確率解析的UVくりこみ理論

廣島 文生 (九大・数理)
M. Gubinelli(Univ. Paris-Dauphine)
J. Lőrinczi(Loughborough Univ.)

2013年12月20日／確率論シンポジウム／RIMS

Nelson 模型

- ▶ $\mathscr{F} = \oplus_{n=0}^{\infty} \otimes_s^n L^2(\mathbb{R}^3)$
- ▶ $a(f)$, $a^\dagger(f)$, 生成消滅作用素, $[a(f), a^\dagger(g)] = (\bar{f}, g)$
- ▶ 場の作用素

$$\phi_{\mathrm{b}}(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger(\bar{f}) + a(f)), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^3)$$

▶UV 切断パラメター $\varepsilon > 0$ を導入して UV 切断関数を次で定める:

$$\hat{h}_\varepsilon(k) = e^{-\varepsilon|k|^2/2} \mathbb{1}_{|k|>\lambda}(k)/\sqrt{|k|} \in L^2(\mathbb{R}^3) \quad \varepsilon > 0$$

▶$\phi_{\mathrm{b}}(\hat{h}_\varepsilon e^{i(\cdot,x)})$ は $\varepsilon > 0$ で well-defined

▶UV 切断関数を外す:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \hat{h}_\varepsilon(k) = \mathbb{1}_{|k|>\lambda}(k)/\sqrt{|k|} \notin L^2(\mathbb{R}^3)$$

▶ ヒルベルト空間 $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^3) \otimes \mathscr{F}$

▶Nelson ハミルトニアン:

$$H_\varepsilon = H_p \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes H_{\mathrm{f}} + g\phi_{\mathrm{b}}(\hat{h}_\varepsilon e^{i(\cdot,x)})$$

▶$H_p = -\Delta_x/2 + V(x)$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の Schrödinger 作用素.

▶$H_{\mathrm{f}} = \int |k| a^\dagger(k) a(k) dk$ は $\mathscr{F}$ 上の自由ハミルトニアン

Nelson のくりこみ理論

- UV くりこみは H_ε で $\varepsilon \to 0$ の極限の存在を示す問題.
- 1964 年に Edward Nelson によって既に解かれている.

Theorem

- *[E. Nelson, J.Math.Phys. 5(1964)]* くりこみ項を

$$E_\varepsilon = -\frac{g^2}{2}\int_{|k|>\lambda} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{|k|}\beta(k)dk, \quad \beta(k) = \frac{1}{|k|+|k|^2/2},$$

と定める. このとき $E_\varepsilon \to -\infty$ *as* $\varepsilon \downarrow 0$ となり $H_\varepsilon - E_\varepsilon$ の $\varepsilon \downarrow 0$ の極限がレゾルベント強収束の意味で存在する:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(H_\varepsilon - E_\varepsilon - z)^{-1} = U_G^{-1}(H_{ren} - z)^{-1}U_G$$

- くりこみ項 E_ε?, Gross 変換 U_G?

E. Nelson は経路積分による別証明を [E. Nelson, Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field, in: *Proc. Conference on Analysis in Function Space*, W. T. Martin and I. Segal (eds.), p. 87, MIT Press, 1964] で試みたが上手くいかなかったようである.

Theorem

[Gubinelli+FH+Lőrinczi] 自己共役作用素 $\exists H_\infty$ *st* 任意の $F,G \in \mathscr{H}$ に対して

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(F, e^{-T(H_\varepsilon - E_\varepsilon)}G = (F, e^{-TH_\infty}G)$$

STEP(1) 経路積分表示と対角線

▶Fock 真空 $\mathbb{1} \in \mathscr{F}$

▶$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH_\varepsilon} h \otimes \mathbb{1}) = \int dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon} \right]$

(Lőrinczi-FH-Betz, De Gruyter Math Study 34, 2011)

▶ ペア相互作用

$$S_\varepsilon = \int_{-T}^{T} ds \int_{-T}^{T} dt W_\varepsilon(B_t - B_, t - s)$$

▶ ペアポテンシャル

$$W_\varepsilon(B_t - B_, t - s) = \int_{|k|>\lambda} \frac{1}{2|k|} e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-i(B_t - B_s)\cdot x} e^{-|k||t-s|} dk.$$

▶S_ε の 2 重積分の対角成分を引き去る.

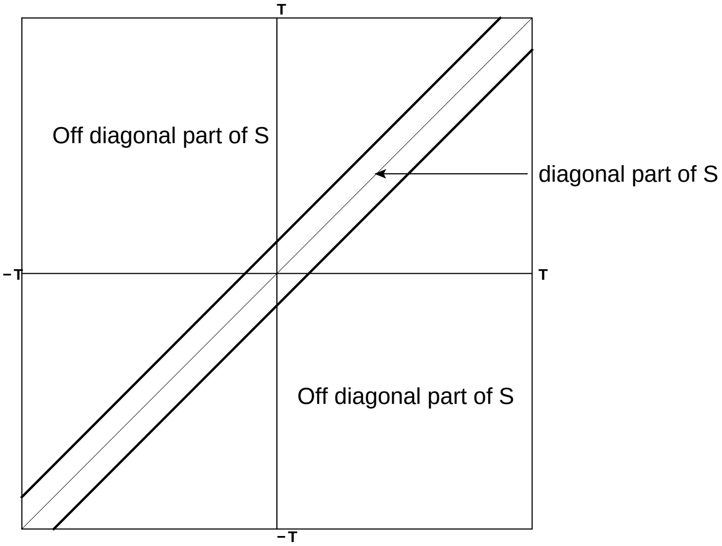

Figure: S_ε の対角成分と非対角成分

▶$\varphi_\varepsilon(x,t) = \int_{|k|>\lambda} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-ik\cdot x - |k||t|}}{2|k|} \beta(k) dk.$

▶$S_\varepsilon^{ren} = S_\varepsilon - 4T\varphi_\varepsilon(0,0)$ (対角成分を引いたペア相互作用)

▶$S_\varepsilon^{ren} = S_\varepsilon^{od} + Y_\varepsilon + Z_\varepsilon$ と分解して

$$Y_\varepsilon = 2\int_{-T}^{T} ds \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla\varphi_\varepsilon(B_t - B_s, t-s)\cdot dB_t,$$
$$Z_\varepsilon = -2\int_{-T}^{T} \varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T} - B_s, [s+\tau]_T - s) ds.$$

$\tau > 0$ は任意, $[s+\tau] = T \wedge (s+\tau) \vee -T$, S_ε^{od} は対角成分から遠い部分で一様な評価が出来る部分である.

▶$(f \otimes 1\!\!1, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2\varphi_\varepsilon(0,0))} g \otimes 1\!\!1) = \int dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon^{ren}} \right],$

STEP(2) $f \otimes 1\!\!1$ に対する評価

補間公式, Girsanov の定理, Jensen の不等式, Kato class の理論...etc. により (0),(1),(2) を示すことが出来る.

Lemma

- *(0)* $\left|\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon^{ren}}\right] dx\right| < \infty$ *(*$\forall \varepsilon > 0$*).*
- *(1)* $\exists S_0^{ren}$ *st*

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (f \otimes 1\!\!1, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 \varphi_\varepsilon(0,0))} h \otimes 1\!\!1) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{\frac{g^2}{2} S_0^{ren}}\right] dx$$

- *(2)* $\exists C$ *st*

$$(f \otimes 1\!\!1, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 \varphi_\varepsilon(0,0))} h \otimes 1\!\!1) \le \|f\| \|g\| e^{CT} \quad \varepsilon \ge 0.$$

STEP(3) 稠密なベクトルへの拡張

▶$\mathscr{H}$ で稠密な部分空間

$$D = LH\{f \otimes F(\phi_b(f_1), \cdots, \phi_b(f_n)); f \in L^2(\mathbb{R}^3), F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), n \geq 1\}$$

▶STEP(2) の $f \otimes 1\!\!1$, $h \otimes 1\!\!1$ は $F, G \in D$ まで拡張できる.

▶ 特に $F, G \in D$ に対して, 下の極限の存在を示すことができる.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}(F, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 \varphi_\varepsilon(0,0))}G)$$

▶ さらに, 上の極限を経路積分表示できる.

cf $F(\vec{\phi}_b(f)) = (2\pi)^{-n/2} \int \check{F}(k) e^{ik\vec{\phi}_b(f)} 1\!\!1 dk$

STEP(4) 最も困難なステップ

▶$\exists \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(F, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2\varphi_\varepsilon(0,0))}G)$ for $F, G \in \mathscr{H}$?

▶STEP (3) の D を全空間 $\mathscr{H}$ まで拡張するために一様な lower bound

$$H_\varepsilon + g^2\varphi_\varepsilon(0,0) > C, \quad \varepsilon > 0$$

を示せばいい. ※ $\varphi_\varepsilon(0,0) \to +\infty$ だが $\inf\sigma(H_\varepsilon) \to -\infty$.

▶ 函数解析的には lower bound を示せる (Nelson の結果)

▶ 経路積分で示せるか？

アイデアの概略

▶ ダミーなポテンシャル $\delta|x|^2$ を加える:

$$H_\varepsilon(\delta) = H_\varepsilon + \delta|x|^2 + g^2\varphi_\varepsilon(0,0)$$

▶$H_\varepsilon(\delta)$ は至るところ正の基底状態 φ_{g} をもつことが経路積分を使って示すことができる. (H. Spohn, 1999)

▶$(\varphi_{\mathrm{g}}, f\otimes 1\!\!1) \neq 0$ と $(f\otimes 1\!\!1, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2\varphi_\varepsilon(0,0))} h\otimes 1\!\!1) \leq \|f\|\|g\|e^{CT}$ から

$$\inf \sigma(H_\varepsilon(\delta)) = -\frac{1}{2T}\lim_{T\to\infty}\log(f\otimes 1\!\!1, e^{-2TH_\varepsilon(\delta)} f\otimes 1\!\!1) \geq -C,$$

ここで C は δ に依っていない.

- $(F, e^{-2T(H_\varepsilon+\delta|x|^2+g^2\varphi_\varepsilon(0,0))}F) \geq e^{2TC}\|F\|^2, \forall F \in \mathscr{H}$
- $(F, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2\varphi_\varepsilon(0,0))}F) \geq e^{2TC}\|F\|^2$
- $\inf\sigma(H_\varepsilon + g^2\varphi_\varepsilon(0,0)) \geq C.$
- 特に e^{-2TH_ε} の作用素ノルム $\|e^{-2TH_\varepsilon}\|$ は一様に有界!
- 単純な近似理論で

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(F, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2\varphi_\varepsilon(0,0))}G)$$

が任意の $F, G \in \mathscr{H}$ で存在することが示せる.

STEP(5)

▶Riesz の表現定理から $\exists T_t$ st

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(F, e^{-t(H_\varepsilon+g^2\varphi_\varepsilon(0,0))}G) = (F, T_t G)$$

▶T_t は対称・強連続な一径数半群になる.

▶Stone の定理から $T_t = e^{-tH_\infty}$ となる H_∞ が存在する.

弱結合極限 (weak coupling limit)

- 多体 Nelson model

$$H_\varepsilon = h_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \int \sqrt{|k|^2 + \nu^2} a^\dagger(k) a(k) dk + \sum_j^N \phi_{\mathrm{b}}(h_\varepsilon e^{i(\cdot, x_j)}),$$

ここで, $h_p = \sum_{j=1}^N (-\frac{1}{2}\Delta_j) + V(x_1, \ldots, x_N)$

- $H_\varepsilon(\kappa) = h_p \otimes \mathbb{1} + \kappa^2 \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}} + \kappa H_{\mathrm{Int}}, \ \kappa > 0$
- $E_\varepsilon(\kappa) = -g^2 N \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{2(2\pi)^3 \omega_\nu(k)} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 \omega_\nu(k) + |k|^2/2} dk.$

Theorem

Weak Coupling Limits:

$$\lim_{\kappa \to \infty} (f \otimes \mathbb{1}, e^{-tH_\infty(\kappa)} h \otimes \mathbb{1}) = (f, e^{-th_{\mathrm{eff}}} h)$$

$$h_{\mathrm{eff}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Delta_j + V(x^1, \ldots, x^N) - \frac{g^2}{4\pi} \sum_{i<j} \frac{e^{-\nu|x_i - x_j|}}{|x_i - x_j|}.$$

まとめ

▶Nelson $\Longrightarrow$ くりこみ項 E_ε=交換子, Gross 変換 U_G

▶Gubinelli+H+Lőrinczi $\Longrightarrow$ くりこみ項 $E_\varepsilon =$ ペア相互作用の対角成分, Gross 変換は不要

▶Applications

0. 多体 Schrödinger 作用素
1. 多様体上の場の理論 $BM \to$ diffusion proc.
2. Non-local な Nelson model; $BM \to$ Lévy proc.
   $\sqrt{p^2+m^2}\otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes H_{\mathrm{f}} + \phi_{\mathrm{b}}(h_\varepsilon e^{i(\cdot,x)})$,
3. Translation invariant な場合
   $\frac{1}{2}(P - \int k a^\dagger(k) a(k))^2 + H_{\mathrm{f}} + \phi_{\mathrm{b}}(h_\varepsilon)$, $P \in \mathbb{R}^3$.

参考文献

- Bach-Fröhlich-Sigal (Adv Math 97,CMP98) GS. for $|g| \ll 1$
- Gérard (AHP 00), Spohn(LMP 00) GS. $\forall g$
- Fefferman (Adv Math 00) Stability of matter
- FH (JMP99, CMP 01,JFA05) uniqueness and s.a. $\forall g$
- Betz-FH-Lőrinczi-Minlos-Spohn (RMP01) Gibbs meas.
- Griesmer-Lieb-Loss (Inv. Math 01) GS ∀g.
- FH-Spohn(AHP 01) enhanced binding
- Hirokawa-FH-Spohn(Adv Math 05) GS with UV ren.
- FH-Lőrinczi (JFA 08) non-local model
- Gérard-FH-Panati-Suzuki (CMP12,JFA12,LMP12) model on mfd.