★アインシュタインは1926年12月4日にボルンへの返信で, 有名な言葉「神はサイコロ遊びをしない」と語った.

## 1926年の激突

★1926年7月にシュレディンガーはゾンマーフェルトとヴィーンに誘われてミュンヘンで2回講演を行う。

**1回目** 7月21日にミュンヘン大学。

**2回目** 7月23日に独物理学会バイエルン支部。

★初めてハイゼンベルクはシュレディンガーと直接議論。

★vNもゲッチンゲンから参加。

★2回目の講演で遂にハイゼンベルクが反論して激突！

★vNは論理的な結論に達していた。

★ボーアはシュレディンガーをコペンハーゲンに招待してオルグ開始。

# 3. 1927年 vNによる量子力学

## 量子力学の数学的基礎付け開始

- ★1927年4月6日にヒルベルト,  $\nu N$ , ノルトハイムの3人は論文を執筆し, 量子力学の数学的基礎を構築した.
- ★3人の論文では積分作用素を用いて運動量作用素や位置作用素を定義するので必然的にデルタ関数  $\delta(x)$  が登場する.  $\nu N$  は不満.
- ★6週間後の1927年5月20日に抽象的なヒルベルト空間を定義し, 非有界作用素のスペクトル理論を展開した. デルタ関数は出てこない!
- ★さらに, 物理量と状態の数学的特徴付け, 量子力学的集団に対する熱力学とエントロピーの理論を構築. 1927年の3部作が完成.
- ★3部作に加えて, 1928年12月15日に, 教授資格審査論文が提出された. 現在の作用素論の基礎的なことが殆ど論じられている.
- ★行列力学と波動力学の厳密な同値性の証明を与える.

## vN の量子力学の数学的基礎付け

- (27/4/6) Über die Grundlagen der Quantenmechanik
- (27/5/20) Mathematische Begründung der Quantenmechanik
- (27/11/11) Wahrscheinlichkeitstheoretischer Aufbau der Quantenmechanik
- (27/11/11) Thermodynamik quantenmechanischer Gesamtheiten
- (28/10/22) Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen
- (28/12/15) **Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren**
- (29/2/20) Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren
- (30/8/31) **Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren**  
(シュレディンガー作用素の一意性)
- (30/10/20) Über Functionen von Functionaloperatoren
- (31/12/9) Über adjungierte Funktionaloperatoren
- (32/3/16) **Über einen Satz von Herrn M. H. Stone**  
(M. H. Stone の定理について)
- (32) Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik

## ウィグナーとディラック



- ★ 量子力学の数学的な基礎付けに限らず、シュレディンガー方程式そのものの研究も行っている。
- ★ 1927, 28年, 同郷のウィグナーと共著で論文を書く。さらに, 1929年に共著で次を出版。

### Über merkwürdige diskrete Eigenwerte (奇妙な固有値について)

- ★ ディラック方程式が世に現れたのは 1928年2月1日。vN はディラック方程式に関する論文も発表している。受理された日付がディラックの論文が受理されて僅か1ヶ月半後の 1928年3月15日。

# Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik

第 I 章	序論的考察
第 II 章	抽象ヒルベルト空間の一般論
第 III 章	量子力学の統計
第 IV 章	理論の演繹的構成
第 V 章	一般的考察
第 VI 章	測定の過程

量子力学の数学的基礎の各章

この名著は読みやすい書物とはいえない。‘純粋数学’と‘量子力学の確率解釈’と‘測定理論’が混在し読者を惑わす。

第 I 章は行列力学と波動力学のまとめ. 第 II 章は抽象的なヒルベルト空間論. 第 III 章は物理量と作用素の関係. 第 IV 章は量子力学における状態について. 第 V 章は量子力学的集団に対する熱力学とエントロピーについて. 第 VI 章は量子力学における測定過程の理論ということになる.

★元ネタになっている論文は以下.

原書	記述箇所
27 年の第 1 論文と教授資格論文	第 II 章
27 年の第 2 論文	第 III 章 1,2 節と第 IV 章 1,2 節
ディラックの論文	第 III 章 6 節
27 年の第 3 論文	第 V 章 2,3 節

量子力学の数学的基礎の元ネタ



★ 他の部分は殆どが量子力学の測定理論に関わる記述で論文として学術雑誌に公表されていない。

★ 第 III 章 3,4,5 節は同時測定に関わる理論が展開され, 第 IV 章 3 節は測定後の状態, 第 V 章 3 節は測定とエントロピーの関係, 第 VI 章は測定過程について書かれている。

同時測定	第 III 章 3,4,5 節
測定後の状態	第 IV 章 3 節
測定とエントロピー	第 V 章 3 節
測定過程	第 VI 章

測定理論の記述箇所

# 4. ヒルベルト空間の発見

## ヒルベルト空間という用語をはじめに使ったのは誰か？

	生没年	出身国
シェーンフリース	1853-1928	独
ヒルベルト	1862-1943	独
ハウスドルフ	1868-1942	独
ルベーグ	1875-1941	仏
フィッシャー	1875-1954	オーストリア
シュミット	1876-1959	独
フレッシエ	1878-1973	仏
リース	1880-1956	ハンガリー
ワイル	1885-1955	独
ウリゾーン	1898-1924	ロシア
vN	1903-1957	ハンガリー

ヒルベルト空間命名物語の登場人物

- ★ シェーンフリースはワイエルシュトラスの弟子.
- ★ シュミットはヒルベルトの愛弟子.
- ★ ハウスドルフは 1914 年に位相の概念を確立した.
- ★ フィッシャーは, メルテンとゲーゲンバウアーのもとで学位をとっている. ゲーゲンバウアーはワイエルシュトラスの弟子であるからシェーンフリースは学問上の「おじ」にあたる.
- ★ 仏の当時の測度論グループは師弟関係順に並べると,  
ダルブー → ボレル → ルベーク+ベール.
- ★ フレッシュェは, ルベークより 3 歳年少の仏人で, アダマールに師事. ヒルベルト空間命名物語の黒子のような存在.
- ★ ウリゾーンは弱冠 26 歳で仏のブルターニュの海岸で溺死している.
- ★ リースはハンガリーの重鎮.

## シェーンフリースとフレッシエ



★ 関数空間に距離を定義することは当時厄介な問題だった. それに挑んだのがアダマールとフレッシエ.

★ シェーンフリースはベルリン大学で博士号取得.

★ フレッシエはシェーンフリースより 25 歳も若い仏人. 1900 年, *École Normale Supérieure* へ進学し, 博士論文で関数空間にコンパクト性の概念を導入する.

★ 1907 年頃フレッシエの学位論文に対してシェーンフリースが質問するという形で手紙のやり取り開始.

★ シェーンフリースは, 1907 年 12 月までに, 独数学会 100 周年のための投稿論文を完成させ, そこで, フレッシエを喧伝. フレッシエの業績は注目を集めるようになった.



★1897年の第1回ICMでアダマールが点集合の概念を関数の集合に拡張することに言及し、シェーンフリースはフレッシュの結果を知りその可能性を感じていた。

★シェーンフリースは集合論で大切なこととして次の3つを挙げた。

(1) 集合の極限要素の定義

(2) ボルツァーノ・ワイエルストラスの定理

(3) 集合の閉性

★シェーンフリースは10月27日の手紙に、なぜコンパクト集合のようなものを考えないのか？と書いている。2人の手紙のやり取りは少なくとも1912年12月まで続いた。

## リースとフィッシャー



- ★ リースはオーストリア・ハンガリー帝国時代のハンガリーに、フィッシャーはウィーンに生まれた。オーストリアはハプスブルク家の本家で、事実上ハンガリーはオーストリアから独立していた。当然、対抗意識はあっただろう。
- ★ リースは 1906 年 11 月 12 日に、 $f, g$  の距離  $d(f, g)$  を

$$d(f, g) = \sqrt{\int_{\mathbb{R}} |f(x) - g(x)|^2 dx}$$

と定義した。論文ではフレッシュェに謝辞を捧げている。

- ★  $L^p$  の完備性も示した。

★ リースは 1907 年 3 月 11 日に発表した論文で次のことを示した.

### 命題 (リース・フィッシャーの定理)

$\{e_n\}$  を  $L^2(\mathbb{R})$  の CONS, 写像  $\iota : \ell_2 \ni a = \{a_n\} \rightarrow f \in L^2(\mathbb{R})$  を  $f = \sum_n a_n e_n$  と定める. このとき,  $\iota$  は全単射かつ等長  $\|a\|_{\ell_2} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$  で

$$\ell_2 \cong L^2(\mathbb{R})$$

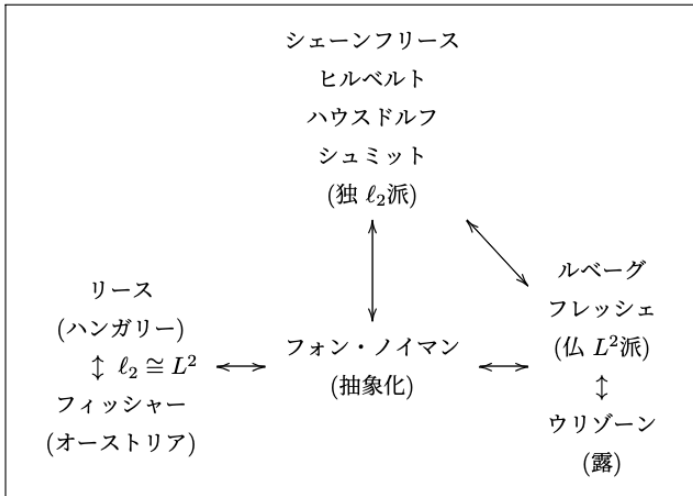
この定理から,  $L^2 \ni f \leftrightarrow \{a_1, a_2, \dots\} \in \ell_2$ ,  $L^2 \ni g \leftrightarrow \{b_1, b_2, \dots\} \in \ell_2$  の対応があるとき, 内積は次のようになる.  $\sum_i \bar{a}_i b_i = \int \bar{f}(x) g(x) dx$ .

★ フィッシャーも同様の証明を与えた. これは 1907 年 4 月 29 日に出版されている. しかし, フィッシャーは 1906 年に出版されたリースの論文を読む機会があり, フィッシャーがリースと独立に証明したとはいえない.





# ヒルベルト空間の命名



ヒルベルト空間の命名をめぐる

- ★ ヒルベルト空間という用語が最初に現れたのは、シェーンフリースが1908年に出版した著書の266ページである。シェーンフリースは、 $l_2$ をヒルベルト空間と呼んだ。
- ★ リースとフィッシャーは、 $L^2(\mathbb{R}) \cong l_2$ を証明した。しかし、リースもフィッシャーもヒルベルト空間という用語は使っていない。
- ★ フレッシュェが1908年に数列空間に関する論文を発表したときもヒルベルト空間という用語は使っていない。
- ★ シュミットが1908年に発表した論文では、 $l_2$ 空間の幾何学について書いているが、ヒルベルト空間という用語は使っていない。
- ★ リースは1913年に刊行した著書の78ページで $l_2$ をヒルベルト空間と呼んでいる。
- ★ ハウスドルフは彼の名著の1914年版の287ページで、 $l_2$ をヒルベルト空間と呼んでいる。

## 幻のヒルベルト=ルベーク=リース空間

★  $l_2$  がヒルベルト空間と命名され、 $l_2 \cong L^2$  が証明されていた 1923 年当時、独の  $l_2$  派に対して仏の  $L^2$  派はやや物足りない思いをしていた。

★ フレッシュェはルベークに  $L^2$  空間を

### ヒルベルト = ルベーク = リース空間

と命名すべきだと提案した。この名称は独人、仏人、ハンガリー人で構成されていて人種も調和が保たれ、さらに同じ仏人であるルベークに気がつかなかったのだろうか。

★ しかし、ルベークはこの提案を拒否した!

★ 詳しい事情は次のスライド。



- ★1923年10月23日, ロシアの数学者ポール・アレキサンダーとパベル・ウリゾーンはフレッシュェに3編の論文のコピーを送った. *Comptes Rendus* への投稿だった.
- ★オリジナルの論文はルベグに送られていた.
- ★論文の一つはウリゾーンの単著で論文のタイトルは

### Les classes (D) séparables et l'espace Hilbertien

タイトル中に *l'espace Hilbertien*=ヒルベルト空間の記述がある. この論文は, *Comptes Rendus* 1924年1月2日号に掲載され, 可分な距離空間とヒルベルト空間の関係を論じた僅か3ページの論文である. 実は, ウリゾーンと同様な論文が1923年7月22日独の雑誌 *Mathematical Annalen* に受理されている.

### Der Hilbertsche Raum als Urbild der metrischen Räume

ここでも, *Der Hilbertsche Raum*=ヒルベルト空間の記述がある.

★ ウリゾーンの論文タイトルに関する、フレッシュによる手書きのメモが残っている。このメモはルベグに送られ、その裏面には、鉛筆で書かれたルベグの返信がある。この文書には日付はないが、ウリゾーンの論文に関連していることは明らかであり、論文が投稿されてから出版されるまでの間である 1923 年 10 月から 12 月の間に送られているに違いない。

### Der Hilbertsche Raum als Urbild der metrischen Räume\*).

Von

Paul Urysohn † in Moskau.

Der Zweck dieser Arbeit ist, zu zeigen, daß die Begriffe „separable ( $D$ )-Menge“ (im Fréchet'schen Sinne) und „Teilmenge des Hilbertschen Raumes<sup>1)</sup>“ topologisch identisch sind; oder, anders ausgedrückt, daß *die notwendige und hinreichende Bedingung, damit ein metrischer Raum<sup>2)</sup>  $E$  einer Teilmenge des Hilbertschen Raumes  $H$  homöomorph sei, darin besteht, daß  $E$  eine abzählbare dichte Teilmenge besitzt.*

1923 年のウリゾーンの論文

## フレッシュからルベグへ

ウリゾーンがヒルベルトの名を付けた空間は無限次元で、距離は  $\sqrt{\sum(x_n - y_n)^2}$  である。リースがこの空間と 2 乗可積分空間が同値であることを証明した。しかし、ルベグ積分を離れてリーマン積分に戻れば、この同値関係は成り立たない。従って、2 乗可積分空間を ‘ヒルベルト=ルベグ=リース空間’ と呼ぶのがもっと適切だと感じる。

## ルベークからフレッシェへ

今まで一言も言及したことがない‘空間’に関する優先権を主張できません。私の仕事が間接的にこの空間の重要さを示したことは確かです。しかし、それは自分が注意も払わなければ予想もしなかったことです。基本的にあなたの提案には同意しません。非常に一般的な議論しかなく、あやふやだったが、ヒルベルトは  $\sum x_n^2$  が収束する距離空間を構成した。彼は積分方程式論のたくさんの事実を集め、それらに光をあて、準備し、この分野の研究を可能にした。その中には、特に彼が個人的に研究した実関数の開発とその成果があった！研究を続けることによって(それ自身より空間の偉大な面白さが証明された)彼の学生は直交系が何かを知りたかった。それは、関数の族であり、それによってヒルベルト空間が表現される。ファトゥー・パーセバルの定理は関数が求められている族に属するための必要条件を与える。ファトゥーの定理の逆はリースとフィッシャーが同時に証明した。そしてここを注意してください。ファトゥーは彼の定理の逆を疑っていた。なぜ彼はそれをみつけるために、頑張らなかったか？(証明はそれはそれほど長くはかからないだろうに)それは彼がポイントを理解していなかったからです。※ファトゥーの定理, ファトゥー・パーセバルの定理というのはパーセバルの等式と思われる。

# 1927年, 抽象的ヒルベルト空間登場

Somit entsteht für uns die Aufgabe, den abstrakten Hilbertschen Raum auf Grund seiner „inneren“ — d. h. ohne Bezugnahme

Mathematische Begründung der Quantenmechanik. 15

auf die Interpretation seiner Elemente als Folgen oder Funktionen formulierbaren — Eigenschaften zu beschreiben. Wir werden sie

## $vN$ による抽象的なヒルベルト空間の定義

★ $vN$  は 1927 年の三部作で抽象的なヒルベルト空間を定義した.

Die Zuordnung ist linear, d. h.

aus  $f \leftrightarrow (x_1, x_2, \dots)$  folgt  $af \leftrightarrow (ax_1, ax_2, \dots)$ ,

aus  $\left\{ \begin{array}{l} f \leftrightarrow (x_1, x_2, \dots) \\ g \leftrightarrow (y_1, y_2, \dots) \end{array} \right\}$  folgt  $f + g \leftrightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots)$ ,

und es ist

$$\int f \cdot g \, dv = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n.$$

D. h. alle bei der Beschreibung der Eigenwerte und Eigenfunktionen verwendeten Begriffsbildungen sind bei dieser Zuordnung invariant; also müssen dieselben in den in I. betrachteten kontinuierlichen Räumen und im diskreten Raume aus II. dasselbe Verhalten zeigen.

## $vN$ による $l_2$ と $L^2(\mathbb{R})$ の同値性の紹介

$vN$  は  $L^2(\mathbb{R})$  を連続空間,  $l_2$  を離散空間と呼んで, リース・フィッシャーの定理を言及している



ワイルの1928年出版の「量子力学と群論」に“ヒルベルト空間”という言葉が現れる。時期的にみて、これは、vN以外が使った、最初の抽象的な“ヒルベルト空間”の例かもしれない。

**Da die Vektorkomponenten eine abgezählte Reihe  $x_1, x_2, \dots$  bilden, besitzt dieser „Hilbertsche Raum“ abzählbar-unendlichviele Dimensionen. Daneben spielen Räume mit kontinuierlich unendlichvielen Dimensionen eine Rolle.**

[29 ページ] に現れた “Hilbertsche Raum=ヒルベルト空間”

第1章の第7節では、 $l_2$ 空間が登場する。ワイルはこれを“abzählbar-unendlichvielen Dimensionen”(可算無限)と呼んでいる。一方で、関数空間  $L^2(\mathbb{R})$  を“kontinuierlich unendlichvielen Dimensionen”(連続無限)と呼んでいる。

リース	1907	ヒルベルト空間と呼んでない
フィッシャー	1907	ヒルベルト空間と呼んでない
シュミット	1908	ヒルベルト空間と呼んでない
フレッシュェ	1908	ヒルベルト空間と呼んでない
シェーンフリース	1908	$l_2$ をヒルベルト空間と呼ぶ
リース	1913	$l_2$ をヒルベルト空間と呼ぶ
ハウズドルフ	1914	$l_2$ をヒルベルト空間と呼ぶ
ウリゾーン	1923	論文タイトルにヒルベルト空間
フレッシュェ	1923	ヒルベルト=ルベーク=リース空間提案
vN	1927	抽象的なヒルベルト空間を定義
ワイル	1928	抽象的なヒルベルト空間を定義

‘ヒルベルト空間’の由来

# 5. vNのバトル

世代	vN と関わった事項
1880 年頃 (大御所)	<p>シュミット (76) ヒルベルト・シュミットクラス            アインシュタイン (79) 高等研究所で同僚            ヴェブレン (80) 高等研究所に vN を招聘            リース (80) 同郷, リースの表現定理 etc  <b>バーコフ父 (84) 個別エルゴード定理, vN とバトル</b>            ワイル (85) ワイル関係式, 一様分布定理, コンパクト群 etc            ハール (85) 同郷, ハール測度</p>
1900 年代 (同僚)	<p><b>クープマン (00) バーコフの学生, エルゴード定理</b>            ウィグナー (02) 幼馴染, シュレディンガー方程式            ディラック (02) 妻がウィグナーの妹, 輻射場の理論  <b>ホップ (02) バーコフの学生, ザルツブルク出身, エルゴード定理</b>  <b>vN(03) 本人</b>  <b>ストーン (03) バーコフの学生, ストーンの定理</b>  <b>ロバートソン (03) バーコフ vs vN のバトルの仲裁</b>            ゲーデル (06) 高等研究所で同僚, 不完全性定理</p>
1910 年代 (弟分)	<p>バーコフ息子 (11) 量子論理と束論            マレー (11) クープマンの学生, vN 代数            タウプ (11) ロバートソンの学生, vN 全集編集</p>

疾風怒濤時代 (1925 年-1940 年) の主な登場者



ストーンの定理をめぐって.

★ この定理はもともとストーンの教科書の群論の章に掲載予定だった. 群論の章は 1930 年 5 月には完成していたが, 最終的に削除することになり, 結局, 1932 年に *Annals of Mathematics* Vol. 33. No. 3, 643-648 ページに発表.

### 命題 (ストーンの定理)

$T_t, t \in \mathbb{R}$  を強連続一径数ユニタリー群とする. このとき自己共役作用素  $H$  が一意的に存在して  $T_t = e^{itH}$  となる.

## 命題(ストーンの定理の $vN$ による一般化)

$T_t$  は (1)  $T_t T_s = T_{t+s}$  と (2)  $T_0 = \mathbb{1}$  を満たす, 可分なヒルベルト空間  $\mathfrak{H}$  上の一径数ユニタリー群とする. 任意の  $f, g \in \mathfrak{H}$  に対して,  $t \mapsto (f, T_t g)$  が可測ならば  $t \mapsto T_t$  は強連続である.

★ $vN$  が連続性を可測性にかえて, 定理を一般化したことが第 1 ページ目に言い訳がましく記されている. 和訳: この定理の最近の応用例を見ると, これ以上出版が遅れるのは非常に望ましくない. 例えば,  $vN$  は定理を一般化する必要があると考え, 新しい証明を与え, それは, この号の **Annals** に掲載されている. 私自身の方法は群とその線形表現の観点から“正しい”ものであると思われる, **いずれにしても, 私が私の最初の論文で示した方法によって, 何の変更もなしに,  $vN$  の一般化された定理 (以下の定理 C) を作り出せる.**

★一般化された定理は同じ号の **567-573** ページに発表されていて, ストーンより前に掲載されている. ストーンは焦っていたに違いない.

# 不確定性原理, ロバートソン

Daraus gewinnt man (ich verdanke diese Bemerkung Herrn *W. Pauli*) leicht die allgemein gültige Ungleichung

$$\Delta p \cdot \Delta x \geq \frac{1}{2} \hbar:$$

ワイルの教科書 63p に現れた不確定性関係

ワイルは、この関係式の導出に関して、書中でパウリに謝辞を述べている。ただし、“不確定性関係”という言葉はどこにも現れていない。

- ★ 不確定性関係は、1929年にロバートソンによって、一般の非可換な作用素に拡張された。ロバートソンは1903年生まれの人で、当時はプリンストン大学に所属。
- ★ ワイルの教科書の英訳版が1931年に出版されている。原書には存在しないにもかかわらず、その索引には“uncertainty principle”が存在している。英訳したのは、なんとロバートソンであった。



★vN は 1932 年に平均エルゴード定理を数学的に証明した。

命題 (vN の平均エルゴード定理)

$(X, \mathcal{B}, \mu, \{T_s\}_s)$  を可測フロー,  $f \in L^2(X)$  とする. このとき,

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T_s x) ds = E[f | \mathcal{E}]$$

特に,  $\mu$  がエルゴード的測度ならば次が成り立つ.

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(T_s x) ds = \int f(x) d\mu(x)$$



## エルゴード定理の優先権争い



- ★エルゴード定理のもう一人の立役者ジョージ・デービット・バーコフは、ストーンの先生である。
- ★エルゴード定理の優先権をめぐる1931年にバートルがあった。vNがロバートソンに残した手紙が近年発見され、その様子の詳細が明るみに出た。ロバートソンの娘が所持していたこの手紙をZundが発見し、公表している。

I made use, so the manuscript was only sent in on December 9, too late for the December-number.)  
The December number appeared in January 1932, and Birkhoff's article was in it. His quotation of my result is, ~~according to the judgement of Birkhoff, Alexander, Lepelietz, Rosenman, Stone, absolutely insufficient.~~ (I mention only these 5 names, because they all spontaneously told me, how dissatisfied they are, without any attempt on my side, to talk about the matter.) The reason they give is, that it does not show to any person, uninformed about the real history of these things, who of Birkhoff and myself got the other started; ~~and which one of us attacked the unsolved of E.H., and which one found an independent new proof, after he knew that it was solved, and what the necessary and sufficient conditions for its truth are.~~  
Excuse me, for boring you with the

vN が 1932 年に残した手紙

vN がロバートソンに宛てた手紙の要点.

★1931 年にバーコフの弟子クープマンが論文を Proc. Natl. Acad. Sci. (PNAS) から出版. この論文から vN はエルゴード仮説を連想する.

★クープマンはこの結果を 1930 年 5 月に vN に伝えていた. さらに, クープマンはエルゴード仮説を証明したいと vN に語った.

★1931 年 8, 9 月頃, vN は平均エルゴード定理の証明に成功する. しかしながら, vN はクープマンが既に解いているかもしれないと思い非公表.

★10 月にクープマンに NY で会い, vN は自身の結果をクープマンに語ると, PNAS への投稿を勧められる.

- ★1931年10月に、プリンストンにクープマンとバーコフがやってきた。そこで、バーコフにクープマンの手法を使って解いたことを伝える。
- ★1931年の11月にはバーコフから手紙をもらい、エルゴード定理の別バージョンの証明を試みていることを知る。
- ★12月4/5日に、バーコフは $vN$ よりも強い結果を証明したことを伝える。 $vN$ はバーコフに「私の論文はPNASの1932年の1月号に掲載される」と伝える。しかし、バーコフは「私の論文は1931年の12月号に掲載されるように努力しているところだ」と答えた。
- ★ $vN$ は、当然、優先権を主張して出版を保留するように要求したがバーコフはこれを拒否。
- ★バーコフは、論文中で優先権は $vN$ にあることを言及する約束をする。

The important recent work of von Neumann (not yet published) shows only that there is convergence *in the mean*, so that (1) is not proved by him to hold for any point  $P$ , and the time-probability is not established in the usual sense for any trajectory. A *direct* proof of von Neumann's results (not yet published) has been obtained by E. Hopf.

### バーコフの $vN$ の仕事に対する言及

和訳: 最近の  $vN$  の重要な仕事 (未発表) は平均で収束を証明しただけ. その結果 (1) はどのような点  $P$  に対しても彼によって証明されていないし, 時間-確率もどんな軌道に対しても通常の意味で示されていない.  $vN$  の結果のダイレクトな証明 (未発表) が E・ホップによって得られている.

★1931年12月号に掲載されたバーコフの論文における  $vN$  へのコメントは酷いものだった. “嘘じゃないからいいだろう” 的な文章である.

★これに対して, 5名 (Eisenhart, Alexander, Lefschetz, Koopman, Stone) が直ぐに,  $vN$  の優先権に対するバーコフ先生の論文にあるコメントは全く不十分であると  $vN$  に語った.

## 優先権争いの幕引き

- ★1930年当時、バーコフもヴェブレンとともに米数学会の重鎮で仲良し。
- ★手紙の発見者 Zund は、多分、ロバートソンが  $vN$  に顛末の手紙を書かせ、ヴェブレンにこの手紙を見せたと予想。ヴェブレンがバーコフにエルゴード定理の歴史と  $vN$  の優先権を明確に書くように促して、クープマンと共著で論文が出版された。この論文では、日付(1931年10月22日)入りで、 $vN$  から平均エルゴード定理を教えてもらったと書き綴っている。

III. *The Mean Ergodic Theorem.*—The first one actually to establish a general theorem bearing fundamentally on the Quasi-Ergodic Hypothesis was J. v. Neumann,<sup>13</sup> who, with the aid of the above theory of the  $U_t$ -operator, proved what we will call the Mean Ergodic Theorem, to the following effect:

改心したようにみえるバーコフの論文

和訳: III. 平均エルゴード定理.—擬エルゴード仮説の根幹をなす一般的定理をはじめて確立したのは  $J \cdot vN$  である。彼は、 $U_t$  作用素の上述の定理を使って、いわゆる平均エルゴード定理を証明した。

