Title	作用素環論概説(基研短期研究会「数理物理学における非線形問題」,研究会報告)
Author(s)	中神, 祥臣
Citation	物性研究 (1992), 57(5): 635-672
Issue Date	1992-02-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/94864
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

作用素環論概説

横浜市立大学　中神祥臣

§0．はじめに

複素 $n\times n$ 行列の全体を $M_n(\mathbb{C})$ で表す。$M_n(\mathbb{C})$ は行列の和、定数倍、積、随伴（共役転置）の４つの演算で閉じている。一般に、この４つの演算で閉じた集合を＊多元環という。n が $n_1+\ \ldots\ +n_\ell$ $(n_i\geq 1)$ と表せる場合には、$A=M_{n_1}(\mathbb{C})\oplus\ldots\oplus M_{n_\ell}(\mathbb{C})$ を、下の図のように、$M_n(\mathbb{C})$ の対角上へブロック状に埋蔵することができる。

$$A=\begin{pmatrix} M_{n_1}(\mathbb{C}) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & M_{n_\ell}(\mathbb{C}) \end{pmatrix}\subset M_n(\mathbb{C})$$

この A もまた＊多元環になる。このように、＊多元環の部分集合で＊多元環になっているものを＊部分多元環という。

とくに、$M_n(\mathbb{C})$ または $M_{n_i}(\mathbb{C})$ のようにブロックの形をした＊多元環を単純であるといい、A のように単純＊多元環の直和の形をしたものを半単純であるという。

複素行列の成す＊多元環はどれも半単純であることがわかっている。上の＊多元環はどれもベクトル空間として有限次元であったが、これに位相を込めて無限次元 Hilbert 空間上の有界作用素の成す＊多元環の場合へ拡張したものが作用素環である。その際、完備化する位相がノルム位相であるかまたは弱位相であるかによりそれぞれC^*環と von Neumann 環が定義される（正式な定義は§1で与える）。最近は、無限次元で非可換な対象を扱う数学が増えてきているが、作用素環ではこのような代数的構造の他に、これとうまく整合する位相まで込めて議論を行なうことを特色としている。

“有限次元”　　　　　　　　“無限次元”

---

von Neumann 環

弱位相　（von Neumann が1929年に定義）

＊多元環

ノルム位相

C^*環

（Gelfand-Naimark が1945年に定義）

von Neumann 環は、有限次元の＊多元環の場合と同じように、ファクターまたは因子環とよばれる単純 von Neumann 環の直積分として

$$M = \int_{\Omega}^{\oplus} M(\omega)\, d\mu(\omega)$$

と表される。有限次元の場合と著しく異なるのは、ファクターが次のいずれかの型に属し、有限次元の場合からは直感的に理解し難いII、III型が現れる点である。

I 型 （I_n 型 または I_∞ 型 ）

II 型 （II_1 型 または II_∞ 型 ）

III 型 （III_0 型、III_λ 型（$\lambda\in(0,1)$）または III_1 型）

I_n 型ファクターは $n\times n$ 行列全体 $M_n(\mathbb{C})$ と同型である。I_∞ 型ファクターは無限次元 Hilbert 空間上の有界作用素の全体と同型である。これで、I 型ファクターは完全に分類されたことになる。そこで、作用素環では II 型および III 型ファクターの分類が基本的問題になる。

作用素環と一口に言っても、さまざまな種類のものがあるので、ここでは非可換なものを、次のように、有限次元の行列環で近似できる AF 的なものと、そうでない非 AF 的なものに分けて考えてみよう。

	可換	非可換	
		AF 的	非 AF 的
von Neumann 環 またはファクター	$L^\infty(\Omega,B,\mu)$	AFD 因子環 (Connes, Jonesの理論)	群 v.N.環
C^* 環	$C_\infty(\Omega)$	核型 C^*環 AF環 非可換トーラス等	群 C^*環等

量子統計力学や場の量子論のモデルとして現れる作用素環はほとんど AF 的であるのに対し、自由群や基本群の表現から得られる C^*環は非 AF 的である。

§1. 作用素環の定義

複素 Hilbert 空間 $\mathbb{H}$ 上の有界線形作用素全体を $L(\mathbb{H})$ とする。$L(\mathbb{H})$ は

線形作用素の和、定数倍、積、随伴の4つの演算

$$x+y, \quad \lambda x \ (\lambda \in \mathbb{C}), \quad xy, \quad x^*$$

で閉じている。ただし、$(x\xi|\eta)=(\xi|x^*\eta)$, $\xi,\eta\in\mathbb{H}$. したがって、$L(\mathbb{H})$ は*多元環である。Hilbert 空間 $\mathbb{H}$ が有限次元の場合には、$L(\mathbb{H})$ は $\mathbb{H}$ の次元 n により定まる $M_n(\mathbb{C})$ と同一視できる。

$L(\mathbb{H})$ には位相ベクトル空間として各種の位相が考えられるが、当面は、作用素ノルム

$$\|x\| = \sup\{\|x\xi\|: \|\xi\| \leq 1\}$$

から導かれる<u>ノルム位相</u>と、内積により定義されるセミノルム

$$p_{\xi,\eta}(x)=|(x\xi|\eta)|, \quad \xi,\eta\in\mathbb{H}$$

から導かれる<u>弱位相</u>を用いることにする。つまり

a) 列 $\{x_n : n\in\mathbb{N}\}$ が x へノルム(位相で)収束するとは、$\|x_n-x\|\longrightarrow 0$ 。

b) 有向族 $\{x_i : i\in I\}$ が x へ弱(位相で)収束するとは、任意の $\xi,\eta\in\mathbb{H}$ に対して、$|(x_i\xi|\eta)-(x\xi|\eta)|\longrightarrow 0$ 。

$L(\mathbb{H})$ の*部分多元環 A に対し、集合 $A=\{x\xi : x\in A,\ \xi\in\mathbb{H}\}$ が $\mathbb{H}$ で稠密のとき A は<u>非縮退</u>であるという。A が非縮退でない場合には、A を $A\mathbb{H}$ の閉包として得られる閉部分空間へ制限すると非縮退になる。そこで、とくに断らない限り、$L(\mathbb{H})$ の*部分多元環に対しては非縮退性を仮定する。

<u>定義</u> $L(\mathbb{H})$ の*部分多元環のうち、ノルム位相で閉じたものを<u>C^*環</u>といい、単位元をもち弱位相で閉じたものを <u>von Neumann 環</u>という。

弱位相に関する閉集合はそれより強いノルム位相に関しても閉集合であるから、von Neumann 環は C^*環でもある。ベクトル空間が有限次元の場合には、その上の位相ベクトル空間としての位相はどれも同値であるし、部分空間はどれも閉集合になるから、有限次元＊多元環はどれも、von Neumann 環である。

C^*環の元 x のうち、$x^*=x$, $x^*=x^{-1}$, $x^*=x=x^2$ をみたすものを、それぞれ<u>自己随伴</u>、<u>ユニタリ</u>、<u>射影</u>であるという。また、x^*x または x^*x が射影となる元 x を<u>部分等長</u>であるといい、とくに $x^*x=1$ または $xx^*=1$ となるものをそれぞれ<u>等長</u>、<u>余等長</u>であるという。

$L(\mathbb{H})$ の＊部分多元環 A に対し、A のすべての元と可換な $L(\mathbb{H})$ の元全体から成る集合

$$\{x \in L(\mathbb{H}) : xy=yx \ (y \in A)\}$$

は再び von Neumann 環になる。これを A の<u>可換子環</u>といい、A' で表す。$A''=(A')'$, $A''=(A')'$ とすれば、$A \subset A''$, $A'=A'''$ などが成り立つ。A'' を A の2重可換子環という。von Neumann は、作用素環の研究を、次の2重可換子環定理を導くことから始めた。

<u>定理</u> 1.1 (von Neumann) $L(\mathbb{H})$ の＊部分多元環 M に対して次の2条件は同値である。

(i) M は von Neumann 環である。

(ii) $M=M''$ 。

これにより、弱位相が作用素環の代数構造と非常によく適合していることがわかる。

von Neumann 環 M に対し、M とその可換子環の共通部分 $M \cap M'$ を M の中心といい、$Z(M)$ で表す。中心 $Z(M)$ が自明な＊多元環 $\mathbb{C}1$ のとき、M を

ファクターまたは因子環という。一般に、C^*環 A が、{0}または自分自身以外に閉両側イデアル（＊部分多元環 J で AJA ⊂ J をみたすもの）を持たないとき A は単純であるという。通常、C^*環または von Neumann 環における位相は、とくに断らない限り、それぞれノルム位相または弱位相を考えるものとする。したがって、von Neumann 環 M の両側イデアル m が閉両側イデアルであるとは、弱位相で閉じた両側イデアルのことである。このイデアル m は中心 Z(M) の射影元 p を用いて m=Mp と表される。したがって、M がファクターであることと、単純であることは同値であるが、作用素環論では有限次元の場合を除きファクターに対して単純という用語を用いる習慣はない。

例 1.1　無限次元 Hilbert 空間上のコンパクト作用素の全体 $\mathcal{K}(\mathbb{H})$ は単純C^*環であり、C^*環 $L(\mathbb{H})$ の閉両側イデアルになっている。また von Neumann 環 $L(\mathbb{H})$ の中心は自明であるから、$L(\mathbb{H})$ は因子環である。したがって、$\mathcal{K}(\mathbb{H})$ は $L(\mathbb{H})$ において弱位相に関して稠密である。

von Neumann 環 M の射影元の全体を Proj(M) とする。この集合には Murray-von Neumann の同値関係と呼ばれる、つぎのような同値関係が入る．$p,q \in$ Proj(M)に対し、$p \sim q$ とは $p=u^*u$, $q=uu^*$ をみたす M の部分等長元 u が存在することである。

注（量子論理と射影幾何）Proj(M) の元 p，q に対し、$p\mathbb{H}$ と $q\mathbb{H}$ の張る閉部分空間への射影を $p\vee q$，$p\mathbb{H}\wedge q\mathbb{H}$ 上への射影を $p\wedge q$ とすると、$p\vee q$，$p\wedge q$ は Proj(M) の元であり、Proj(M) は束になる。実は、これが完備な相補モジュラー束であることがわかっている。ただし、束がモジュラーであるとは、p ≤ q ならば、$p\vee(r\wedge q)=(p\vee r)\wedge q$ が任意の r に対して成り立つことである。

Proj(M) から $\mathbb{R}_+$ への有限加法的な写像が M 上の正線形汎関数に拡張できるかどうかという、Mackey の問題も、Gleason が可分(可算次元) Hilbert 空間(3次元は除く)上に作用する I_∞型ファクター M の場合を肯定的に解いてから、永らく懸案であったが、今では、von Neumann 環 M が I_2型の直和成分さえ持たなければ、一般的に成り立つことが判っている(Christensen, Yeadon, 斎藤, 前田)。

<u>定義</u> $p \in \mathrm{Proj}(M)$ とする。

(i) $q \sim p$, $q \leq p$ をみたす $q \in \mathrm{Proj}(M)$ がどれも p と一致するとき、p は<u>有限</u>であるという。

(ii) $q \leq p$, $q \neq 0$ となる $q \in \mathrm{Proj}(M)$ で有限なものが存在しないとき p は<u>純無限</u>であるという。

von Neumann 環 M には最大の有限射影元 p_0 と最大の純無限射影元 q_0 が存在し、それらは中心 Z(M) に属している。

<u>定義</u> von Neumann 環 M に対し、

(i) $p_0=1$ のとき、M は<u>有限</u>であるという。

(ii) $p_0=0$ のとき、M は<u>真無限</u>であるという。

(iii) $q_0=0$ のとき、M は<u>半有限</u>であるという。

(iv) $q_0=1$ のとき、M は<u>純無限</u>または<u>III型</u>であるという。

射影元が純無限のときには、どの部分射影元も有限にはならないが、真無限のときには、どの部分射影元も有限部分射影元をもち、したがって有限射影元の和として表せる。

注(Field algebra) Proj(M) の元 $p(\neq 0)$ が有限でなければ $q \lneq p$ かつ $q \sim p$ をみたす Proj(M) の元 q が存在する。したがって、ファクターがIII型の場合には、Proj(M) の任意の 0 でない元 p に対して、$p \sim 1$ と成っている。代数的場の理論のモデルに現れる Field algebra の多くでは、このことが成り立っている(Borchers)。

定義 $p \in$ Proj(M) に対し、多元環 pMp が可換のとき、射影元 p は Abelian であるという。

Abelian な射影元は自動的に有限である。

定義 von Neumann 環 M に対し

(i) M の中心に含まれる 0 でない射影元 p がどれも M の 0 でない Abelian な部分射影元 q $(q \leq p)$ をもつとき、M はI型であるという。

(ii) 半有限な M の中心に含まれる 0 でないどの射影元 p も M の 0 でない Abelian な部分射影元 q $(q \leq p)$ をもたないとき、M はII型であるという。

(iii) II型 von Neumann 環が有限のとき、II_1型といい、真無限のとき、II_∞型という。

(iv) I型を離散的、IIまたはIII型を連続的であるともいう。

	半有限		純無限
有限	I_n型	II_1型	III型
真無限	I_∞型	II_∞型	
	離散	連続	

一般の von Neumann 環 M はそれぞれ I, II, III 型の von Neumann 環

M_1, M_2, M_3 の直和 $M_1 \oplus M_2 \oplus M_3$ に分解できる。さらに、M_1 は I_n型($n=1,2,\ldots$)のvon Neumann 環 $M_n(\mathbb{C}) \bar{\otimes} L^\infty(\Omega_n)$ と I_∞型のvon Neumann 環 $L(\mathbb{H}_\alpha) \bar{\otimes} L^\infty(\Omega_\alpha)$ ($\dim \mathbb{H}_\alpha = \alpha \geq \aleph_0$) の直和になり、$M_2$ はII_1型およびII_∞型 von Neumann 環の直和に成っている。II_∞型ファクターは II_1型ファクターと I_∞型ファクターのテルソン積として表せる。III_0型、III_λ型、III_1型を理解するには冨田-竹崎理論(非可換積分論)の準備を要するので、ここでは省くが、例4.2において代表的な例を与えておく。数理物理のモデルに現れる von Neumann 環はたいていIII_1型であることが知られている(荒木)。

注　ここで、もう一度、射影作用素の集合 Proj(M) を振り返ってみよう。Murray-von Neumann の同値関係に関する同値類の全体を Proj(M)/~ とする。Proj(M) の元 p, q が $pq=0$ のときには、$p+q$ も Proj(M) の元に成るので、同値類 $[p]$, $[q]$ の和を $[p+q]$ で定義する。$pq\neq 0$ であっても、$pq'=0$, $q'\sim q$ となる q' が存在するときには、$[p]$, $[q]$ の和を $[p+q']$ で定義することにすれば、同値類 Proj(M)/~ は可換半群を生成する。例えば、$M=M_n(\mathbb{C})$ の場合には、次元の等しい射影作用素は互いに同値であるから、Proj(M)/~ は $n+1$ 個の元からなる集合 $\{[p_k]:\dim p_k=k,\ k=0,1,\ldots,n\}$ と成る。これを $\{0,1,\ldots,n\}$ と同一視すれば、半群としての準同型写像：Proj(M) $\mapsto \{0,1,\ldots,n\}$ は M 上のトレイスの値と一致している。M が一般のファクターの場合にも同じようなことが起り、同値類 Proj(M)/~ はトレイスの値域と一致し、ファクターの型とは次のように関係している。

ファクター	I_n型	I_∞型	II_1型	II_∞型	III型
トレイス値	$\{0,\ldots,n\}$	$\{0,1,\ldots\}$	$[0,1]$	$\mathbb{R} \cup \{\infty\}$	$\{0,\infty\}$

通常、われわれは非可換で無限次元な対象を、直感的には、行列環の無限次元版として捉えることが多い。これを作用素環の用語を借用して言うと、

I_∞型的な捉え方と言える。ところが、このような対象には、この他に、II型のものとIII型ものがある。中でもII型のものを解析する場合には、まだ、上のようなトレイスが使えるからよいが、III型の場合にはその値が 0 でない射影元に対しては、いつでも ∞ に成ってしまい、トレイスは何の役にも立たない。そこで、このように捕らえ所のないIII型 von Neumann 環に対し、非可換積分論とも言うべき解決法を提供したのが冨田-竹崎理論である。数学的意義だけでなく、物理学に現れるモデルの多くがIII型であることを思うと、その果す役割は大きく、例えば、量子統計力学における平衡状態は、この理論に現れる KMS 条件を用いて始めて数学的にきちんと定式化できたのである(Robinson,荒木)。

つぎに、上に出てきたトレイスの定義を与えるために、用語の用意をする。C^*環 A の元 x に対し、$x=y^*y$ となる A の元 y が存在するとき、x は正値であるといい、$x\geq 0$ で表す。これは、作用素 x が正値であること、つまり任意の $\xi\in H$ に対して、$(x\xi|\xi)\geq 0$ が成り立つことと同値である。

<u>定義</u> C^*環 A の正値な元全体を A_+ とする。A_+ から $\mathbb{R}_+\cup\{\infty\}$ への写像 τ で

$$\tau(x+x')=\tau(x)+\tau(x'),\quad \tau(\lambda x)=\lambda\tau(x)\ (\lambda\geq 0),\quad \tau(y^*y)=\tau(yy^*)$$

をみたすものを、A 上の<u>トレイス</u>という。ただし、$\infty\cdot 0=0\cdot\infty=0$ とする。$y\neq 0$ ならば、$\tau(y^*y)\neq 0$ が成り立つときには、τ は<u>忠実</u>であるという。とくに、von Neumann 環の場合には、$x_i\nearrow x$ ならば、$\tau(x_i)\nearrow\tau(x)$ が成り立つとき、τ は<u>正規</u>であるという。

von Neumann 環の有限性と半有限性をトレイスを用いて述べておく。

命題 1.2　1．次の2条件は同値である。

(i) M は有限である。

(ii) M 上には、任意の $x\in M_+$ に対し $\tau(x)>0$ となる有限($\tau(1)<\infty$)正規トレイス τ が存在する。

2．次の2条件は同値である。

(i) M は半有限である。

(ii) M 上には、任意の $x\in M_+$ に対し $\tau(x)>0$ となる半有限($x\in M_+$ ならば、$\tau(y)<\infty$ となる 0 と異なる M_+ の元 $y\leq x$ が存在する)正規トレイス τ が存在する。

3．次の2条件は同値である。

(i) M はIII型である。

(ii) M 上には、半有限正規トレイスは自明な(値として 0 または ∞ しか取らない)もの以外には存在しない。

§2．C^*環の特徴づけ

A_i $(i=1,2)$ を＊多元環とする。π が A_1 から A_2 への写像で、＊多元環の4つの演算を保存するとき、つまり

$$\pi(x+y)=\pi(x)+\pi(y),\qquad \pi(\lambda x)=\lambda\pi(x)\qquad(\lambda\in\mathbb{C})$$

$$\pi(xy)=\pi(x)\pi(y),\qquad \pi(x^*)=\pi(x)^*$$

が成り立つとき、π を準同型写像といい、さらに π が単射(1対1)のときには、同型写像という。とくに、π が全単射のときには、A_1 と A_2 は同型であるといい、$A_1\cong A_2$ で表す。$A_1=A_2$ の場合には、全単射同型写像を自己同型写像という。

定理 2.1　(i) C^*環 A_1 から C^*環 A_2 への準同型写像 π は自動的に連続

($\|\pi(x)\| \le \|x\|$) で、同型の場合には等長($\|\pi(x)\| = \|x\|$)である。

(ii) 準同型写像 π の像 $\pi(A)$ はC^*環である。

注　von Neumann 環 M_1 から von Neumann 環 M_2 への準同型写像 π は必ずしも弱位相に関して連続に成るとは限らない。したがって準同型写像 π の像 $\pi(M_1)$ が von Neumann 環に成る保障はない。このように、無限次元空間上では位相の選び方により異なった現象が現れる。場の量子論で、(反)交換関の表現が一意的に定まらないことを示した、van Hove の模型も、この違いを用いて説明されている。

＊多元環 A に次の条件をみたすノルムが与えられ、

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad \|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

$$\|xy\| \le \|x\|\|y\| \qquad \|x^*\| = \|x\|$$

しかも、A がこのノルムに関して完備になっているとき、A を Banach＊環という。 もちろん、C^*環はこれらの条件をみたしているので、Banach＊環の一種であるが、この他にもC^*ノルムの条件 $\|x^*x\| = \|x\|^2$ もみたしている。実は、この逆が成立つ。

<u>定理</u> 2.2　Banach＊環 A のノルムがC^*ノルムの条件

$$\|x^*x\| = \|x\|^2, \qquad x \in A$$

をみたせば、A からある Hilbert 空間 $\mathbb{H}$ 上のC^*環 $L(\mathbb{H})$ の中への等長同型写像 π が存在し、$\pi(A)$ はC^*環である。

この定理により、以後C^*ノルムの条件をみたす Banach＊環もC^*環と呼ぶことにする。

例 2.1 局所コンパクト空間 Ω 上の連続関数 f が無限遠で零になるとは、任意の $\varepsilon>0$ に対し 集合 $\{\omega\in\Omega: |f(\omega)|\geq\varepsilon\}$ がコンパクトに成ることである。Ω 上無限遠で零になる連続関数の全体を $C_\infty(\Omega)$ と書く。$C_\infty(\Omega)$ は各点ごとの和、定数倍、積および対合 : $f^*(\omega)=\overline{f(\omega)}$ の演算の下で＊多元環になり、(上限)ノルム

$$\|f\|=\sup\{|f(\omega)| : \omega\in\Omega\}$$

の下で C^*環になる。$C_\infty(\Omega)$ が単位元をもつことと、Ω がコンパクトであることは同値である。この場合には、$C_\infty(\Omega)$ から添字 ∞ を省いて $C(\Omega)$ と書く。

<u>定理</u> 2.3（境） C^*環 M に対し、次の2条件は同値である。

(i) M は von Neumann 環である。

(ii) M はある Banach 空間の双対空間と同型である。

条件(ii)の Banach 空間は一意的に定まるのでこれを前双対空間といい、M_* で表す。M_* は M の(Banach 空間としての)の双対空間 M^* の閉部分空間と同一視できる。M 上の弱(位相に関して)連続な線形汎関数の全体は M_* の稠密部分空間になっている。

C^*環 A が閉両側イデアル J をもてば、Banach 空間としての商空間 A/J は自然にC^*環になる。これをC^*環 A のイデアル J に関する商C^*環という。

C^*環の族 $\{A_i : i\in I\}$ が与えられたとき、無限直積 $\Pi_{i\in I}A_i$ の元 (x_i) のうちノルム

$$\|(x_i)\|=\sup\{\|x_i\| : i\in I\}$$

が有限なもの全体は再びこのノルムによりC^*環になる。これをC^*環 $A_i, i\in I$ の直和といい、$\Sigma^{\oplus}_{i\in I} A_i$ で表す。

2つのC^*環 A, B の(代数的)テンソル積 $A\otimes B$ 上で条件 $\|x\otimes y\|=\|x\|\|y\|$

をみたすノルムをクロスノルムという。クロスノルムには、C^*ノルムの条件をみたすものも存在するが、必ずしも一意的には定まらない。しかし最大のものと最小のものの存在がわかっている(竹崎、Guichardet)。そこで、最大または最小のクロスC^*ノルムを用いて $A \otimes B$ を完備化したC^*環をそれぞれ $A \hat{\otimes}_{max} B$, $A \hat{\otimes}_{min} B$ と書く。とくに、A または B が有限次元またはその帰納極限の場合には、最大のものと最小のものが一致し、ノルムが一意的に定まることがわかっている(竹崎)。このクロスC^*ノルムの一意性は§8で述べるC^*環の核型性と関係している。

2つの von Neumann 環の M, N の作用している Hilbert 空間をそれぞれ $\mathbb{H}$, $\mathbb{K}$ とする。Hilbert 空間 $\mathbb{H} \otimes \mathbb{K}$ において $\{x \otimes 1 : x \in M\}$, $\{1 \otimes y : y \in N\}$ の生成する von Neumann 環を M と N のテンソル積といい、$M \bar{\otimes} N$ で表す。このテンソル積は表現空間の選び方に依らない。つまり、$M_1 \simeq M_2$, $N_1 \simeq N_2$ ならば、$M_1 \bar{\otimes} N_1 \simeq M_2 \bar{\otimes} N_2$ となる(御園生)。

§3. 可換C^*環と可換 von Neumann 環

位相空間のうち、その各点でコンパクトな近傍が選べるものを局所コンパクト空間という。格子点、直線、球面、・・・・などの図形は、自然な位相に関して、どれも局所コンパクトである。この空間をその上の連続関数を用いて言い直すことにより、自然に可換C^*環の概念に到達するが、歴史的には Fourier 変換の代数化と見るのが自然である。

<u>定理</u> 3.1 (Gelfand-Naimark) (i) 可換C^*環 A は、ある局所コンパクト空間 Ω 上の無限遠で零となる連続関数全体の成る関数環 $C_\infty(\Omega)$ と同型である(この同型対応を Gelfand 表現という)。とくに、A が単位元をもつ場合には、Ω はコンパクトである。

(ii) 可換C^*環 A_i $(i=1,2)$ の Gelfand 表現を $C_\infty(\Omega_i)$ とする。A_1 から A_2 の上への同型写像 π と Ω_2 から Ω_1 への同相写像 $\hat{\pi}$ は

$$(\pi(x))(\omega)=x(\hat{\pi}(\omega)), \qquad x\in A_1, \qquad \omega\in\Omega_2$$

なる関係により、1対1に対応している。

<u>命題</u> 3.2 (Riesz) 可換C^*環 $A=C_\infty(\Omega)$ 上の有界線形汎関数 ϕ に対しては

$$\phi(f)=\int_\Omega f(\omega)d\mu(\omega), \qquad f\in C_\infty(\Omega)$$

なる(Radon)測度 μ が存在する。

<u>定理</u> 3.3 可換 von Neumann 環 Z は、ある局所コンパクト空間 Ω に台をもつ測度 μ に関する有界可測関数全体の成す関数環 $L^\infty(\Omega,\mu)$ と同型である。ただし、ほとんど至る所で一致する関数は同一視する。とくに、Z が可算分解可能(Z の射影元で互に直交するものの集合は可算)ならば、Ω は第2可算公理をみたす。

注 可換 von Neumann 環 Z は単位元をもつ可換C^*環であるから、$Z\simeq C(\Omega_1)$ なるコンパクト空間 Ω_1 が存在する。上の定理の Ω は Ω_1 の部分集合と同一視でき、その差 $\Omega\setminus\Omega_1$ は Z の各有界正線形汎関数 $\omega_\xi: x\in Z \longmapsto (x\xi|\xi)\in\mathbb{C}$ $(\xi\in\mathbf{H})$ に対応する測度に関して局所零集合(任意のコンパクト集合との共通部分が零集合)になっている。

この定理3.1と3.3は作用素環論において、C^*環と von Neumann 環の果す役割の違いを示している。つまり、位相空間的議論を行なうときにはC^*環が、測度空間的議論を行なうときには von Neumann 環が用いられる。

§4．ファクターの構成法

4.1 群-測度空間構成法（接合積）

Ω を第2加算公理をみたす局所コンパクト空間、B をその Borel 集合族とする。測度空間 (Ω, B, μ) から自分自身の上への同相写像 S で非特異 $(\mu(E)=0 \Leftrightarrow \mu(SE)=0)$ なものを、<u>非特異変換</u>という。非特異変換の全体 $\mathrm{Aut}(\Omega)$ は群になる。

離散群 G から $\mathrm{Aut}(\Omega)$ への群準同型写像：$t \mapsto T_t$ を G の Ω 上への作用といい、$\{T_t\}$ で表す。G の単位元を e とすれば、T_e は恒等写像である。

von Neumann 環を具体的に構成するために次の2つの作用素を導入する。$L^2(\Omega \times G, \mu \otimes \mu_0)$ の元 ξ に対して

$$
(4.1) \quad \begin{cases} (\pi(f)\xi)(\omega, s) = f(T_s\,\omega)\xi(\omega, s) & f \in L^\infty(\Omega, \mu) \\ (u(t)\xi)(\omega, s) = \xi(\omega, t^{-1}s) & t \in G \end{cases}
$$

とおく。これらは共変条件 $\pi(\alpha_t f)=u(t)\pi(f)u(t)^*$ をみたしている。ただし α_s は $(\alpha_s f)(\omega)=f(T_s^{-1}\omega)$ により定義された von Neumann 環 $L^\infty(\Omega, \mu)$ の自己同型写像である。

<u>定義</u>　上の(4.1)式により与えられる作用素の族 $\{\pi(f) : f \in L^\infty(\Omega)\}$ と $\{u(t) : t \in G\}$ から von Neumann 環を生成することを、<u>群-測度空間構成法</u>といい、得られた von Neumann 環を $L^\infty(\Omega) \times_\alpha G$ で表す。

この構成法は von Neumann 環 M に局所コンパクト群 G の作用 $\{\alpha_t : t \in G\}$ が与えられている場合にも一般化でき、そのとき得られる von Neumann 環 $M \times_\alpha G$ を M と G の<u>接合積</u>という（鶴丸）。

群-測度空間構成法で得られる von Neumann 環がファクターになるための条件を与えるために、次の2つの概念を導入する。

<u>定義</u> 離散群 G の測度空間 (Ω,B,μ) への作用を $\{T_t\}$ とする。

(i) 任意の $t\in G\setminus\{e\}$ と任意の可測集合 E, $\mu(E)>0$ に対し、その可測部分集合 F, $\mu(F)>0$ で $T_tF\cap F=\phi$ となるものが存在するとき、作用 $\{T_t\}$ は<u>自由</u>であるという。

(ii) 作用 $\{T_t\}$ で不変な可測集合 E に対しては $\mu(E)=0$ または $\mu(E^c)=0$ が成り立つとき、作用は<u>エルゴード的</u>であるという。

<u>命題</u> 4.1 離散群 G の測度空間 (Ω,B,μ) への作用を $\{T_t\}$ とする。

1. 次の2条件は同値である。
   (i) 作用 $\{T_t\}$ は自由である。
   (ii) $L^\infty(\Omega)\times_\alpha G$ において $\pi(L^\infty(\Omega))$ は極大可換である。
2. 自由な作用 $\{T_t\}$ に対し、次の2条件は同値である。
   (i) 作用 $\{T_t\}$ はエルゴード的である。
   (ii) $L^\infty(\Omega)\times_\alpha G$ はファクターである。

自由かつエルゴード的作用を用いて得られるファクター $M=L^\infty(\Omega)\times_\alpha G$ に対しては次のことがわかっている。$|G|=\infty$とする。

M: I 型 $\Longleftrightarrow$ $\{T_t\}$ が推移的(つまり、$\mu(\Omega\setminus\{T_t\omega : t\in G\})=0$ となる $\omega\in\Omega$ が存在する)

M: II_1型 $\Longleftrightarrow$ μと絶対連続な有限測度 νで $\{T_t\}$ 不変($\nu\circ T_t=\nu$, $t\in G$)かつ $\nu(\{\omega\})=0$, $(\omega\in\Omega)$ となるものが存在する。

M: II_∞型 $\Longleftrightarrow$ μと絶対連続なσ有限測度 νで $\{T_t\}$ 不変かつ $\nu(\{\omega\})=0$ $(\omega\in\Omega)$, $\nu(\Omega)=\infty$となるものが存在する。

M: III型 $\Longleftrightarrow$ μと絶対連続なσ有限測度で $\{T_t\}$ 不変なものは存在しない。

__定理__ 4.2 離散群 G が測度空間 (Ω_i, B_i, μ_i) へ自由かつエルゴード的に作用しているとき、次の2条件は同値である。

(i) $L^\infty(\Omega_1)\times_{\alpha_1}G \simeq L^\infty(\Omega_2)\times_{\alpha_2}G$

(ii) 力学系 (Ω_1, G) と (Ω_2, G) は軌道同値である。

例 4.1 $\Omega=\{z\in\mathbb{C}: |z|=1\}$, $G=\mathbb{Z}$, $T_n z=e^{2n\pi i\theta}z$ とする。$\theta\notin\mathbb{Q}$ならば、$\{T_n\}$ は自由かつエルゴード的である。Ω 上のルベーク測度を μ とすれば、$\mu\circ T_n=\mu$。ゆえに $L^\infty(\Omega)\times_\alpha\mathbb{Z}$は可分 Hilbert 空間 $L^2(\Omega)\otimes\ell^2(\mathbb{Z})$ 上の II_1型ファクターである。ただし $(\alpha_n f)(z)=f(T_n^{-1}z)$.

例 4.2 $\Omega=\prod_{n=1}^{\infty}\{0,1\}_n$ 上への $G=\coprod_{n=1}^{\infty}\{0,1\}_n$ の作用を各 $t\in G$ に対し $T_t(\omega_n)=(\omega_n\dot{+}t_n)$ とする。ただし、$a\dot{+}b\equiv a+b \pmod 2$。明らかに、$\{T_t\}$ は自由かつエルゴード的である。

(i) (Murray-von Neumann) 集合$\{0,1\}$上の測度 $\mu_n(\{0\})=\mu_n(\{1\})=\frac{1}{2}$ を用いて、$\mu=\bigotimes_{n=1}^{\infty}\mu_n$ とすれば、$\mu\circ T_t=\mu$ ゆえに $L^\infty(\Omega)\times_\alpha G$ はII_1型ファクターである。ただし $(\alpha_t f)(\omega)=f(T_{-t}\omega)$.

(ii) (Powers) 集合$\{0,1\}$上の測度 $\mu_n(\{0\})=\frac{1}{1+\lambda}$, $\mu_n(\{1\})=\frac{\lambda}{1+\lambda}$ $(0<\lambda<1)$ を用いて、$\mu=\bigotimes_{n=1}^{\infty}\mu_n$ とすれば、$\mu\circ T_t\neq\mu$。証明を要するが、この場合には、$L^\infty(\Omega)\times_\alpha G$ はIII_λ型ファクターになる。これを Powers ファクターといい、R_λ で表す。

(iii) (Moore, Araki-Woods) (ii)を少し変えて、$\mu_n(\{0\})=\frac{1}{1+\lambda_n}$,

$\mu_n(\{1\}) = \dfrac{\lambda_n}{1+\lambda_n}$ とおき、和集合 $\cup_{n=1}^{\infty}\{\dfrac{1}{1+\lambda_n}, \dfrac{\lambda_n}{1+\lambda_n}\}$ を区間[0,1]で稠密になるようにすれば、$L^{\infty}(\Omega)\times_{\alpha}G$ はIII_1 型ファクターになる。

(iv) $0<\lambda_i<1$ $(i=1,2)$ をみたす λ_1 と λ_2 が有理独立のときには、2つの Powers ファクターのテンソル積 $R_{\lambda_1}\bar{\otimes}R_{\lambda_2}$ がIII_1型ファクターになる。

これらの例で与えたファクターはどれも AF 的(§6 の用語で言えば、AFD)である。

4.2 離散群の群 von Neumann 環

離散群 G に対し

$$(\lambda(t)\xi)(s) = \xi(t^{-1}s), \qquad \xi \in \ell^2(G), \qquad t,s \in G$$

とおいて得られるユニタリ表現 $\{\lambda, \ell^2(G)\}$ を G の左正則表現という。このとき $\{\lambda(t): t\in G\}$ の生成する von Neumann 環を群 von Neumann 環といい、R(G) で表す。群-測度空間構成法で Ω が1点の場合には、$L^{\infty}(\Omega)\times_{\alpha}G$ と R(G) は一致する。

定義 G を離散群とする。各 $t\in G\setminus\{e\}$の共役類 $\{sts^{-1}: s\in G\}$ が無限集合になっているとき、G を無限共役類(ICC)群であるという。

命題 4.3 離散群 G に対し、次の2条件は同値である。

(i) R(G) は因子環である。

(ii) G は無限共役類群である。

例 4.3 (長田尚) $\mathbb{N}$ において、互換 $(n,n+1)$ を s_n とする。$\{s_n: n\in\mathbb{N}\}$ の生成する群を G とすれば、G は無限共役類群である。これから得られるフ

ァクター R(G) は AF 的(AFD)である。

例 4.4 (Murray-von Neumann) n個(n≥2)の生成元をもつ自由群を F_n とする。F_n は無限共役類群である。このときのファクター $R(F_n)$ は非 AF 的(非 AFD)である。

§5. AF環

5.1 有限次元C^*環の包含関係

A を有限次元C^*環、B をその部分C^*環とする。B は A の単位元 1 を共有しているものとする。B が A に含まれる様子はこれから説明する包含行列により記述されることを示す。

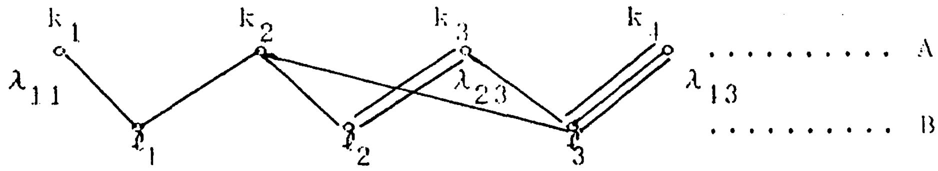
A, B の中心 Z(A), Z(B) の極小射影元全体の集合をそれぞれ $\{p_i : i=1,\dots,m\}$, $\{q_j : j=1,\dots,n\}$ とする。$\Sigma_{i=1}^m p_i = \Sigma_{j=1}^n q_j = 1$ となる。ゆえに A, B は

$$A = \sum_{i=1}^{m} Ap_i, \qquad Ap_i \simeq M_{k_i}(\mathbb{C})$$
$$B = \sum_{j=1}^{n} Bq_j, \qquad Bq_j \simeq M_{\ell_j}(\mathbb{C})$$

となる。簡単のために、A は $\Sigma^{\oplus}{}_{i=1}^{m} M_{k_i}(\mathbb{C})$ に一致しているものとすれば、包含関係 A ⊂ B は、＊多元環 $\Sigma^{\oplus}{}_{j=1}^{n} M_{\ell_j}(\mathbb{C})$ から＊多元環 B への同型写像 π を用いて、

$$\sum_{j=1}^{n}{}^{\oplus} M_{\ell_j}(\mathbb{C}) \xrightarrow{\pi} B \subset \sum_{i=1}^{m}{}^{\oplus} M_{k_i}(\mathbb{C})$$

と表される。この同型写像のさらに詳しい様子は、m 個の頂点と n 個の頂点を2行にならべ、それらを複数の辺で結んでえられる、次のような図式により表される。



(m=4, n=3 の場合)

ただし、$\lambda_{ij}(i=1,...,m;j=1,...,n)$ は $M_{k_i}(\mathbb{C})$ の中に $M_{\ell_j}(\mathbb{C})$ が現れる重複度である。つまり、$M_{\ell_j}(\mathbb{C})$ の極小射影元 f_j $(\dim f_j=1)$ の像 $\pi(f_j)$ を $M_{k_i}(\mathbb{C})$ に制限したときに得られる射影元 $p_i\pi(f_j)$ の次数である：

$$\lambda_{ij}=\dim(p_i\pi(f_j))$$

B が A に含まれている様子は、このような $m\times n$ 行列 $\Lambda=(\lambda_{ij})$ と B の各既約成分の行列の大きさを表す (ℓ_j) により定まる。そこで、以後、この行列 Λ を $B\subset A$ に対する<u>包含行列</u>という。

<u>命題</u> 5.1 A を有限次元C^*環、B_i を $1\in B_i\subset A$ $(i=1,2)$ をみたす A の部分C^*環とする。B_1, B_2 が同じ包含行列をもてば、A の自己同型写像 α で $\alpha(B_1)=B_2$ をみたすものがある。

5.2 AF 環の定義

$\{A_n:n\in\mathbb{N}\}$ を有限次元C^*環の増加列で、単位元 1 を共有するものとする：

$$1\in A_1\subset A_2\subset\ ....$$

各 A_n の＊多元環の構造は自然に和集合 $\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ に導かれ $\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ も＊多元環になる。さらに、各 A_n のノルムは自然に $\cup_{n=1}^{\infty}A_n$ のノルムに一意的に拡張されるので、これを完備化することにより、新たなC^*環を得る。

<u>定義</u>　このC^*環を AF 環という。

$\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ に対しても、§5.1で与えた包含関係の図式の上下を逆転し、順次重ね合わせて行くことにより、下の例5.1，例5.2ような図式が得られる。これを <u>Bratteli 図式</u>と呼ぶ。逆に、Bratteli 図式が与えられると、包含行列を用いて、5.2で説明したようにして、対応する AF 環の列が、同型を除き、一意的に定まる。

例 5.1（2^{∞}型 UHF環）

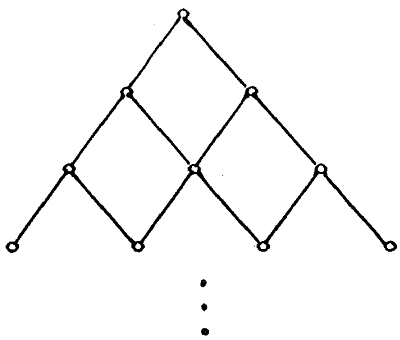
$\mathbb{C}1$

$A_1 = M_2(\mathbb{C})$

$A_2 = M_4(\mathbb{C})$

$A_3 = M_8(\mathbb{C})$

例 5.2（Current環）



$\mathbb{C}1$

$A_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

$A_2 = \mathbb{C} \oplus M_2 \oplus \mathbb{C}$

$A_3 = \mathbb{C} \oplus M_3 \oplus M_3 \oplus \mathbb{C}$

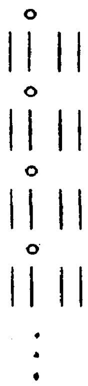
5.3　UHF 環

上の例5.1のように、頂点が縦1列に並んでいて、隣接する各頂点が複数の辺で結ばれている Bratteli 図式から得られる AF 環を <u>UHF 環</u>という。

図式に現れる辺の数をすべて掛け合せると、値は ∞ に発散するが形式的には素数の積 $2^{n_1}3^{n_2}5^{n_3}7^{n_4}\ldots$ の形に一意的に表すことができる（例5.1の場合は $n_1 = \infty$, $n_2 = n_3 = n_4 = \ldots = 0$ である）。ここに現れる列（$n_1, n_2, \ldots$）がつぎの定理で用いられる。

定理 5.2 (Glimm) UHF 環に対して、列 $(n_1, n_2, \ldots)$ は UHF 環の同型類に対する完全不変量である。

例 5.3



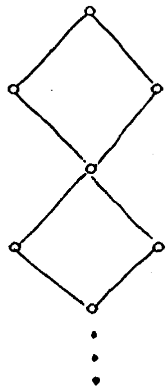
$A_0 = \mathbb{C}1$

$A_1 = M_4(\mathbb{C})$

$A_2 = M_{16}(\mathbb{C})$

$A_3 = M_{64}(\mathbb{C})$

例 5.4



$\mathbb{C}1$

$A_1 = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$

$A_2 = M_2(\mathbb{C})$

$A_3 = M_2(\mathbb{C}) \oplus M_2(\mathbb{C})$

上の定理により、例5.1、例5.3、例5.4の AF 環はともに 2^∞型の UHF 環であり、I_2型ファクター $M_2(\mathbb{C})$ の無限テンソル積 $\hat{\bigotimes}_{n=1}^{\infty}(M_2(\mathbb{C}))_n$ と同型になっている。反交換関係の表現として得られる CAR 環や Clifford 環は例5.4の形をしている。例5.2は CAR 環において(第一種)ゲージ変換に関して不動な元からなる部分C^*環である。

§6. AFD ファクター(その1)

この節および次節では Hilbert 空間が可分(可算次元)の場合だけを考えることにする。

<u>定義</u> von Neumann 環 M が、その稠密 * 部分多元環として、単位元を共有する AF 環を含むとき、M は <u>AFD</u>(approximately finite dimensional) であるという。とくに、AFD 有限ファクターを<u>超有限</u>ファクターともいう。

現在までのところ、von Neumann 環の研究において得られた結果で、興味

あるものの多くは AFD ファクターに関係している。

いま、A を 2^{∞}型 UHF 環とし、その忠実表現を $\{\pi, \mathbb{H}\}$ とする。$\pi(A)$ の弱閉包 $M=\pi(A)''$ は AFD ファクターである。このファクターは表現の選び方により、I_{∞}型、II_1型、II_{∞}型、III_0型、III_{λ}型またはIII_1型のいずれかになる(例4.2参照)。このことは、位相(表現空間)を変えることにより、C^*環の段階では存在しなかった違いが現れたことになる。AFD でない II_1型ファクターの例が例4.4で与えられている。

ファクターが AFD の場合には、次の一意性定理がわかっている。これは作用素環論中、最高峰に位置する結果である。他方、AFD でない場合には、同型でないものが連続無限個存在することがわかっている(McDaff,境)。しかし、まだ系統的な分類と言える程には、解明がすすんでいない(Connes, Haagerup)。

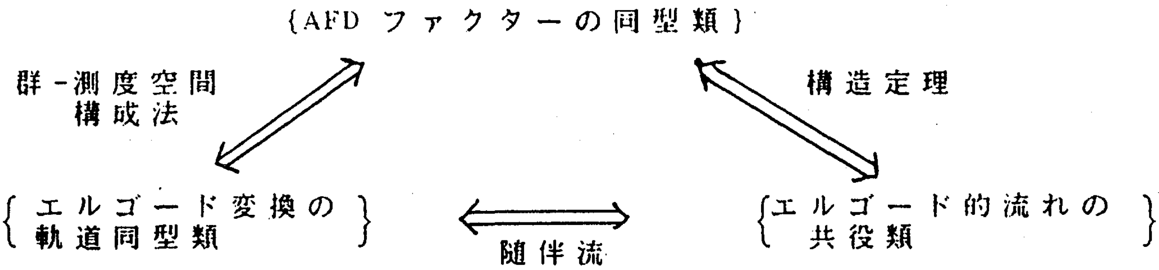
<u>定理</u> 6.1 (Murray-von Neumann, Connes, Haagerup) III_0型以外の AFD ファクターは同型を除いて一意的に定まる。

I型ファクターは自動的に AFD である。I型ファクターおよび AFD II_1型のファクターの一意性は1943年 Murray-von Neumann により示された。III型の場合の議論は1967年の富田-竹崎理論の出現を待たなければならなかった。1975年になってようやく Connes は懸案の AFD II_{∞}型ファクターの一意性の証明をし、同時に、つぎに述べる竹崎の構造定理を用いて、AFD III_{λ}型ファクターの一意性も示した。III_0型の場合は様子が違うので、改めて定理6.3の中で述べることにする。残された AFD III_1型ファクターの場合にも当然一意性が予想され、Connes はこの一意性が成立つための同等条件を沢山作った。しかし、最終的な決着は1984年に、 Haagerup により与えられた。このIII_1型ファクターの一意性が示される直前までの様子は[12]に詳しく解

説されている。

構造定理 6.2（竹崎） 真無限 von Neumann 環 M は II_∞型 von Neumann 環 N とその上で $\theta_t(x) = e^{-t}x$, $x \in N$ をみたす作用 $\{\theta_t\}$ との接合積 $N \times_\theta \mathbb{R}$ により表せる。

定理 6.3（Connes, Krieger, 浜地-岡-押川） 次の3つの同型類の間には1対1対応がある。



この定理により、AFD III_0型ファクターの同型類の分類はエルゴード的流れの共役類の分類に帰着されることがわかる。

Connes はこれらの結果を導く際に、II_1型（またはII_∞型）ファクターが AFD になるための特徴づけを与えた。これは定理6.1を導く際に使われる議論の骨格を成しているので、その一部を次に述べておく。原論文では、群が従順である（群 G 上の有界連続関数環 C(G) 上の有界正線形汎関数で G 不変なものが存在する）ために知られていた同値条件が、ものの見事に作用素環の言葉に言直されていることがわかる。以後、慣例に従って、このような AFD II_1型ファクターを R_0 で表すことにする。

定理 6.4（Connes） II_1型ファクター M に対して、次の4条件は同値である。

(i) $M \simeq R_0$

(ii) $M \simeq M\bar{\otimes}R_0$ かつ任意の $\varepsilon>0$ と M の任意の元 $x_1,\ldots,x_n$ に対して

$$\|x_j\otimes 1-u(1\otimes y_j)u^*\|_2 \leq \varepsilon \qquad (j=1,\ldots,n)$$

をみたす R_0 の元 $y_1,\ldots,y_n$ と $M\bar{\otimes}R_0$ のユニタリー元 u が存在する。

(iii) $M\bar{\otimes}M$ の自己同型写像 $\sigma(x\otimes y)=y\ x$ は $M\bar{\otimes}M$の内部自己同型写像により近似できる。

(iv) $L(H)$ から M へのノルム1射影が存在する。

この定理を使うと、例4.1のII_1型ファクターが AFD であることだけではなく、AFD II_∞型ファクターの一意性とか、AFD ファクターの部分ファクターが再び AFD に成ることなどがわかる。ついでに、この定理を導く際に、もっとも基本的な概念として用いられた、単射性について述べておく。

C^*環 A からC^*環 B への有界線形写像 ϕ が正値性を保存するとき($\phi(A_+)\subset B_+$)、写像 ϕ は <u>正値</u>であるという。さらに ϕ を

$$(x_{ij})\in M_n(A) \longmapsto (\phi(x_{ij})) \in M_n(B)$$

のように $M_n(A)$ から $M_n(B)$ への写像に拡張し、これがすべての n に対して正値であるとき、元の写像 ϕ は<u>完全正値</u>であるという。

この完全正値性は、群上の正定値関数の概念を非可換C^*環の場合へ拡張したもので、この仲間には準同型写像、ノルム1射影(条件付期待値)などが含まれている。

<u>定義</u> A をC^*環とする。任意のC^*環 B, C の完全系列 $0 \to B \to C$ に対し、B から A への完全正値写像が C から A への完全正値写像に拡張できるとき、A は<u>単射的</u>であるという。

<u>定理</u> 6.5 (羽毛田-富山, Connes) von Neumann 環 M に対し、次の3条件は同値である。

(i) M は AFD である。

(ii) M は単射的である。

(iii) L(H) から M へのノルム1射影が存在する。

一般の局所コンパクト群 G に対しても、4.2 の離散群の場合と同じように、左不変(Haar)測度を用いて $L^2(G)$ 上の左正則表現を考えることができる。この表現の生成する von Neumann 環も群 von Neumann 環といい、R(G) で表す。

系 6.6 (Connes) 可分局所コンパクト群が連結ならば、その表現の生成する von Neumann 環は単射的である。

これにより、AFD でない von Neumann 環の研究には、離散群のように、連結でない群の表現の研究が必要になってくる。

§7. AFD ファクター(その2)

この節でも Hilbert 空間に対し可分性を仮定し、AFD ファクターの部分ファクターの分類問題を考える。

命題 7.1 (Murray-von Neumann) M, M' を有限ファクター、τ, τ' をその上の(一意的に定まる)規格化された正規トレイスとする。各 $\xi \in H$, $\xi \neq 0$ に対し、H から閉部分空間 $\{x\xi : x \in M\}^-$ および $\{x'\xi : x' \in M'\}^-$ への射影作用素をそれぞれ $e(M,\xi)$, $e(M',\xi)$ とすれば、$\tau(e(M',\xi))/\tau'(e(M,\xi))$ は ξ の選び方に依らない定数である。

この値は M の代数的構造だけで決る値ではなく、M とその表現空間により決る値である。

<u>定義</u> 有限ファクター M に対し定まる定数

$$C_M = \begin{cases} \tau(e(M\ ,\xi))/\tau(e(M,\xi)) & M' : \text{有　限} \\ \infty & M' : \text{真無限} \end{cases}$$

を M の<u>結合定数</u>という。

この定数は M' と M の大きさの比を表している。例えば、$M = M_m(\mathbb{C})\otimes 1_{\mathbb{C}^n}$ の場合には、$M' = 1_{\mathbb{C}^m}\otimes M_n(\mathbb{C})$ と成るので、$C_M = n^2/m^2$ である。一般に、von Neumann 環が有限であれば、M 上には規格化された正規トレイス τ が存在する。M の作用している Hilbert 空間に可分性を仮定したので、τ として忠実なものを選ぶことができる。したがって、写像 $x,y \mapsto \tau(y^*x)$ は M 上の内積になる。これにより M を完備化して得られる Hilbert 空間を $L^2(M,\tau)$ とする。このとき

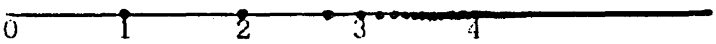
$$\lambda(x)y=xy, \qquad \rho(x)y=yx, \qquad Jy=y^*$$

と置けば、$\{\lambda,L^2(M,\tau)\}$ は M の表現であり、$\{\rho,L^2(M,\tau)\}$ は積の順序を入れかえる M の表現である。さらに、$J\lambda(M)J=\rho(M)=\lambda(M)'$ が成り立っている。したがって、M がファクターの場合、M がこのように左掛算作用素として(標準的に)表現されていれば、$\lambda(M)$ の結合定数 $C_{\lambda(M)}$ は 1 である。ゆえに、その部分ファクター $\lambda(N)$ の結合定数は1より大きい。

<u>定義</u> M, N を $1\in N\subset M$ をみたす有限ファクターとする。N を $L^2(M,\tau)$ 上の左掛算作用素として表現したとき(つまり、$\lambda(N)$)の結合定数を <u>Jones 指数</u>といい、[M:N] で表す。

<u>定理</u> 7.2 (Jones) (i) II_1型ファクター M の部分ファクター N に対し Jones 指数 [M:N] は $\{4\cos^2(\pi/n):n=3,4,...\}\cup[4,\infty]$ に属す。

(ii) M が AFD の場合には、すべての値が実現される。



注。Jones 指数の概念は、幸崎により、作用素値荷重(非有界条件付期待値)を用いて、III型ファクターの場合へも一般化され、定理7.2と同様な事柄が示されている。

有限 von Neumann 環 M とその部分 von Neumann 環 N をそれぞれ上の $\lambda(M)$, $\lambda(N)$ と同一視し、$L=J\rho(N)'J$ と置けば、包含関係 $N\subset N\subset L$ が得られる。このように、M, N から L を作る方法を(Jones の)<u>基本構成法</u>と言う。このとき、$L^2(M,\tau)$ から N の閉包への射影作用素を e とすれば、L は M と {e} により生成されている。さらに、この基本構成法を繰り返すことにより、von Neumann 環の増加列 $M_0(=N)\subset M_1(=M)\subset M_2(=L)\subset M_3\subset...$ が得られる。とくに、M, N がファクターの場合、$L^2(M_n,\tau_n)$ から M_{n-1} 閉包への射影作用素を e_n (n=1,2,...) とすれば、射影作用素の列 $\{e_n:n=1,2,...\}$ は次の(組み紐群の)関係式

$$[M:N]e_ne_me_n=e_n \quad (|n-m|=1), \qquad e_ne_m=e_me_n \quad (|n-m|\geq 2) 。$$

これは Temperley-Lieb algebra の生成元のみたす条件でもある。Jones はこれを用いて、現在 <u>Jones 多項式</u>と呼ばれている、結び目の位相的不変量を作った。また、M が有限次元の場合には、M 上のトレイス τ で、

$$\mathrm{Tr}(\lambda(x))=\tau(x),\quad [M:N]\mathrm{Tr}(\lambda(x)E)=\tau(x)\qquad (x\in M)$$

をみたす L 上のトレイス Tr へ拡張できるものを Markov トレイスと言う。このトレイスは包含行列の Perron-Frobenius ヴェクトルにより、定数倍を除き一意的に定まる。

定義 von Neumann 環 M の2つの von Neumann 部分環 N_1, N_2 に対して、M の自己同型写像 α で $\alpha(N_1)=N_2$ をみたすものが存在するとき、N_1 は N_2 に共役同型であるという。

定理 7.3 (Ocneanu) AFD II_1 型ファクターの部分ファクターで Jones 指数が4より小さいものの共役同型類は Dynkin 図形 A_n, D_{2n}型 (n=1,2,...) に対応するものが各1個、E_6, E_8型に対応するものが各2個存在し、これ以外にはない。その際、Jones 指数は Dynkin 図形に対応する隣接行列のノルムの2乗になる。

この定理の証明に使われる構造が、可解格子模型に現れるものとよく似ていて、専門家の関心を集めているので、少し補足をしておく。

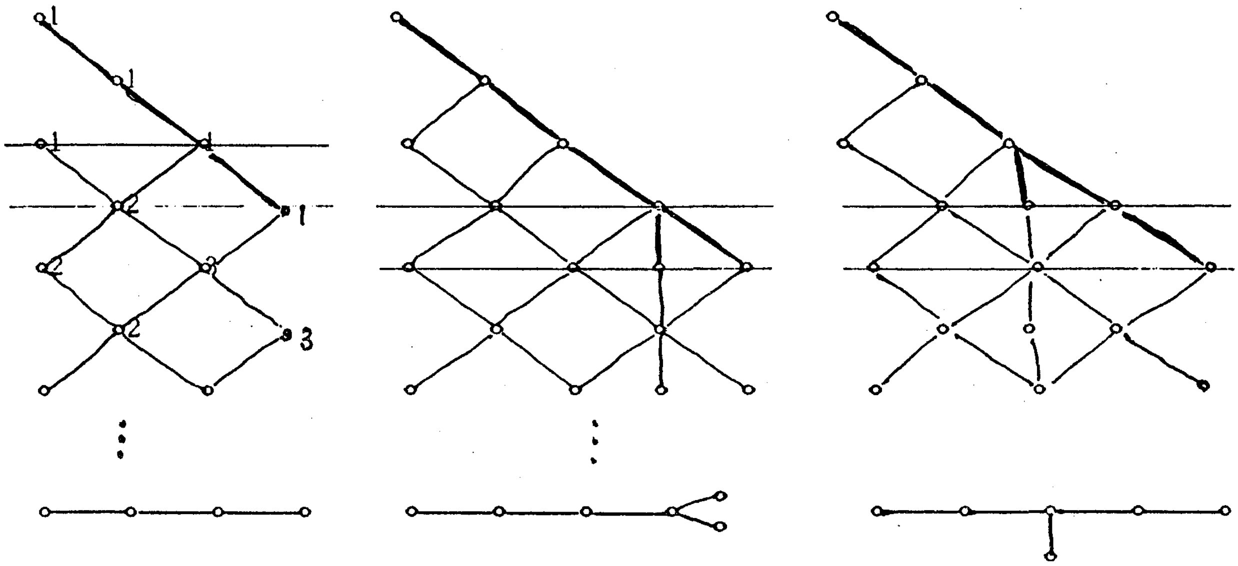
M をII_1型ファクター、N をその部分ファクターとする。基本構成法を繰り返して得られる＊多元環の増加列 $M_0(=N)\subset M_1(=M)\subset M_2\subset M_3\subset\cdots$ を用いて、相対可換子環の増加列

$$N\cap N'\subset M\cap N'\subset M_1\cap N'\subset M_2\cap N'\subset M_3\cap N'\subset\cdots.$$

を作る。Jones 指数 [M:N] が4より小さい場合には、これらの相対可換子環

は有限次元である。しかも、対応する Bratteli 図式は、ある番号からさき、ある Dynkin 図形と同じ図形の折返しが繰り返される。

例 7.1



A_4型　　D_6型　　E_6型

これらの Dynkin 図形に対応する包含行列はそれぞれ次のようになっている。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

一般に、Dynkin 図形に対応する包含行列を Λ とすれば、隣接行列は $\begin{bmatrix} 0 & \Lambda \\ {}^t\Lambda & 0 \end{bmatrix}$ と同値である。したがって、隣接行列のノルムは包含行列のノルムと一致し、その2乗が Jones 指数になっている。

逆に、Dynkin 図形から例7.1のようにして Bratteli 図式を作れば、対応する有限次元＊多元環の増加列 $B_0 \subset B_1 \subset B_2 \subset \cdots$ が得られる。各 B_k 上の Markov トレイスを $\bigvee B_n$ 上のトレイス τ へ拡張し $\bigvee B_n$ を $L^2(\bigvee B_n, \tau)$ 上の左掛算作用素として表現すれば、AFD II_1ファクター $\lambda(\bigvee B_n)''$ が得られる。つぎに、有限次元＊多元環の2重列

$$\begin{array}{ccccccccc}
A_{00} & \subset & A_{01} & \subset & A_{02} & \subset & \cdots & \longrightarrow & M_0 \\
\cap & & \cap & & \cap & & & & \cap \\
A_{10} & \subset & A_{11} & \subset & A_{12} & \subset & \cdots & \longrightarrow & M_1 \\
\cap & & \cap & & \cap & & & & \cap \\
A_{20} & \subset & A_{21} & \subset & A_{22} & \subset & \cdots & \longrightarrow & M_2 \\
\cap & & \cap & & \cap & & & & \cap \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots
\end{array}$$

を $A_{i,j} \simeq B_{i+j}$ となるように選び、各 k に対し横の増加列 $A_{k,j}$, $j \geq 0$ から上のように Markov トレイスを用いて II_1ファクター M_k を作る。Dynkin 図形が定理に述べられている場合であれば、可解格子模型で使われている Boltzmann 荷重、第一逆関係式、交叉対称性などと似た手法を活用することにより、2重列がうまく選べて、$[M_1:M_0]=\|\Lambda\|^2$ と $M_k \cap M_0' \simeq A_{k0}$, $k \geq 0$ を示すことができる(Ocneanu, Popa, 河東, 泉)。

§8. 核型C^*環

<u>定義</u> C^*環 A 上の恒等写像が、各点ごとに、階数が有限でしかもノルムが1以下の完全正値写像により $\sigma(A,A^*)$ 位相で近似できるとき、C^*環 A を<u>核型</u>という。

この定義で、完全正値写像をノルム1射影に代え、$\sigma(A,A^*)$ 位相近似をノルム近似にすると AF 環が得られるので、AF 環は核型である。

<u>命題</u> 8.1 (Lance, Effros-Choi) C^*環 A に対し、次の3条件は同値である。

(i) A は核型である

(ii) 任意のC*環 B に対し、$A\hat{\otimes}_{max}B = A\hat{\otimes}_{min}B$

(iii) A'' は単射的である

この命題により核型C*環とのテンソル積に対しては、クロスC*ノルムが一意的に定まることがわかる。単位元をもつC*環 A に対し、$\mathrm{Proj}(A\otimes\mathcal{K})$ の連結成分(Murray-von Neumann の同値関係による同値類)は可換半群になる。ただし、$\mathcal{K}$ は可分 Hilbert 空間上のコンパクト作用素の全体である。この半群の生成する可換群を A のK_0群といい、$K_0(A)$ で表す。A のユニタリ元全体 U(A) を単位元の連結成分で割って得られる商群(剰余群)も可換群になる。これを A のK_1群といい、$K_1(A)$ で表す。AF 環に対するK_0群は次元群であり、K_1群は {0} であることがわかっている。この事実を用いると、AF 環でない核型C*環の存在がわかる。

例 8.1 非可換トーラス(無理数回転C*環)

θ を(0,1)の無理数とする。交換関係 $vu=e^{2\pi i\theta}uv$ をみたす２つのユニタリ作用素 u, v の生成するC*環を非可換トーラスといい、A_θ で表す。これは AF でない核型C*環である。この C*環のもつ性質を少し挙げておく。

(i) A_θ は単純である。したがって、A_θ は生成元の選び方に依らず同型になる。

(ii) A_θ 上には忠実な規格化トレイス τ が一意的に存在し

$$\tau(\Sigma_{m,n\in\mathbf{Z}}\alpha_{mn}u^mv^n)=\alpha_{00}$$

(iii) $A_\theta \simeq A_{\theta'} \iff \theta=\theta'$ または $\theta=1-\theta'$

(iv) $A_\theta\otimes\mathcal{K} \simeq A_{\theta'}\otimes\mathcal{K}$ (A_θ と $A_{\theta'}$ は安定同型であるという)

$\iff \theta'=g\theta$ となる $g\in SL(2,\mathbf{Z})$ が存在する。ただし $g=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ のとき $g\theta=\dfrac{a\theta+b}{c\theta+d}$

(v) $K_0(A_\theta) = \mathbb{Z}[1] \oplus \mathbb{Z}[p] \simeq \mathbb{Z}^2$ 　　(p:Rieffel 射影)

$K_1(A_\theta) = \mathbb{Z}[u] \oplus \mathbb{Z}[v] \simeq \mathbb{Z}^2$

(vi) $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上で

$$(u\xi)(n)=\xi(n-1), \qquad (v\xi)(n)=e^{2\pi i\theta}\xi(n)$$

とすれば、$vu=e^{2\pi i\theta}uv$。ここで

$$H=(u+u^*-2)+\lambda(v+v^*) \qquad (\lambda>0)$$

とする。右辺の第1項をラプラシアンの差分化、第2項をポテンシャルと見なすことにより、H は概周期的ハミルトニアンに成る。

(vii) A_θ は例4.1の AFD II_1ファクターの稠密な＊部分多元環として埋蔵できる。

例 8.2 GCR 環

A を C^*環 とする。A の既約表現(A からある Hilbert 空間上の L(H) への準同型写像で、その像が L(H) で弱稠密なもの)がどれもコンパクト作用素のなすC^*環 $\mathcal{K}$(H) に含まれるとき、A は <u>CCR</u> であるという。A の商C^*環で、{0} と異るものがどれも {0} 以外の CCR 閉両側イデアルを含むとき、A を <u>GCR</u> (または、I型)であるという。さらに、A が {0} と異なる GCR 閉両側イデアルを含んでいないときには、A は <u>NGCR</u> であるという。UHF 環、非可換トーラス、つぎの Cuntz 環などは NGCR 環である。数理物理のモデルに現れるC^*環はほとんど NGCR 環である。

<u>定理</u> 8.2 (Glimm, 境) C^*環 A に対し、次の2条件は同値である。

(i) A は GCR である。

(ii) A の表現の生成する von Neumann 環はどれもI型である。

例 8.3 Cuntz 環

$n\in\mathbb{N}$, $n\ \ 2$ とする。$v_1,\ldots,v_n$ を $v_1v_1^*+\ldots+v_nv_n^*=1$ をみたす等長作用素とする。これら n 個の作用素の生成するC^*環を Cuntz 環といい、O_n で表す。これは AF でも GCR でもない核型C^*環である。

(i) O_n は単純である。

(ii) $\alpha_t(v_j)=e^{it}v_j$ $(j=1,\ldots,n)$ により含まれる O_n 上の1径数自己同型群 $\{\alpha_t\}$ の不動点環 $(O_n)^{\alpha}$ はn^{∞}型 UHF 環である。

(iii) $O_n\cong O_m \Longleftrightarrow n=m$

(iv) $K_0(O_n)\cong\mathbb{Z}/(n-1)\mathbb{Z}$, $\qquad K_1(O_n)=\{0\}$

群 von Neumann 環と同じようにして、群C^*環を定義することができる。複素ベクトル空間 $\ell^1(G)$ はたたみ込みによる積および対合 $f^*(t)=f(t^{-1})^-$ により Banach* 環になる。これをノルム $\|f\|=\sup_{\pi}\|\pi(f)\|$ により完備化して得られるC^*環を<u>群C^*環</u>といい、$C^*(G)$ で表す。ただし、π は Banach* 環 $\ell^1(G)$ の表現である。つぎに、G の左正則表現 $\{\lambda,\ell^2(G)\}$ を用いて、$\pi_\lambda(f)=\int_G f(t)\lambda(t)dt$ とする。π_λ は Banach* 環 $\ell^1(G)$ の表現になる。この表現 π_λ の生成する(Hilbert 空間 $\ell^2(G)$ 上の)C^*環を<u>被約群C^*環</u>といい、$C^*_{red}(G)$ で表す。

<u>定理</u> 8.3 離散群 G に対し次の3条件は同値である。

(i) G は従順である。

(ii) $C^*(G)=C^*_{red}(G)$

(iii) $C^*(G)$ は核型である。

G が連続群の場合には、古典 Lie 群の既約表現に補系列が存在することなどからもわかるように、群C^*環が核型であっても、G が従順でないような例がある。

つぎに、核型でないC^*環の代表例を幾つかあげる。

例 8.4 n個($n \geq 2$)の元から生成される自由群 F_n の群C^*環 $C^*(F_n)$ および被約群C^*環 $C^*_{red}(F_n)$ は核型ではない。しかし

$$K_0(C^*(F_n)) \simeq K_0(C^*_{red}(F_n)) \simeq \mathbb{Z}$$
$$K_1(C^*(F_n)) \simeq K_1(C^*_{red}(F_n)) \simeq \mathbb{Z}^n$$

例 8.5 $\mathbb{H}$ を可分ヒルベルト空間とする。$L(\mathbb{H})$ の商C^*環 $L(\mathbb{H})/\mathcal{K}(\mathbb{H})$ を Calkin 環という。これは核型でないことがわかっている。

最後に、作用素環の教科書を挙げておく。

一般的入門書

[1] 梅垣、大矢、日合：作用素代数入門、共立出版、1985.

[2] Dixmier,J.:Von Neumann algebras, North-Holland, 1981.

[3] Dixmier,J.:C^*-algebras, North-Holland, 1982.

[4] Sakai,S.:C^*-algebras and W^*-algebras, Springer-Verlarg. 1971.

[5] Stratila,S. and Zsido,L.:Lectures on von Neumann algebras, Abacus Press, 1975.

[6] Takesaki,M.:Theory of operator algebras I, Springer-Verlag, 1979.

[7] Pedersen,G.:C^*-algebras and W^*-algebras, Academic Press, 1979.

[8] Kadison,R. and Ringrose,J.:Fundamentals of the theory of operator algebras, Vol.1, Vol.2, Academic Press, 1983, 1986.

[9] Sunder,V.:An invitation to von Neumann algebras,

Springer-Verlag, 1987.

[10] Murphy,G.:C^*-algebras and operator theory, Academic Press, 1990.

数理物理関係

[11] Bratteli,O.and Robinson,D.:Operator algebras and quantum statistical mechanics I (and II), Springer-Verlag, 1979, 1981.

冨田-竹崎理論(非可換積分論)関係

[12] 竹崎正道：作用素環の構造、岩波書店、1983.

[13] Stratila,S.:Modular theory in operator algebras, Abacus Press, 1981.

[14] 伊藤、浜地：エルゴード理論と作用素環（仮題）、紀伊國屋、近刊。

K理論と非可換微分幾何関係

[15] Klackadar,B.:K-theory for operator algebras, Springer-Verlag, 1986.

[16] Connes,A.:Geometrie non commutative, InterEdition, 1990.

非可換力学系関係

[17] Tomiyama,J.:Invitation to C^*-algebras and topological dynamics, World Sci.Publ.Co., 1987.

Jonesの指数理論関係

[18] Goodman,F., de la Harpe,P. and Jones,V.:Coxeter graphs and towers of algebras, Springer-Verlag, 1989.