2018 · 10 · 14

② §1 1 dim Schrödinger equations

$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\varphi = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta\varphi + V\varphi \qquad d=1 \qquad L^2(\mathbb{R}^2)$

$\varphi(t,x) = f(t)\psi(x)$

$i\hbar f'\varphi = -\frac{\hbar^2}{2}\psi'' f + V\psi f \qquad (f \neq 0)$

$i\hbar \frac{f'}{f} = E = \frac{-\frac{\hbar^2}{2}\psi'' + V\psi}{\psi}$

① $f' = \frac{E}{i\hbar} f \quad \therefore f = e^{-iE/\hbar\, t}$

② $V = 0$ とおく

$\frac{\hbar^2}{2}\varphi'' + E\varphi = 0$

$\therefore \varphi'' + \frac{2E}{\hbar^2}\varphi = 0$

(注) $E<0$

$-\varphi'' = \frac{2E}{\hbar^2}\varphi$

$0 \le (\varphi, -\varphi'') = \frac{2E}{\hbar^2}\|\varphi\|^2$

× $E<0$ のとき $y'' - a^2 y = 0 \quad y = c_1 e^{-ax} + c_2 e^{ax}$ ……NG

× $E>0$ のとき $k = \sqrt{2E} > 0$ とおく

$\varphi'' + \left(\frac{k}{\hbar}\right)^2 \varphi = 0 \quad \therefore \varphi = \alpha_+ e^{ikx/\hbar} + \alpha_- e^{-ikx/\hbar}$

$$(2\pi)^{-1/2}\int f(x)\, e^{-ikx}\, dx = \hat{f}(k) \qquad f \in \mathcal{S}$$

$$(2\pi)^{-1/2}\int \hat{f}(k)\, e^{ikx}\, dk = f(x)$$

$$(2\pi\hbar)^{-1/2}\int f(x)\, e^{-ikx/\hbar}\, dx = \hat{f}_\hbar(k) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\hat{f}(k/\hbar)$$

$$(2\pi\hbar)^{-1/2}\int \hat{f}_\hbar(k)\, e^{+ikx/\hbar}\, dk$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\cdot\frac{1}{\hbar}\int \hat{f}(k/\hbar)\, e^{+ikx/\hbar}\, dk \qquad \frac{k}{\hbar} = u, \quad dk = \hbar\, du$$

$$= (2\pi)^{-1/2}\int \hat{f}(u)\, e^{+iux}\, du = f(x) \qquad //$$

$$(2\pi\hbar)^{-1/2}\int f(x)\, e^{-ikx/\hbar}\, dx$$ 文字のつけたし

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\, e^{\pm ikx/\hbar} = \varphi_\pm(k;x)$$ と表すことにする

$\varphi_\pm(k;x)\, e^{-iEt/\hbar}$ が $V=0$ のときの解.

k がパラメーター.

$\psi_0(x)$ 初期状態 とする

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx/\hbar}\, e^{-iEt/\hbar}\, \hat{\psi}_0(k)\, dx$$

$$= \sum_{\sigma} \int_0^{\infty} \varphi_\sigma(k,x)\, e^{-iEt/\hbar}\, \hat{\psi}_0(\sigma k)$$

なぜ $\hat{\psi}_0(k)$ か？　　$t=0$ にすると わかる．

正当化するためには $\psi_0 \in \mathcal{S}$ と思えばいい．
なるに $\psi_0 \in C_0^\infty$ ．

(注)　$E = k^2/2$

$t \to \pm\infty$ の挙動 知りたい．

$$\psi(t,x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx/\hbar}\, e^{-ik^2t/2\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky/\hbar}\, \psi_0(y)\, dy\, dk$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \psi_0(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)k/\hbar}\, e^{-ik^2t/2\hbar}\, dk\, \frac{1}{2\pi\hbar}$$

……

形式的な話　(Fubini は使えない)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos t^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} \sin t^2 dt = \sqrt{\pi/2}$$

Fresnel 積分

$$\lim_R \int_{-R}^{R} e^{-ix^2/2} dx = \int \cos \frac{x^2}{2} - i \int \sin \frac{x^2}{2} = \sqrt{-2\pi i}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos t^2/2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{2} \cos u^2 du = \sqrt{\pi}$$

$$\therefore = \sqrt{\pi} - i\sqrt{\pi} = \sqrt{\pi}(1-i)$$

$$= \sqrt{\pi}\sqrt{2}\boxed{e^{-\frac{\pi}{4}i}} = \sqrt{-i}$$

$$= \sqrt{2\pi}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \psi_0(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)k/\hbar}\, e^{-i\hbar^2 t/2\hbar}\, dk\, \frac{1}{2\pi\hbar}$$

exp は $\frac{k^2 t}{2\hbar} - (x-y)\frac{k}{\hbar} = \frac{t}{2\hbar}\left[k^2 - 2\frac{(x-y)}{t}k \right]$

$$= \frac{t}{2\hbar}\left\{ \left(k - \frac{(x-y)}{t}\right)^2 - \frac{(x-y)^2}{t^2} \right\}$$

$$= \frac{t}{2\hbar}\left(k - \frac{x-y}{t}\right)^2 - \frac{(x-y)^2}{2\hbar t}$$

$\sqrt{\frac{t}{\hbar}}\,\xi = \eta$

$$\int e^{-\frac{i}{2}\frac{t}{\hbar}\xi^2} d\xi = \int e^{-\frac{i}{2}\eta^2} \sqrt{\frac{\hbar}{t}}\, d\eta = \sqrt{-2\pi i}\,\sqrt{\frac{\hbar}{t}}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} dy\, \psi_0(y) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)k/\hbar}\, e^{-i\hbar k^2 t/2m}\, dk\, \frac{1}{2\pi\hbar}$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{-2\pi i} \sqrt{\frac{m}{t}} \int dy\, \psi_0(y)\, e^{+i\frac{m(x-y)^2}{2\hbar t}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi i \hbar t}} \int dy\, \psi_0(y)\, e^{i\frac{(x-y)^2}{2\hbar t}}$$

$$= \int dy\, \psi_0(y)\, G_t(x-y), \quad \text{where } G_t(x) = \frac{e^{i\frac{x^2}{2\hbar t}}}{\sqrt{2\pi i \hbar t}}$$

形式的には $i\hbar \cdot \frac{\partial}{\partial t}\varphi = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi$

$\therefore \frac{\partial}{\partial t}\varphi = -\frac{\hbar}{2mi}\Delta\varphi \quad \therefore \varphi = e^{i\frac{\hbar}{2m}t\Delta}\varphi_0$

$\boxed{e^{i\hbar t\frac{1}{2m}\Delta}\varphi_0}$ $\quad i\hbar \to +1$ におきかえると

$$e^{+t\frac{1}{2m}\Delta}\varphi_0 = (2\pi t)^{-\frac{1}{2}} \int e^{\frac{m|x-y|^2}{2t}}\, \varphi_0(y)\, dy$$

$t \to i\hbar$ とおきかえる

$$(2\pi i\hbar t)^{-\frac{1}{2}} \int e^{\frac{m(x-y)^2}{2i\hbar t}}\, \varphi_0(y)\, dy$$

$G_t(x)$ と一致する.

$$\psi(t,x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(x-y)^2/2\hbar t}\, \psi_0(y)\,dy$$

$$e^{\frac{i(x^2-2xy+y^2)}{2\hbar t}} = e^{ix^2/2\hbar t}\, e^{-ixy/\hbar t}\, e^{iy^2/2\hbar t}$$

$$= \frac{e^{ix^2/2\hbar t}}{\sqrt{2\pi i\hbar t}} \int e^{-ixy/\hbar t}\, e^{iy^2/2\hbar t}\, \psi_0(y)\,dy$$

$t \to \infty$ のとき？

($e^{iy^2/2\hbar t}\psi_0(y) \to \psi_0(y)$ は一様収束する……)

($\psi_0 \in C_0^\infty$ のとき)

($e^{iy^2/2\hbar t}\psi_0(y) \longrightarrow \psi_0(y)$ in L^2)

($\psi \in L^2$ のとき)

形式的には

$t \to \pm\infty$

$$\psi(t,x) \sim \frac{e^{ix^2/2\hbar t}}{\sqrt{2\pi i\hbar t}} \int e^{ixy/2\hbar t}\, \psi_0(y)\,dy$$

$\psi \in C_0^\infty$ なら一様収束.

実際、

$$t \to \pm\infty$$

$$\psi(t,x) \sim \frac{e^{ix^2/2\hbar t}}{\sqrt{2\pi i\hbar t}} \int e^{ixy/2\hbar t}\, \psi_0(y)\, dy$$

$$\left| \frac{e^{ix^2/2\hbar t}}{\sqrt{2\pi i\hbar t}} \int e^{ixy/\hbar t} \left(e^{iy^2/2\hbar t} - 1 \right) \psi_0(y)\, dy \right|$$

$$\leq \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int \left| \left(e^{iy^2/2t\hbar} - 1 \right) \right| \left| \psi_0(y) \right| dy$$

$$\left| \int_0^{\frac{y^2}{2t\hbar}} e^{i\theta} \right| \leq \frac{y^2}{2t\hbar} \leq \frac{K}{2t\hbar} < \varepsilon \quad \text{一様}$$

$$K = \sup_{y \in \operatorname{supp} \varphi_0} y^2$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{\sqrt{2\pi t}} \int |\psi_0(y)|\, dy \quad //$$

$$\text{又} \quad \frac{e^{ix^2/2\hbar t}}{\sqrt{2\pi i\hbar t}} \int e^{ixy/\hbar t}\, \psi_0(y)\, dy$$

$$= \frac{e^{ix^2/2\hbar t}}{\sqrt{it}\sqrt{2\pi\hbar}} \int e^{i\cdot\frac{x}{t}\cdot y/\hbar}\, \psi_0(y) = \frac{e^{ix^2/2\hbar t}}{\sqrt{it}}\, \hat{\psi}_0\left(\frac{x}{t}\right)$$

$$\therefore \quad |\psi(t,x)|^2 = \frac{1}{|t|} \left| \hat{\psi}_0\left(\frac{x}{t}\right) \right| \quad \text{になる}$$

③

第1問

$V=0$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\varphi = -\frac{\hbar^2}{2}\Delta\varphi \quad \rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} &i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\varphi = E\varphi \\ &-\frac{\hbar^2}{2}\Delta\varphi = E\varphi \qquad E>0 \end{aligned}}$$

$$\varphi(t;x) = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(x,y)\,\varphi_0(y)\,dy$$

$k = \sqrt{2E}$

$$G_t(X) = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iXk/\hbar}\, e^{-ik^2t/2\hbar}\, dk$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi i\hbar t}}\, e^{ix^2/2\hbar t} \quad \leftarrow \text{こっちが一般.}$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, e^{-\frac{|x|^2}{2t}}$ $\quad t \to i\hbar t$ におきかえたもの.

分裂は $V \neq 0$ のとき.

2018 · 10 · 22

③ $e^{ikx/\hbar} \rightarrow \boxed{V} \rightarrow t e^{ikx/\hbar}$

$V \neq 0$ のとき　$\mathrm{supp}\, V \subset [-R, R]$ とする

$$-\frac{\hbar^2}{2}\varphi'' + V\varphi = E\varphi \qquad (E \geq 0)$$

(i) $|x| > R$ のとき

$$-\frac{\hbar^2}{2}\varphi'' = E\varphi \Longrightarrow \varphi(x) = a e^{ikx/\hbar} + b e^{-ikx/\hbar}$$

特に $b = 0$ にとっておく　$\varphi_+(x) = \varphi_+(k;x)$　$(x > R)$

$\varphi_+(x) = \alpha e^{ikx/\hbar} + \beta e^{-ikx/\hbar}$　$(x \leq -R)$

$W(f,g) = f'g - fg'$　wronskian

φ_+ と $\varphi_- = \overline{\varphi_+}$ も同様.

$-\frac{\hbar}{2}f'' = Ef$ のとき　Wronskian = 定数

$-\frac{\hbar}{2}g'' = Eg$ のとき　∴

☺ $(f'g - fg')' = f''g + f'g' - f'g' - fg''$

$= f''g - fg'' = Efg - Efg = 0$ //

$$W(\varphi_+, \bar{\varphi}_+) =$$

$$\varphi_+'\bar{\varphi}_+ - \varphi_+\bar{\varphi}_+' = \frac{ik}{\hbar} + \frac{ik}{\hbar} = 2ik/\hbar \qquad x \geq R$$

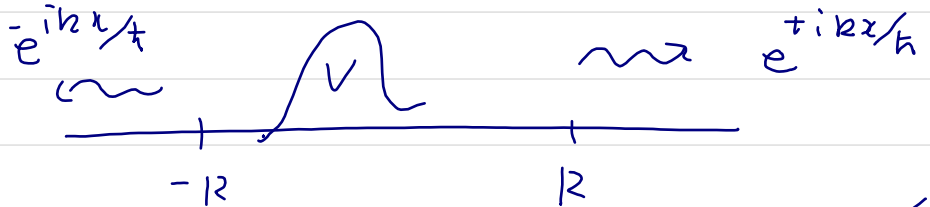
$$(|\alpha|^2 - |\beta|^2)(2ik/\hbar) \qquad x \leq -R$$

$\therefore$ $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$ $\quad\therefore$ $|\alpha|^2 = 1 + |\beta|^2 \neq 0$

$$\psi_t(k;x) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}\, e^{ikx/\hbar} & x \geq R \\ e^{ikx/\hbar} + \frac{\beta}{\alpha}\, e^{-ikx/\hbar} & x \leq -R \end{cases}$$

($\frac{1}{\alpha}$: t_+, $\frac{\beta}{\alpha}$: r_+)

$$|t_+|^2 + |r_+|^2 = \frac{1}{|\alpha|^2} + \frac{|\beta|^2}{|\alpha|^2} = \frac{1 + |\beta|^2}{|\alpha|^2} = 1$$



t_+ だけ 透過 →

← r_+ 反射

$$\psi_t(k;x) = \begin{cases} t_+\, e^{ikx/\hbar} & \\ e^{ikx/\hbar} + r_+\, e^{-ikx/\hbar} & \end{cases}$$

上のように解釈できる

同様

$$\psi_-(k,x) = \begin{cases} e^{ikx/\hbar} + r_- e^{+ikx/\hbar} & x \geq R \\ t_- e^{ikx/\hbar} & x \leq -R \end{cases}$$

という解も つくることができる

$\psi_\pm(k,x)$ は Schrödinger eq の同次だから

Wronskian を考えると

$$W(\psi_+, \bar{\psi}_-) = \begin{cases} \frac{2ik}{\hbar} t_+ \bar{r}_- \\ \frac{-2ik}{\hbar} r_+ \bar{t}_- \end{cases}$$

$$\therefore \quad t_+ \bar{r}_- = -r_+ \bar{t}_- \quad \therefore \quad t_+ \bar{r}_- + \bar{t}_- r_+ = 0$$

$$S = \begin{pmatrix} t_+ & r_- \\ r_+ & t_- \end{pmatrix}$$ は unitary 行列になっていて scattering matrix という

ちなみに $\begin{pmatrix} t_+ \\ r_+ \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} r_- \\ t_- \end{pmatrix} = \bar{t}_+ r_- + \bar{r}_+ t_- = 0$

$a<0$

$V(x) = a\,\mathbb{1}_{|x|\le 1}$ について考える potential well

$|x|>1$ $\quad \varphi(x) = \alpha e^{ikx/\hbar} + \beta e^{-ikx/\hbar}$

① $k \in \mathbb{R}$ だと L^2 にならない

② $E<0$ のみを考える $\quad -\Delta + a\mathbb{1} \le 0$

そうすると

$\varphi(x) = \alpha e^{-kx/\hbar} + \beta e^{+kx/\hbar}$

$x>1$ または $x<-1$ では

$$\begin{cases} x>1 \Rightarrow \alpha e^{-kx/\hbar} \\ x<-1 \Rightarrow \beta e^{kx/\hbar} \end{cases}$$

となるざるを得ない

$k>0$ $\quad \alpha, \beta \in \varphi$

$k = \sqrt{-2E}$

$|x|<1$ のときは

$-\frac{\hbar}{2}\varphi'' + a\varphi = E\varphi \quad \therefore -\frac{\hbar}{2}\varphi'' = (E-a)\varphi$

$\therefore \alpha e^{-\sqrt{-2(E-a)}\,x/\hbar} + \beta e^{+\sqrt{-2(E-a)}\,x/\hbar}$

まとめ $E>0$ 散乱理論 $\notin L^2(\mathbb{R})$

$E<0$ 固有関数 $\in L^2(\mathbb{R})$

§2 L^2-space

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) = \{ f : \text{meas.} \mid \int |f(x)|^2 dx < \infty \}$

$f \sim g \iff N = \{ x \mid f(x) \neq g(x) \}$, $\lambda(N) = 0$.

$\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^d) / \sim \; = L^2(\mathbb{R}^d)$ $\quad L^2(\mathbb{R}^d) \ni [f] = f$ と書く.

$(f, g)_{L^2} = \int \overline{f(x)} g(x) dx$ 代表元のとり方によらない

$\therefore (f', g') = \int \overline{f'} g'$ $\quad f'g' = fg$ on $\mathbb{R} \setminus (N_1 \cup N_2)$

$(f, g) = \int fg$ $\quad \sim N$

$\therefore \int fg = \int_{\mathbb{R} \setminus N} fg = \int_{\mathbb{R} \setminus N} f'g' = \int_{\mathbb{R}} \overline{f'} g'$

(1) (f, g) linear in f
(2) $\overline{(fg)} = (gf)$
(3) $(ff) \geq 0$ $\quad (ff) = 0 \iff f = 0$.

} 内積空間

$\|f\| = \sqrt{(ff)}$ $\quad (L^2(\mathbb{R}^d), (,))$ Hilbert space になる

i.e. $\{f_n\}$ Cauchy列 $\iff$ 収束列

§3 自己共役作用素

$(\mathcal{H}, (,))$ Hilbert space　　$A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$

$A : D(A) \to \mathcal{H}$

Def 3.1 (Adjoint)

$$D(A^*) = \{ f \in \mathcal{H} \mid \exists g \text{ s.t. } (Ah, f) = (h, g) \ \forall h \in D(A) \}$$

$A^* f = g$

気持ち悪い、けど カマンして下さい

Def 3.2 (sym　self-adjoint)

$A \subset A^*$　　sym

$A = A^*$　　self-adjoint

$A \subset B \Rightarrow A^* \supset B^*$

もし B sym ならば　$A^* \supset B^* \supset B \supset A$

もし B s.a. ならば　$A^* \supset B^* = B \supset A$

つまり s.a. な拡大は A^* の制限になっている.

→ von Neumann のこまかい理論あり

一般に s.a. 拡大 非可算無限コ存在している

例 $-\Delta$ $D(-\Delta) = C_0^\infty$ とすると $d=1$

$(-\Delta f, g) = (f, -\Delta g)$ symmetric

$\int \overline{\partial^2 f}\, g = -\int \overline{\partial f}\, \partial g = \int \overline{f}\, \partial^2 g$ //

Thm 3.3 A sym とする

A s.a $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Ran}(A - \overset{\exists}{z_\pm}) = \mathcal{H}$ $z_\pm \in \mathbb{C}_\pm$ open set

注 実は $z_\pm$ で $\mathrm{Ran}(A - z_\pm) = \mathcal{H} \Rightarrow \mathrm{Ran}(A - \overset{\forall}{w_\pm}) = \mathcal{H}$ $\forall w_\pm \in \mathbb{C}_\pm$

例 f : Real-valued 関数

$M_f \varphi = f\varphi$ と決めて

$D(M_f) = \{\varphi \in L^2 \mid f\varphi \in L^2\}$

$(M_f \varphi, \psi) = \int \overline{f\varphi}\, \psi) = \int \varphi\, f\psi = (\varphi, M_f \psi)$ $\therefore$ sym

$\psi = (f \pm i)^{-1}\varphi \in L^2$ $\forall \varphi \in L^2$

$\therefore (f \pm i)\psi = \varphi \in L^2$ //

$M_f \to f$ と表す.

2018 · 11 · 05

④ ここから〜

$-\Delta$ もっと一般に $P(-i\partial)$ について　　P は $\mathbb{R}$-値関数
$i\partial = (-i\partial_1, \dots, -i\partial_d)$

○ $F : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$ surjective isometry.
$\mathcal{S} \subset L^2$, $\mathcal{S} \subset L^2$ dense

一意的に F を $L^2 \to L^2$ に拡張できる.

○ $F\, -i\partial_j f = k_j F f \quad f \in \mathcal{S}$

$\therefore \underbrace{F\, -i\partial_j F^{-1}}_{T} = k_j$ on $\mathcal{S}$

Def 3.4

$$\begin{cases} D(T) = \{\varphi \in L^2 \mid F\varphi \in D(M_{k_j})\} \\ T\varphi = F^{-1} k_j F \varphi \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} L^2 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\exists"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & L^2 \arrow[d, "\exists"] \\ L^2 \arrow[r, "f(-i\partial)"'] & L^2 \end{tikzcd}$$

$f(-i\partial)$ の def

Def 3.4'
最っと一般に
P $\mathbb{R}$-値関数として

$$\begin{cases} D(P(-i\partial)) = \{\varphi \in L^2 \mid F\varphi \in D(M_P)\} \\ P(-i\partial) = F^{-1} P(k) F \varphi \end{cases}$$

例 $-\Delta$　　$D(-\Delta) = \{\varphi \in L^2 \mid F\varphi \in D(M_{|k|^2})\}$
$-\Delta\varphi = F^{-1} |k|^2 F \varphi.$

例1　$-\Delta$ は $D(-\Delta)=\{\varphi\in L^2 \mid F\varphi\in D(M_{|k|^2})\}$ で定義
つまり $=H^2(\mathbb{R}^d)$ で定義される

① $-\Delta = F^{-1}|k|^2 F$ なので

$\varphi\in L^2$ であれば $F^{-1}(|k|^2\pm i)^{-1}F\varphi=\psi$ とすれば
$(-\Delta\pm i)\psi = F^{-1}(|k|^2\mp i)F\ F^{-1}(|k|^2\pm i)^{-1}F\varphi=\varphi$ となる

例1　$e^{t\Delta}=F^{-1}e^{-t|k|^2}F$　← これは def です

実際に $(f, e^{\frac{t}{2}\Delta}g)=(f, F^{-1}e^{-\frac{t}{2}|k|^2}Fg)=(\hat{f}, e^{-t|k|^2}\hat{g})$

$=\int \bar{\hat{f}}\, e^{-t|k|^2}\hat{g} = \int \bar{f}(x)\, e^{ikx}\, e^{-\frac{t}{2}|k|^2}\, g(y)\, e^{-iky}\,dx\,dy\,dk$

$=\int \bar{f}(x)\,g(y)\, e^{-i(y-x)k}\, e^{-\frac{t}{2}|k|^2}\,(2\pi)^{-d}$　　$\sqrt{t}\,k=u$, $dk=t^{-\frac{d}{2}}$

$=\int \bar{f}(x)\,g(y)\, e^{-i(y-x)\frac{u}{\sqrt{t}}}\, e^{-\frac{1}{2}|u|^2}\, t^{-\frac{d}{2}}\,du\,(2\pi)^{-d}$

$=\int \bar{f}(x)\,g(y)\,(2\pi t)^{-\frac{d}{2}}\exp\left(\frac{|x-y|^2}{2t}\right)dx\,dy$

熱核.

× $ih\frac{\partial}{\partial t}\varphi=-\frac{h^2}{2}\Delta\varphi$　$\therefore i\frac{\partial}{\partial t}\varphi=-\frac{h}{2}\Delta\varphi$

$\therefore e^{+ih\frac{t}{2}\Delta}\varphi_0$　　$t\to ih$

$t\to iht$

$H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ の resolvent の積分核 $\quad \mathrm{Im}\sqrt{z} > 0$

$$\int k(x,y) f(y)\,dy$$

$$(H_0 - z)^{-1} = F^{-1}\left(\frac{1}{2}|k|^2 - z\right)F$$

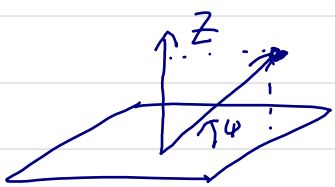
$$\therefore \left[(H_0 - z)^{-1} f\right](x) = \left(F^{-1}\left(\frac{1}{2}|k|^2 - z\right)^{-1} Ff\right)(x)$$

$$(2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int F^{-1}\left(\frac{1}{2}|k|^2 - z\right)^{-1} e^{-iky} f(y)\,dy$$

$$= (2\pi)^{-d} \int e^{ikx}\left(\frac{1}{2}|k|^2 - z\right)^{-1} e^{-iky} f(y)\,dy\,dk$$

$$= \int dy\, f(y)\left[(2\pi)^{-d}\int dk\, e^{i(x-y)k}\frac{1}{\frac{1}{2}|k|^2 - z}\right]$$

形式的にはこれが積分核になる.



($d=3$ のとき)

$$\int \frac{e^{ixk}}{\frac{1}{2}|k|^2 - z}\,dk = \int \frac{e^{iak_3}\,dk}{\frac{1}{2}|k|^2 - z}$$

$$\parallel$$

$f(x) \quad f(x) = f(Rx) \quad \therefore f(x) = g(|x|) \qquad x = (0, 0, a)$

$k_3 = r\sin\varphi \qquad k_1 = r\cos\varphi\cos\theta \qquad k_2 = r\cos\varphi\sin\theta$

$$= \int_0^\infty dr\, \frac{e^{iar\sin\varphi}\, r^2\cos\varphi}{\frac{1}{2}r^2 - z} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi\int_{-1}^{1} dt \int_0^\infty dr \times \frac{e^{iart}\, r^2}{\frac{1}{2}r^2 - z}$$

$\sin\varphi = t$

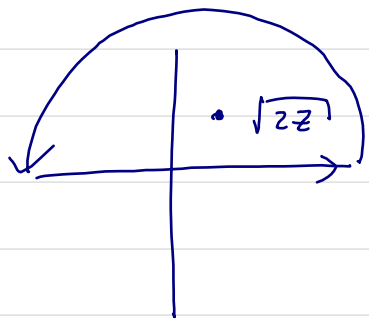
$\cos\varphi\, d\varphi = dt$

$(r-\sqrt{2z})(r+\sqrt{2z})$

$$= 2\pi \int_0^\infty \frac{e^{iar}-e^{-iar}}{iar} \frac{r^2}{\frac{1}{2}r^2 - z}\, dr \qquad (a>0)$$

$$= \frac{4\pi}{ia}\int_0^\infty \frac{re^{iar}-re^{-iar}}{r^2-2z}dr = \frac{4\pi}{ia}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{re^{iar}}{r^2-2z}dr$$

$$= \frac{4\pi}{ia}\, 2\pi i\, \frac{\sqrt{2z}\, e^{ia\sqrt{2z}}}{2\sqrt{2z}} = \frac{4\pi^2}{a} e^{ia\sqrt{2z}}$$



$$\therefore \int \frac{e^{ikx}}{\frac{1}{2}|k|^2 - z}\, dk = \frac{4\pi^2}{|x|} e^{i|x|\sqrt{2z}}$$

$(2\pi)^3 = 8\pi^3$

$$\therefore (H_0 - z)^{-1} \text{ の積分核は } \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i\sqrt{2z}|x-y|}}{|x-y|}$$

$\mathrm{Im}\sqrt{z} > 0$

実際 $z=i$ とは $\sqrt{i} = e^{\frac{\pi}{4}i} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

$$\therefore i\sqrt{2}\,\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i) = i(1+i) = i-1 \quad \therefore \frac{e^{i|x|}e^{-|x|}}{|x|}$$

$$\therefore \frac{e^{-2|x|}}{|x|^2} \in L^2$$

例 $V(-\frac{1}{2}\Delta + z)^{-1}$ の積分核.

$$\int V(x)\, K(x,y) f(y)\, dy$$

$\uparrow$ この.

§4 Perturbation of s.a.

Def 4.1 $D(A) = \mathcal{H}$ $\quad \|A\varphi\| \leq {}^{\exists}C\|\varphi\|$ となるとき b'dd という

Prop 4.2 A s.a. B b'dd かつ sym ← つまり s.a.

このとき $D(A+B) = D(A)$ で $A+B$ は s.a.

$D(A)$ 上 sym はすぐにわかる. $D((A+B)^*) = D(A)$ を示す.

$D((A+B)^*) = \{ f \mid ((A+B)g, f) = (g, {}^{\exists}h) \ {}^{\forall}g \in D(A) \}$

$((A+B)g\ f) = (Ag\ f) + (Bg\ f) = \underline{(Ag\ f) + (g\ Bf)}$

$\therefore \ (Ag\ f) + (g\ Bf) = (g\ {}^{\exists}h)$

$\therefore \ (Ag\ f) = (g,\ h - Bf)$

$\therefore \ f \in D(A^*)$ $\qquad \therefore \ D((A+B)^*) \subset D(A^*) = D(A)$

$\cup$

$D(A) - D(A \cap B)$

Lem 4.2 $\|A\| < 1 \to \mathbb{1} - A$ は b'dd な逆をもつ

説明しなかった

$S_n = \sum_{k=0}^{n} A^k$ とする

$\lim S_n f = S_\infty f$ として $S_\infty(1-A) = (1-A)S_\infty = 1$.

また $\|S_\infty\| < \dfrac{1}{1 - \|A\|}$ b'dd.

2018.11.12
有紀 誕生日
48才

(5)

$\mathrm{Ran}(A+\mu i)=\mathcal{H}$ 言は $(A+i\mu)^{-1}$ は bdd

↓ここから

prop 4.3 Rellich-Kato の Thm.

A s.a. B sym s.t.

$D(A) \subset D(B)$ ← BはAに相対有界という (5)

$\|Bf\| \leq a\|Af\| + b\|f\|$ <u>$a<1$</u> ~~$\forall f \in D(A)$~~

$\Rightarrow$ $A+B$ は $D(A)$ 上 s.a.

∵ Neuman展開

$$A+B-i = (B(A-i)^{-1}+1)(A-i)$$

$\|B(A-i)^{-1}f\| \leq a\|A(A-i)^{-1}f\| + b\|(A-i)^{-1}f\|$ 逆あり

$\leq a\|f\| + b\frac{1}{|\mathrm{Im}\, z|}\|f\|$ //

$$\|(A+i\mu)f\|^2 = \|Af\|^2 - 2\mathrm{Re}\, i(Af, \mu f) + \mu^2\|f\|^2$$

$= \|Af\|^2 + \mu^2\|f\|^2$

∴ $\|A(A+i\mu)^{-1}f\|^2 \leq \|f\|^2$ ok

∴ $\|(A+i\mu)^{-1}f\|^2 \leq \frac{1}{\mu^2}\|f\|^2$ ok (4)

§5 Schrödinger operator

$L^2(\mathbb{R}^d)$, $-\frac{1}{2}\Delta + V$ を Schrödinger op という

Prop 5.1 $d=3$, $V = V_1 + V_2$ $V_1 \in L^2$, $V_2 \in L^\infty$

このとき V は無限小 H_0-有界 i.e. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists b_\varepsilon$

s.t. $\| V f \| \le \varepsilon \| H_0 f \| + b_\varepsilon \| f \|$

∵ $V\left(\frac{1}{2}\Delta + z\right)^{-1}$ の kernel は $\boxed{\mathrm{Im}\sqrt{z} > 0}$

$V(x) \dfrac{e^{i\sqrt{2z}|x-y|}}{2\pi|x-y|}$ だったから

$V \in L^2$

$$\| V (H_0 + z)^{-1} f \|^2 = \int |V(x)|^2 \left| \int \frac{e^{i\sqrt{2z}|x-y|}}{2\pi|x-y|} f(y)\,dy \right|^2 dx$$

$$\le \underbrace{\int |V(x)|^2}_{< C} \underbrace{\int \left| \frac{e^{i\sqrt{2z}|x-y|}}{2\pi|x-y|} \right|^2 dy}_{< C} \int |f|^2 dy \le C \| f \|^2$$

$\int r e^{-\mu v} dv$ $\sim \to 0$

$\therefore \| V (H_0 + z)^{-1} f \| \le C \| f \|$

$z = \pm i\mu$ のとき $\displaystyle \lim_{\mu \to +\infty} \frac{\| V (H_0 \pm i\mu)^{-1} f \|}{\| f \|} \to 0$

つまり $\| V (H_0 \pm i\mu)^{-1} f \| \le \varepsilon \| f \|$

$\therefore \| V f \| \le \varepsilon \| (H_0 \pm i\mu) f \| \le \varepsilon \| H_0 f \| + \varepsilon\mu \| f \|$

また $V \in L^\infty$ のときは

$\|Vf\| \leq b\|f\|$

$\therefore \|(V_2+V_1)f\| \leq \varepsilon\|H_0 f\| + b_\varepsilon\|f\|$ //

Prop 5.2

$$\begin{cases} p = 2 & (d \leq 3) \\ p > d/2 & (d \geq 4) \end{cases}$$

$V = \underset{\in L^p}{V_1} + V_2 \in L^\infty$

このとき V は H_0 に無限小 H_0-有界

Coulomb potential $-\frac{Z}{|x|}$ $\quad d=3$

$H \quad -\frac{1}{2}\Delta - \frac{Z}{|x|} \quad d=3 \quad \frac{1}{|x|} = \underset{\in L^2}{V_1} + \underset{\in L^\infty}{V_2}$

$\therefore$ H は $D(-\frac{1}{2}\Delta)$ 上 s.a. (by Kato)

一般論 $\quad d$-dim $\quad -\frac{1}{|x|^\alpha}$

$$\begin{cases} d \leq 3 \to \alpha < d/2 & \text{無限小 } H_0\text{-有界} \\ d \geq 4 \to \alpha < 2 & \text{〃} \end{cases}$$

Closed operator

A が closed op $\Leftrightarrow$ $f_n \in D(A)$ s.t. $f_n \to f$, $Af_n \to g$ $\Rightarrow$ (1) $f \in D(A)$, (2) $Af = g$

例1 bdd → closed

s.a. → closed

$\exists$

× $A \subset B$ かつ B closed のとき A は closable という.

× A : closable $\Leftrightarrow$ $\exists S$ s.t. $A \subset S$, S closed

$A \subset B$ closed → $S \subset B$

S を A の closure という. $S = \bar{A}$

Thm 5.3 (Kato)

$V = V_1 + V_2$ $V_1 \geq 0$ $V_1 \in L^2_{loc}$, V_2 は H_0-bdd で

H_0-bound < 1 $\Leftrightarrow$

$H = H_0 + V$, $D(H) = C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $T_1, T_2, \cdots$ の

S.G. 拡大をもつ.

例1 $-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2$ / C_0^∞ は $T_1, T_2, \cdots$ の S.G. をふくむ

§6 スペクトル分解定理

スペクトル測度

$P(\mathcal{H})$ projections 全体

$(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ measurable 空間. $B_{\mathbb{R}}$: Borel meas. sets

Def 6.1

$E : B_{\mathbb{R}} \to P(H)$ が次をみたすとき spectral measure という

(1) $E(\mathbb{R}) = 1$

(2) $S_n \in B_{\mathbb{R}}$, $S_n \cap S_m = \emptyset$ $(n \neq m)$

$\to E(\bigcup_n^{\infty} S_n) = \sum_n^{\infty} E(S_n)$ strong convergence

Lemma 6.2 E : $(\mathbb{R}, B_{\mathbb{R}})$ 上の spectral meas.

(1) $E(\emptyset) = 0$

(2) $E(R \cup S) = E(R) + E(S)$ RとSが素なとき $E(R)\cdot E(S) = 0$ $E(R) \perp E(S)$ の意

(3) $E(R \cap S) = E(R)E(S) = E(S)E(R)$

∵ (1) $E(\emptyset) = E(\bigcup \emptyset) = \sum E(\emptyset) = \lim_N N E(\emptyset)$ ∴ $E(\emptyset) = 0$

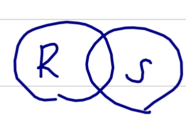
(2) (2)から分かる 直交すれ

$E(R) = R$ $E(S) = S$ として $f \in R\mathcal{H}$

$\|f\|^2 \geq \|(R+S)f\|^2 = \|f + Sf\|^2 = \|f\|^2 + 3\|Sf\|^2$

∴ $\|Sf\| = 0$ ∴ $Sf = 0$.

(3)



$E(R)E(S) = E(R \setminus S)E(S) + E(R \cap S)E(S)$

$= E(R \cap S)$ 逆も同じ.

2018・11・19

⑥ ここから

$\{E_t\}$ $E_t = E((-\infty, t])$ spectral 族 ということある

$\mu_{ff}(\cdot) = (f, E(\cdot)f)$ は Borel measure になっている.

$\mu_{fg}(\cdot) = (f, E(\cdot)g)$ 複素 measure

Thm 6.3 $\exists!$ s.a. このとき $\exists!$ $E = E_H(\cdot)$ s.t.

$$(f, Hg) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d(f, E(\lambda)g)$$

かつ $f \in D(H) \iff \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(f, E(\lambda)f) < \infty$

Borel meas. F に対して $F(H)$ を次で定める.

$$D(F(H)) = \{ f \mid \int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2 d(f, E(\lambda)f) < \infty$$

かつ $(f, F(H)g) = \int F(\lambda) d(f, E(\lambda)g)$.

この $F(H) = \int F dE$ と表す

Prop 6.4 ① $\left(\int f dE\right)^* = \int \bar{f} dE$

① f : $\mathbb{R}$-valued ならば $\int f dE$ は s.a.

② $\int f dE + \int g dE \subset \int f+g \, dE$

④ $\left(\int f dE\right)\left(\int g dE\right) \subset \int fg \, dE$

A^2 といった場合 2つの def が存在する 次降 で def する

$$\left| \int F(\lambda)\, d(f, E(\lambda) g) \right| \le \left(\int |F(\lambda)|^2 d \|E(\lambda) g\|^2 \right)^{1/2} \|f\|$$

$$\| F(H) g \| \cdot \|f\|$$

Example $(f, xf) = \int_{\mathbb{R}^2} x |f|^2 dx$

Example $(f, -i\partial f) = \int |f|^2 k \, dk$

$d(f, E(\lambda) f) = |f|^2(\lambda)\, d\lambda$

$(f, E(\Omega) f) = \int_\Omega |f|^2(\lambda) d\lambda$

$$\int (\lambda + i\mu)^{-1} dE = F_\mu \quad \text{とする.}$$

$F_\mu (H + i\mu) \subset \mathbb{1}$ $\quad \therefore F_\mu (H + i\mu) = \mathbb{1}$

逆もいえる $\therefore F_\mu = (H + i\mu)^{-1}$

$$\| (H + i\mu)^{-1} \varphi \|^2 = \int |\lambda + i\mu|^{-2} dE \le \frac{1}{\mu^2} \|\varphi\|^2$$

Example

$$e^{itH} = \int e^{it\lambda} dE$$

Example

$$e^{-tH} = \int e^{-t\lambda} dE$$

Example

$H(H + i\mu)^{-1} \subset \int \frac{\lambda}{\lambda + i\mu} dE$

bdd.

§7 Essential spectrum

Def 7.1 $\lambda \in \sigma(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ に対して $\dim [E((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon))] > 0$

$\sigma(A)$ を分けると

$$\sigma(A) = \sigma_d(A) \dot{\cup} \sigma_{ess}(A)$$

Def 7.2 $\lambda \in \sigma_d(A) \Leftrightarrow \exists \varepsilon$ s.t. $\dim [E((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon))] < \infty$

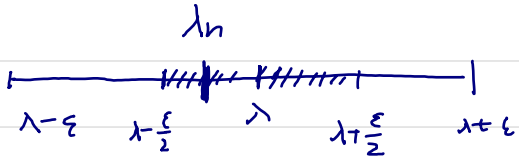
$\lambda \in \sigma_{ess}(A) \Leftrightarrow \forall \varepsilon$ $\dim [E((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon))] = \infty$

Lem 7.3 $\sigma(A)$ と $\sigma_{ess}(A)$ は closed set

$\sigma_{ess}(A) \ni \lambda_n$ $\lambda_n \to \lambda$ とする

$\dim E[(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)]$ $|\lambda_n - \lambda| < \varepsilon$ となる ε をとる

$\dim E[(\lambda_n - \frac{\varepsilon}{2}, \lambda_n + \frac{\varepsilon}{2})] = \infty$



よって $\sigma_{ess}(A)$ は closed set.

$\sigma(A) \ni \lambda_n \longrightarrow \lambda$ とする.

$\dim E((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)) > \dim E((\lambda_n - \frac{\varepsilon}{2}, \lambda_n + \frac{\varepsilon}{2})) > 0$ より

2018 · 11 · 26

ここから ⑦

spectrum について

A s.a.

$\rho(A) = \{ z \in \mathbb{C} \mid (A-z) \text{ surjective}, (A-z)^{-1} \text{ bdd} \}$

$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$

$\sigma_d(A) = \{ z \in \sigma(A) \mid \text{discrete}, \dim E_A(\{z\}) \mathcal{H} < \infty \}$

$\sigma_{ess}(A) = \sigma(A) \setminus \sigma_d(A)$

Example f cont M_f $\sigma(M_f) = \overline{\mathrm{Ran} f}$

☺ $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{Ran} f} = \rho(M_f)$ について

× $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{Ran} f} \ni z$ とすると $\exists \varepsilon > 0$ s.t. $|f - z| > \varepsilon$

$\therefore (f-z)^{-1}$ は $\|(f-z)\varphi\| \le \frac{1}{\varepsilon}\|\varphi\|$ bdd

$\therefore \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{Ran} f} \subset \rho(M_f)$

× $z \in \overline{\mathrm{Ran} f}$ のとき $\mathbb{1}_{(z-\varepsilon, z+\varepsilon)}(f(\xi)) = \mathbb{1}_{f^{-1}((z-\varepsilon, z+\varepsilon))}(\xi) = \varphi_\varepsilon(\xi)$

$|(f-z)\varphi_\varepsilon(\xi)| \le \varepsilon |\varphi_\varepsilon(\xi)|$

$\therefore \frac{1}{\varepsilon} |\varphi_\varepsilon(\xi)| \le |(f-z)^{-1}\varphi_\varepsilon(\xi)|$ より $\varphi = 0$

$\therefore \frac{1}{\varepsilon} |\varphi_\varepsilon(\xi)| e^{-\xi^2} \le |(f-z)^{-1}\varphi_\varepsilon(\xi)| e^{-\xi^2}$ $\therefore (f-z)^{-1}$ は bdd にならない

Example 2 $-\Delta$

Fourier tr. $-\Delta \sim |\xi|^2$ $\therefore \sigma(|\xi|^2) = \sigma(-\Delta) = [0, \infty)$

또는 $\sigma(-\Delta) = \sigma_{ess}(-\Delta) = (0, \infty)$

Thm 7.4 Weyl's criterion ✓ 無限に存在する!

$\lambda \in \sigma_{ess}(H) \iff \exists$ ONS $\{\varphi_n\} \subset D(H)$ s.t.

$\|(H-\lambda)\varphi_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$

($\Rightarrow$)

$\dim \underbrace{P_n E((\lambda-\frac{1}{n}, \lambda+\frac{1}{n}))\mathcal{H}}_{\mathcal{H}_n} = \infty$

$\mathcal{H}_n \supset \mathcal{H}_{n+1} \supset \mathcal{H}_{n+2} \supset \cdots \quad \varphi_1 \in \mathcal{H}_1$

$\varphi_n \in \mathcal{H}_n \cap \mathrm{span}[\varphi_1 \cdots \varphi_{n-1}]^{\perp}$ 帰納的に定める.

$\|(A-\lambda)\varphi_n\|^2 = \int |\mu-\lambda|^2 d(P_n E_\mu \varphi_n)$

$= \int_{\lambda-\frac{1}{n}}^{\lambda+\frac{1}{n}} |\mu-\lambda|^2 \le \frac{1}{n^2} \to 0$

($\Leftarrow$) 対偶 + 背理法 $\lambda \notin \sigma_{ess} \Rightarrow \#\{\varphi_n\}$ を示す.

$\exists \{\varphi_n\}$ とれてみる.

$\exists \varepsilon$ s.t. $\dim \mathcal{H}_\varepsilon < \infty$ $\quad \mathcal{H}_\varepsilon = P_n E((\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon))\mathcal{H}$

$E(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) = P$ は compact op. ∴ weak lim → strong lim

∴ $\|P\varphi_n\| \to 0 \ (n \to \infty)$ となる.

実際 $P = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n (f_n \cdot)$

∴ $\|P\varphi_n\| = \left\| \sum_{k}^{m} \alpha_k (f_k, \varphi_n) \right\| \to 0$ //

$$\|(A-\lambda)\varphi_n\| = \left[\int (\mu-\lambda)^2 d(\varphi_n, E\varphi_n)\right]^{1/2}$$

$$= \left[\int_{|\mu-\lambda|\geq\varepsilon} + \int_{|\mu-\lambda|<\varepsilon}\right]^{1/2} \geq \left[\int_{|\mu-\lambda|\geq\varepsilon}\right]^{1/2} \geq \varepsilon - \left[\int d(P\varphi_n, EP\varphi_n)\right]^{1/2}$$

$$= \varepsilon - \|P\varphi_n\|$$

$$\geq \varepsilon \|(1-P)\varphi_n\| = \varepsilon - \|P\varphi_n\|$$

$$\geq \varepsilon \|\varphi_n\| - \|P\varphi_n\| \to \varepsilon > 0 \quad \text{矛盾}.$$

Cor 5.7 A s.a. $z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

$\lambda \in \sigma_{ess}(A) \iff \exists$ ONS $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ s.t.

$$\|(A-z)^{-1} - (\lambda-z)^{-1}\varphi_n\| \to 0 \quad (n\to\infty)$$

☺

$$\|(A-\lambda)\varphi_n\| \to 0 \quad \text{ok}$$

$$\|(A-z)^{-1} - (\lambda-z)^{-1}\varphi_n\| = \|(A-z)^{-1}(A-\lambda)(\lambda-z)^{-1}\varphi_n\| \to 0 \quad //$$

ここから ⑧ 2018・12・3

§8 Compact perturbation

Def 8.1 A : compact op.

$\Leftrightarrow \{Af \mid f \in \mathcal{H}, \|f\| \le 1\}$ が compact.

(Aが bdd かつ)

i.e. $\{Af\}$ は収束する部分列をもつ

$C(\mathcal{H})$ ・・・ cpt op 全体, $B(\mathcal{H})$ ・・・ bdd op 全体

$B(H) \supset C(H)$

$C(\mathcal{H})$ は $B(\mathcal{H})$ の両側イデアルになる

Thm 8.2 (weak conv. → strong conv.) $T \in C(\mathcal{H})$

Suppose $f_n \xrightarrow{w} f$. Then $Tf_n \xrightarrow{s} Tf$.

☺ $Tf_n \xrightarrow{w} Tf$ $(n \to \infty)$

$\therefore Tf_n \longrightarrow Tf$ に強収束しない と仮定する

i.e. $\exists n' \exists \delta$ s.t. $\|Tf_{n'} - Tf\| > \delta$ —(A)

→ $\{f_{n'}\}$ 有界 $\therefore Tf_{n''} \to \exists h$ strongly かつ $Tf_{n''} \xrightarrow{w} Tf$

だから $h = Tf$ 「これは * に矛盾する」

($\because f_{n'} \xrightarrow{w} f$ だから)

cpt の性質

(1) $C(H) \ni A_n \to A$ uniformly $A \in C(H)$

(2) $C(H)$ は $*$, linear

(3) $\sigma(T)\setminus\{0\}$ は discrete で $\sigma(T)\setminus\{0\}$ の元の重複度 $< \infty$

(T は s.a. と仮定, 実は $\forall T \in C(\mathcal{H})$ でよい)

Example 1 $\quad Tf = \sum_{j=1}^{n} a_j (\varphi_j, f)\varphi_j \qquad \varphi_j$ ONS

Example 2 $\quad \mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$ Example 1 は

$$Tf = \sum a_j \varphi_j(x) \int \varphi_j(y) f(y)\,dy = \int \underbrace{\sum a_j \varphi_j(x)\varphi_j(y)}_{K(x,y)} f(y)\,dy$$

実は integral op. $Tf = \int K(x,y) f(y)$, $K(\cdot,\cdot) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)$

は cpt op on $\mathcal{H}$ になる

Example 3. $f(x)g(p)$, $f, g \in L^p$ ($p \geq 2$)

このとき $f(x)g(p)$ は cpt op になる.

(∵) $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ $\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{2} + \frac{1}{p}$

$$\| g(\xi)\hat{\varphi}(\xi) \|_r \leq \| g \|_p \| \varphi \|_2$$

$$\| g(p)\varphi \| = \| \mathcal{F} g \hat{\varphi} \|_s \leq C \| g \hat{\varphi} \|_r \leq \| g \|_p \| \varphi \|_2$$

$\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$ Hausdorff-Young ↙ Hölder

Hölder ↑

$\therefore \frac{1}{s} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$ $(2 \leq s \leq \infty)$

$$\therefore \| f(x)g(p)\varphi \|_2 \leq \| f \|_p \| g\varphi \|_s \leq \| f \|_p \| g \|_p \| \varphi \|_2$$

$p = 2$ とする.

$$f(x)g(p)\varphi = f(x)\mathcal{F}^{-1} g \mathcal{F} \varphi = f(x)(2\pi)^d \int g(x-y)\varphi(y)$$

$$= (2\pi)^d \int \underbrace{f(x)g(x-y)}_{= K(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d)} \varphi(y) \qquad \therefore \text{cpt}$$

$$\| f_R - f \|_p \to 0 \quad \| g_R - g \|_p \to 0$$

$$\| fg - f_R g_R \|_2 \leq \| f - f_R \|_p \| g \|_p + \| f_R \|_p \| g - g_R \|_p \to 0$$

$\therefore f_R g_R$ は積分作用素で積分核は L^2. //

Thm 8.3 Weyl の定理

A, B s.a. on $\mathcal{H}$ and $\underline{D(A) = D(B)}$

$A - B$ は bdd op に拡張できて compt とする.

このとき $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$

(∵) $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ とする $\exists \varphi_n \in D(A)$ (ONS) って

$\|(A-\lambda)\varphi_n\| \to 0$ $\quad \varphi_n \xrightarrow{w} 0$ なので

$\|(A-B)\varphi_n\| \to 0$

$\therefore \|(B-\lambda)\varphi_n\| \leq \|(A-\lambda)\varphi_n\| + \|(B-A)\varphi_n\| \to 0$.

$\therefore \lambda \in \sigma_{ess}(B)$ 　逆も同様 $\therefore \sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$ //

Thm 8.3' Weyl の定理 A, B s.a.

$(A-z)^{-1} - (B-z)^{-1}$ が compt とする

$\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$

(∵) $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ とする $\exists \{\varphi_n\}$ ONS $\|(A-z)^{-1} - (\lambda-z)^{-1}\varphi_n\| \to 0$

$\|(B-z)^{-1} - (\lambda-z)^{-1}\varphi_n\| \leq \|(A-z)^{-1} - (\lambda-z)\varphi_n\|$

$+ \|(A-z)^{-1} - (B-z)^{-1}\varphi_n\| \to 0$ //

Def 8.4 A s.a. B sym

B が A-compact (relatively A-compact)

$\Leftrightarrow$ $D(B) \supset D(A)$ かつ $B(A-z)^{-1}$ が compact $\exists z \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$

注 z に依らない

$$B(A-w)^{-1} = B(A-z)^{-1} + (w-z)\underbrace{[B(A-z)^{-1}]}_{\text{compact op.}}(A-w)^{-1}$$

~12月10日にこの説明する~

Prop 8.5 B が A-cpt $\Leftrightarrow$ $A+B$ s.a. かつ $\sigma_{ess}(A+B) = \sigma_{ess}(A)$

$$\because \quad \|B(A-i\mu)^{-1}\| = \|\overbrace{B(A-i)^{-1}}^{\text{cpt}}\overbrace{(A-i)(A-i\mu)^{-1}}^{\to 0}\| \to 0 \quad (\mu \to \infty)$$

$$\therefore \quad \|B\varphi\| \le \|(A-i\mu)\varphi\|\,\varepsilon \quad \leftarrow (\forall \varepsilon)$$

一般論 A cpt

B_n b'dd st $B_n \to B$ $(n\to\infty)$

strongly $\Rightarrow$ $AB_n^* \to AB^*$ uni.

$\because$ $B_n \to B$ strongly $\therefore$ $\|B_n\| < \exists C$ $\forall n$

preCpt set 上一様

$\sup_f \|B_nAf - BAf\| \to 0$

$\therefore$ $A^*B_n^* \to A^*B^*$

$$(A+B-z)^{-1} - (A-z)^{-1}$$

$$= [(A-z)((A-z)^{-1}B+1)]^{-1} - (A-z)^{-1}$$

$$= ((A-z)^{-1}B+1)^{-1}(A-z)^{-1} - (A-z)^{-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} [(A-z)^{-1}B]^n (-1)^n$$

CPT の一様収束極限

次ページ ⊛

$$\therefore \quad \sigma_{ess}(A+B) = \sigma_{ess}(A)$$

(*) A cpt $\quad B_n \to B$ strongly

$\mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ unit sphere $\quad A\mathcal{M}$ cpt

$A\mathcal{M}$ precompact $\quad \forall \varepsilon \quad B_\varepsilon$

$$A\mathcal{M} \subset \bigcup_{j=1}^{N} B_\varepsilon(x_j) \leftarrow \text{これを示す.}$$

$$\|B_n\varphi - B\varphi\| \to 0$$

$$\sup_{\varphi \in A\mathcal{M}} \|B_n\varphi - B\varphi\| \to 0 \quad (n \to \infty)$$

$$\|B_n x_j - Bx_j\| < \varepsilon \quad \forall j = 1, \dots N$$

$$\|B_n y - By\| \le \underline{\|B_n y - B_n x_j} + B_n x_j - Bx_j + \underline{Bx_j - By\|}$$

$$\le \|B_n\|\varepsilon + \|B\|\varepsilon + \|B_n x_j - Bx_j\|$$

$$\le 2C\varepsilon + \|B_n x_j - Bx_j\| \le (2C+1)\varepsilon$$

$$\boxed{\sup_n \|B_n\| = C < \infty}$$

$$A\mathcal{M} \subset \bigcup_{x \in A\mathcal{M}} B_\varepsilon(x) \qquad \exists \{x_1, \dots x_N\} \in A\mathcal{M} \text{ st } A\mathcal{M} \subset \bigcup_{j}^{N} B_\varepsilon(x_j)$$

$$B_n A \longrightarrow BA \text{ in } \mathcal{M} \iff B_n A \to BA.$$

2018・12・10

§9 Essential spectrum of Schrödinger op.

Schrödinger op $\quad \sigma(-\Delta) = [0, \infty) = \sigma_{ess}(-\Delta)$

$\sigma_{ess}(-\Delta + V) = \sigma_{ess}(-\Delta)$ となる V を求めたい.

$\int_1^\infty \frac{1}{r^a} < \infty \quad a>1$

Lemma 9.1 (基本) $p \geq 2,\ p > d/2,\ V \in L^p(\mathbb{R}^d)$ とする.

このとき V は $-\Delta$-compact.

$\because$ $V(H_0+1)^{-1}$ が cpt であることを示す.

$V \in L^p$

$(H_0+1)^{-1} = g(P) \in L^p \quad (P \geq 2)$

$\int \frac{1}{(\xi^2+1)^p} = \int \frac{r^{d-1}}{(r^2+1)^p}$

$\therefore \int \frac{1}{r^{2p-d+1}}$

$2p-d+1 > 1 \quad \therefore p > d/2$ //

Thm 9.2 $\quad p \geq 2 \quad p > d/2 \quad V \in L^p + (L^\infty)_\varepsilon$

$\sigma_{ess}(H_0) = \sigma_{ess}(H_0+V)$

正数 ε に対して $V = V_1 + V_2$ かつ $\forall \varepsilon$ に対して $\|V_2\|_\infty < \varepsilon$ となる

$\because$ $V = V_1^\varepsilon + V_2^\varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0$

$V(H_0+1)^{-1} = V_1^\varepsilon (H_0+1)^{-1} + V_2^\varepsilon (H_0+1)^{-1}$

$\|V(H_0+1)^{-1} - V^\varepsilon (H_0+1)^{-1}\| \leq \varepsilon \quad \therefore \lim_\varepsilon V^\varepsilon (H_0+1)^{-1} = V(H_0+1)^{-1}$ //

$\therefore \lim_\varepsilon V_1^\varepsilon (H_0+1)^{-1} = V(H_0+1)^{-1}$ に対応している. $\therefore V(H_0+1)^{-1}$ は cpt.

$\therefore H_0 + V$ は s.a. $\quad \sigma_{ess}(H_0) = \sigma_{ess}(H)$

Example $V(x) = \dfrac{C}{|x|^a}$ = 原点近 + 原点遠
L^p $(L^\infty)_\varepsilon$

$$\int_0^1 \frac{1}{r^{ap}} r^{d-1} \sim \int_0^1 \frac{1}{r^{ap-d+1}} < \infty \Leftrightarrow ap - d + 1 < 1 \quad \therefore ap < d$$

(o) $ap < d \Longrightarrow V \in L^p + (L^\infty)_\varepsilon$

$\therefore a < d/p$ i) $p \geq 2$ $\therefore 1/p \leq \frac{1}{2}$ $\therefore \frac{d}{p} \leq \frac{d}{2}$

$\therefore a < \frac{d}{2}$

ii) $p > d/2$ $\therefore 1/p < \frac{2}{d}$ $\therefore \frac{d}{p} < 2$

$\therefore a < 2$

$d=3$ のとき $a < \frac{3}{2}$ 特に Coulomb は OK !

紹介するだけ：

Thm 9.3 $V \in L^p + (L^\infty)_\varepsilon \to$ ess.sp の不変性

$V \in L^p + L^p_{loc}$ かつ $\liminf_{|x|\to\infty} V_2(x) \geq \alpha$
$= V_1 + V_2$

$\Rightarrow \sigma_{ess}(H) \subset [\alpha, \infty)$

特に $\liminf V_2(|x|) = +\infty$ のとき $\sigma_{ess}(H) = \emptyset$

∵ $\int f^2 \cdot 1 \, dx \leq \left(\int f^p\right)^{\frac{2}{p}} \left(\int 1\right)^{\frac{1}{q}}$ $\quad 1 = \frac{2}{p} + \frac{1}{q}$

$\frac{p}{2} > 1$? $\quad p > 2$ $\quad \therefore f \in L^2_{loc}$ $\quad \therefore H_0$ は ess.s.a. on C_0^∞

$\tilde{H} = H_0 + \tilde{V}_2$, $\tilde{V}_2(x) = \max(V_2(x), \beta) \in L^p_{loc}$ $\alpha > \beta$

$\tilde{V}_1(|x|) = V_1 - \tilde{V}_2$ $\quad \therefore H = H_0 + \tilde{V}_1 + \tilde{V}_2$

$\tilde{H} \geq \beta$ に注意する

$\therefore (\psi, \tilde{H}\psi) \geq \beta \|\psi\|^2$

$\therefore \sigma_{ess}(\tilde{H}) \subset \sigma(\tilde{H}) \subset [\beta, \infty)$

実は $(H+C)^{-1} - (\tilde{H}+C)^{-1} = (\tilde{H}+C)^{-1} \tilde{V}_1 (H+C)^{-1}$

$\tilde{V}_1 = \operatorname{sgn} \tilde{V}_1 \, |\tilde{V}_1|^{\frac{1}{2}} \cdot |\tilde{V}_1|^{\frac{1}{2}} = W_1 W_2$

$= (\tilde{H}+C)^{-1} W_1 W_2 (H+C)^{-1} = (\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{(H+C)^{-\frac{1}{2}} W_1}_{} \underbrace{W_2 (H+C)^{-\frac{1}{2}}}_{} (H+C)^{-\frac{1}{2}}$

$= (\tilde{H}+C)^{-\frac{1}{2}} \underbrace{(H+C)^{-\frac{1}{2}} (H_0+C)^{\frac{1}{2}}}_{\text{b'd}} \underbrace{(H_0+1)^{-\frac{1}{2}} W_1}_{W_1 \in L^q \; q>d} \underbrace{W_2 (H_0+1)^{-\frac{1}{2}}}_{} \underbrace{(H_0+1)^{\frac{1}{2}} (H_0+C)^{-\frac{1}{2}}}_{\text{b'd}} (H_0+C)^{-\frac{1}{2}}$

$\| W (H_0+1)^{-\frac{1}{2}} \| \leq \| W \|_q \, \| (H_0+1)^{-\frac{1}{2}} \|_q$ $\quad q > d$

$\int \frac{\xi^{d-1}}{(\xi^2+1)^{q/2}} \sim \int \frac{1}{\xi^{q-d+1}}$ $\quad q-d+1 > 1$ $\quad \therefore q > d$

つまり $\| W_1 (H_0+1)^{-1/2} \| \le \| w \|_q \| (\xi^2+1)^{-1/2} \|_q$

かつ 同様に $W_1 (H_0+1)^{-1/2}$ が cpt を示せる.

よって $(H_0+1)^{1/2} (H+C)^{-1/2}$ の bdd 性は

$\| (H_0+C)^{1/2} \varphi \|^2 \le a \| (H+C)^{1/2} \varphi \|^2$ という bound を

示せばいい.

$H = H_0 + V_1 + V_2$ ($V_1 \in L^p$, $V_2 \in L^\beta$)

$\geqslant H_0 + V_1 + \beta$

($\tilde{V}_1 := V_1 + V_2 - \tilde{V}_2$
$= V_1$ ($|x|>>1$)
$\therefore \tilde{V}_1 \in L^p$)

$\| V_1 \varphi \| \le \varepsilon \| H_0 \varphi \| + b \| \varphi \|$

$(\varphi, V_1 \varphi) \le \varepsilon (\varphi, H_0 \varphi) + b \| \varphi \|^2$

$\therefore H \geqslant (1-\varepsilon) H_0 - b + \beta$

$H + b - \frac{\beta}{1-\varepsilon} \geqslant (1-\varepsilon) H_0 = (1-\varepsilon)(H_0+1)$

$\therefore \| (H_0+1)^{1/2} \varphi \|^2 \le \frac{1}{1-\varepsilon} \| (H + \underbrace{b - \beta + 1 - \varepsilon}_{C})^{1/2} \varphi \|^2$

$\therefore \| (H_0+1)^{1/2} (H+C)^{-1/2} \varphi \| \le \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} \| \varphi \|$ ∎

まとめ　$H = H_0 + V$

・$V \in L^1 + (L^\infty)_\varepsilon$　　$p \geq 2$,　$p > d/2$

$\rightarrow \sigma_{ess}(H) = \sigma_{ess}(H_0)$

・$V \in L^p + L^p_{loc}$,　$\underline{\lim} V > \alpha$

$\rightarrow \sigma_{ess}(H) \subset [\alpha, \infty)$

(10) 2019 · 1 · 7

§10 Absolutely cont spectrum

λ : Lebesgue meas on $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ とする

- $\mu \ll \lambda \iff \lambda(A)=0 \to \mu(A)=0$
- $\mu \perp \lambda \iff {}^{\exists}A$ s.t. $\lambda(\mathbb{R}\setminus A)=0$ かつ $\mu(A)=0$

$\mu = \mu_{ac} + \mu_{sing}$ Lebesgue decomp. thm.

$\mu_{ac} \ll \lambda$, $\mu_{sing} \perp \lambda$, $\mu_{ac} + \mu_{sing}$

R-N derivative $\{ \quad \mu \ll \lambda \to d\mu = \xi\, d\lambda$

$\mathbb{C}$-valued measure $\mu = \mu_R + i\mu_I$

$|\mu_\#| = \mu_{\#+} + \mu_{\#-}$

$\mu \ll \lambda \iff |\mu_\#| \ll \lambda$

$\mu \perp \lambda \iff |\mu_\#| \perp \lambda$

A s.a. on $\mathcal{H} \to E(\cdot)$ spectral m.

$\mu_f = \mu_f$, $\mu_{fg}(\cdot) = (f, E(\cdot)g)$

$\mathcal{H}_{ac} = \{f \mid \mu_f \ll \lambda\}$

$\mathcal{H}_{sing} = \{f \mid \mu_f \perp \lambda\}$

Lemma 10.1

① $\mathcal{H}_\#$: closed subspaces

② $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} \oplus \mathcal{H}_{sing}$

closedness

- $\lambda(A) = 0$
- $\mu_{f_n}(A) = 0 \to \mu_f(A) = 0$.
- $\exists A_n \ \lambda(\mathbb{R} \setminus A_n) = 0$, $\mu_{f_n}(A_n) = 0$, $A = \bigcap A_n$ とおくと $\lambda(\mathbb{R} \setminus A) = 0$, $\mu_f(A) = 0$

☺ ① $\mu_{f+g} \le \mu_f + \mu_g + 2\sqrt{\mu_f \mu_g}$

$\lambda(A) = 0 \Rightarrow \mu_f = \mu_g = 0 \Leftrightarrow \mu_{f+g} = 0$

$\exists A_f, A_g$ s.t. $\mu_f(A_f) = \mu_g(A_g) = 0$, $\lambda(\mathbb{R} \setminus A_f) = \lambda(\mathbb{R} \setminus A_g) = 0$

$A = A_f \cap A_g \to \lambda(\mathbb{R} \setminus A) = 0$, $\mu_{f+g}(A) = 0$.

② $\mathcal{H} \ni f \to f_{ac} + f_{sing}$ と一意.

$\mu_f = \mu_{ac} + \mu_{sing}$ $\therefore \exists A$ s.t. $\mu_{ac}(A) = 0$, $\mu_{sing}(\mathbb{R} \setminus A) = 0$

$E(A) f$ と $E(A^c) f$

(i) $\mu_{E(A)f}$ は sing (ii) $\mu_{E(A^c)f}$ は ac.

つまり $\mu_f = \mu_{E(A)f} + \mu_{E(A^c)f}$

$\therefore f = \underset{\uparrow}{E(A) f} + \underset{\uparrow}{E(A^c) f} \in \mathcal{H}_{sing} \oplus \mathcal{H}_{ac}$.

$\mathcal{H}_{sing}$ $\mathcal{H}_{ac}$

Lemma 10.2

$A\ (\mathcal{H}_\# \cap D(A)) \subset \mathcal{H}_\#$

かつ $\mathcal{H}_\# \cap D(A)$ は $\mathcal{H}_\#$ で dense

☺ $\mathcal{H}_\# \ni f \to E([-n,n])f = f_n$ とする.

$f_n \to f$ から $f_n \in \mathcal{H}_{ac}$ ゆえに $f_n \in D(A)$

$\therefore \mathcal{H}_\# \cap D(A)$ は dense

ac とする. $(Af, E(\lambda) Af) = \int 1_X \, d(Af, E(\lambda) Af)$

$= \int 1_X(\lambda)\, \lambda^2 d(f, E(\lambda) f) = \int 1_X(\lambda)\, \lambda^2 \rho(\lambda) d\lambda$

$\lambda(X) = 0 \Leftrightarrow \mu_{Af}(X) = 0 \quad \therefore Af \in \mathcal{H}_\#$

sing とする $\exists X$ s.t. $\lambda(\mathbb{R} \setminus X) = 0$, $\mu_f(X) = 0$

$\therefore \int 1_X(\lambda)\, \lambda^2 d\mu(\lambda) = 0 \quad \therefore Af \in \mathcal{H}_{sing}$

A は $\mathcal{H}_\#$ において reduced という.

$A T_{\mathcal{H}_\#} = A_\#$. $\sigma_\#(A) = \sigma(A_\#)$ とする.

ちなみに $A_\#$ は s.a.

$\because R(A_\# \pm i) = \mathcal{H}_\#$ をいう.

$R(A_\# \pm i) \subset \mathcal{H}_\#$ は ok "$=$" を示すには

$R(A \pm i) = \mathcal{H}$ だから $R(A \pm i) \ni f = g \in \mathcal{H}_\#$

$+ q$ $D(A) \cap \mathcal{H}^\# \to f \in D(A) \cap \mathcal{H}^\#$ これは矛盾.

⑪ ここから　　2019・1・14

Example 1

F : multiplicant in $L^2(\mathbb{R}^d)$　　$\{F^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ σ-field

$E(\cdot) = \mathbb{1}_{F^{-1}(\cdot)}$

Example 2

$F = |x|^2$　　$E(A) = (f, \mathbb{1}_{F^{-1}(\cdot)} f) = \int |f|^2 \mathbb{1}_{F^{-1}(A)} dx$

もし $\lambda(A) \overset{=0}{}$ ならば $\lambda(F^{-1}(A)) = \lambda(\{x \mid |x|^2 \in A\}) = 0$

$\therefore E(A) = 0 \quad \forall f \quad \therefore \sigma_{ac}(|x|^2) = L^2$

$d=1 \to |x|^2 \in A \leftrightarrow x, -x \in A \leftrightarrow x \in A \cap (-A)$

$d=2 \to |x|^2 = \sqrt{x^2+y^2} \in A \Leftrightarrow x^2+y^2 \in A^2$

Example 3

$F = -\Delta$　　$(f, -\Delta g) = (\hat{f}, |k|^2 \hat{g})$

$\therefore E(A) = (\hat{f}, \mathbb{1}_{F^{-1}(A)} \hat{g}) = (f, F^{-1} \mathbb{1}_{F^{-1}(A)} F g)$

$\therefore E \ll \lambda \quad \forall f \quad \therefore \sigma(-\Delta) = [0, \infty) = \sigma_{ac}(-\Delta)$.

Example 4　$f, g \in \mathcal{H}_{ac}$

$$(f, e^{-itH} f) = \int e^{-it\lambda} d(f, Ef)$$

$$= \int e^{-it\lambda} \underset{\in L^1}{\xi(\lambda)} d\lambda \to 0 \quad (R.L)$$

as $t \to \infty$

$$(f, e^{-itH} g) = \frac{1}{4} \sum \frac{1}{i^n} (f + i^n g, e^{-itH} f + i^n g) \to 0$$

$\therefore e^{-itH}$ は $\mathcal{H}_{ac}$ 上で weak に zero に収束する!

注 $Hf = af$ なら NG!

§11 Scattering theory

Prop 11.1 H s.a. $f \in \mathcal{H}_{ac}$

このとき $e^{-itH} f$ は $t \to \pm\infty$ で 0 に weak conv. する

∵ $\forall g \in \mathcal{H}$ に対して $(g, e^{-itH} f)$ を考える.

$e^{-itH} f \in \mathcal{H}_{ac}$ だから $g \in \mathcal{H}_{ac}$ として ~~~

$\therefore (g, e^{-itH} f) = \int e^{-it\lambda} \rho(\lambda) d\lambda \to 0$

R.L. //

Prop 11.2 $p \geq 2$, $p > d/2$ として $V \in L^p$

$H = -\frac{1}{2}\Delta + V$ (s.a.) とする. $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ b'dd

このとき $\| \chi_\Omega e^{-itH} \varphi \| \to 0$

$\varphi \in D(H)$ とする

∵ $\| \underbrace{\chi_\Omega (H+C)^{-1}}_{\shortparallel} \underbrace{e^{-itH} (H+C) \varphi}_{\to 0 \text{ weak}} \|$

$\underbrace{\chi_\Omega (H_0 + C)^{-1}}_{\text{cpt}} \underbrace{(H_0 + C)(H+C)^{-1}}_{\text{b'dd}}$ 適当な C で

あとは極限操作

Schrödinger eq $i \frac{d}{dt} \varphi = H\varphi$ $\therefore \varphi_t = e^{-itH} \varphi$

$\varphi(t) = e^{itH}\varphi \longrightarrow e^{itH_0}\varphi_\pm \quad (t \to \pm\infty)$

と思える

$$\| e^{itH}\varphi - e^{itH_0}\varphi_\pm \| = \| e^{itH_0} e^{-itH}\varphi - \varphi_\pm \| \to 0$$

(unitary)

$$\therefore \varphi_\pm = \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH_0} e^{-itH}\varphi$$

実際は $\varphi = \underbrace{\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}\varphi_\pm}_{= W_\pm \text{ と定める}}$

Def 11.3 $W_\pm$ wave op

$\mathrm{Ran}\, W_\pm = \mathcal{H}_{ac}$ asymptotic complete

Lemma 11.4 Suppose that $\exists W_\pm$. Then

1) $W_\pm e^{itH_0} = e^{itH} W_\pm$ $\quad f \in C_0^\infty$

2) $W_\pm (H_0 - z)^{-1} = (H-z)^{-1} W_\pm$ $\quad$ 2) $W_\pm f(H_0) = f(H) W_\pm$

3) $W_\pm H_0 = H W_\pm$ on $D(H_0)$ $\quad$ intertwining properties

☺ 1) easy

2) $\hat{f} \in L^1$ とする

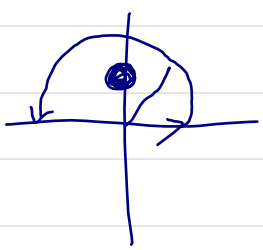
$$(f, F(H) g) = \int F(\lambda)\, d\mu_{fg} = \iint (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \hat{F}(k) e^{ik\lambda}\, d\mu_{fg}$$

$$= \int F(h) (2\pi)^{-\frac{1}{2}} (f, e^{-ikH} g)\, dh$$

$\therefore$ $F(H) W_\pm = W_\pm F(H_0)$

$$F(\lambda) = (\lambda - z)^{-1} \xrightarrow[F^{-1}]{} (2\pi)^{-\frac{1}{2}} \int (\lambda - z)^{-1} e^{i\lambda k}\, d\lambda$$

$$= \begin{cases} i\sqrt{2\pi}\, e^{-izs} & (s<0) \\ 0 & (s>0) \end{cases}$$



$\mathrm{Im}\, z > 0$

$z = a + ib$ $\quad b > 0$ $\quad \in L^1$.

3) $(H-z) W_\pm (H_0 - z)^{-1} = W_\pm$

$\exists s:=$ $(H-z) W_\pm = W_\pm (H_0 - z)$ ok

$\therefore$ $H W_\pm = W_\pm H_0$.

2019 1 22

ここから (12)

$W_\pm$ が a.c. $\Rightarrow$ $S = W_+^* W_-$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H} \arrow[r, shift left, "W_+"] & \mathcal{H}_{ac} \arrow[l, shift left, "W_+^*"] \\ \mathcal{H} \arrow[ur, "W_-"'] & \end{tikzcd}$$

+ well-defined

$* \ (Sf, Sg)$

$= (W_+^* W_- f, W_+^* W_- g)$

$= (W_- f, \boxed{W_+ W_+^*} W_- g)$

$\mathcal{H}_{ac}$ への proj

$= (W_- f, W_- g) = (f, g)$ 等長性から.

$\therefore$ S は $\mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unitary

Def 11.5 S を scattering operator

$$f(H_0) S = f(H_0) W_+^* W_-$$

$$W_\pm f(H_0) = f(H) W_\pm$$

$$W_+ f(H_0) = f(H) W_+$$

$$\downarrow$$

$$W_+^* f(H) = f(H_0) W_+^*$$

Lemma 11.6 $S f(H_0) = f(H_0) S$ commutative!

Thm 11.6 $D(H) = D(H_0)$, $\varepsilon > 0$.

$\langle x \rangle^{1+\varepsilon} V$ が H_0-b'dd $\to \exists W_I$

Short range

Outline

Cook method.

$$\frac{d}{dt}\left(e^{itH} e^{-itH_0}\varphi\right) = i e^{itH} V e^{-itH_0}\varphi \quad \forall \varphi \in D(H_0)$$

$$\therefore \quad e^{itH} e^{-itH_0}\varphi = \varphi + i\int_0^t e^{isH} V e^{-isH_0}\varphi \, ds$$

$\int_0^t \| V e^{-isH_0}\varphi \| ds < \infty$ を示せばいい.

① $V(H_0+1)^{-1}\langle x \rangle^{1+\varepsilon}$ b'dd

② $\left|\left(e^{-itH_0}\varphi\right)(x)\right| \le C_k |t|^{-k}$ $(|x| < a|t|)$

$\hat{\varphi} \in C_0^\infty$, $\varphi \in \mathcal{S}$ $\quad \hat{\varphi}(\xi) = 0$ $|\xi| \le b$ $\quad a < b$

$$\| V(H_0+1)^{-1}\langle x \rangle^{1+\varepsilon} \langle x \rangle^{-1-\varepsilon} \underbrace{(H_0+1)^{-1}\varphi}_{\tilde{\varphi}} \|$$

e^{-itH_0}

$$\le C \| \langle x \rangle^{-1-\varepsilon} (H_0+1)^{-1}\varphi \|$$

e^{-itH_0}.

stationary phase method.

$$\therefore \quad \| \langle x \rangle^{-1-\varepsilon} e^{-itH_0}\tilde{\varphi} \| \le \| \mathbb{1}_{\{|x| \le a|t|\}} \cdots \|$$

$$+ \| \mathbb{1}_{\{|x| > a|t|\}} \cdots \| \le C_k |t|^{-k} |at|^{\frac{d}{2}} + C\langle t \rangle^{-1-\varepsilon}$$

easy

$-k + \frac{d}{2} < -1$ になるように選ぶ //

ゆえに dense なところでは $\exists W_t$ がわかった
一般の場合は.

$$\| e^{itH} e^{-itH_0} \psi - e^{isH} e^{-isH_0} \psi \| = \| A_s \phi - A_t \phi \|$$

$$= \underbrace{\| A_s (\psi - \varphi) \|}_{\text{bdd}} + \underbrace{\| A_t (\psi - \varphi) \|}_{\text{bdd}} + \| (A_s - A_t)(\varphi) \|$$

$\downarrow$ ok

Cauchy 列になっている!

§12 極限吸收原理

Thm 12.1 Stone's theorem

A s.a.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left((H-\lambda-i\varepsilon)^{-1} - (H-\lambda+i\varepsilon)^{-1} \varphi, \ \varphi \right) d\lambda$$

$$= \left(E((a,b))\varphi, \varphi \right) + \frac{1}{2}\left(E(\{a\})\varphi + E(\{b\})\varphi, \ \varphi \right)$$

$$\because \ \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \int \left(\frac{1}{\mu-\lambda-i\varepsilon} - \frac{1}{\mu-\lambda+i\varepsilon} \right) d\mu_\varphi \, d\lambda$$

$$= \int \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{2i\varepsilon}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2} = \int \int_a^b \frac{\varepsilon/\pi}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2} d\lambda \, d\mu_\varphi$$

(1) $\mu = a$ $\qquad \int_a^b \frac{\varepsilon/\pi}{(a-\lambda)^2+\varepsilon^2} d\lambda \qquad a-\lambda = k$

$$\int_0^{a-b} \frac{\varepsilon/\pi}{k^2+\varepsilon^2} dk = \int_{b-a}^0 \frac{\varepsilon/\pi}{k^2+\varepsilon^2} dk = \frac{1}{\pi}\left[\arctan \frac{k}{\varepsilon} \right]_{b-a}^0$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctan \frac{b-a}{\varepsilon} \sim \frac{1}{2}$$

$\therefore \mu = a$ のとき $\frac{1}{2}$ 同様に $\mu = b$ のときも $\frac{1}{2}$

(2) $\mu \notin [a,b]$ のとき 0

(3) $\mu \in (a,b)$ のとき $\frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{2i\varepsilon}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2} = \int_a^b \frac{\varepsilon/\pi}{(\mu-\lambda)^2+\varepsilon^2} d\lambda$

$$= \int_a^\mu + \int_\mu^b \sim 1$$

結局： $\mu \in (a,b)$ のときは 1

$$\int_{\{a\}\cup\{b\}} \frac{1}{2}\, d\mu_\varphi + \int_{(a,b)} d\mu_\varphi \quad //$$

Def 12.2

A が I 上 absolutely cont $E_A(I)\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{ac}(A)$

e.g. $-\Delta$ は $[0,\infty)$ 上 abs. cont

もし A が I 上 abs cont $[a,b] \Subset I$ 記号の説明

ならば

$$\int_{(a,b)} d\mu_\varphi = \int_{(a,b)} d\left(E(I)\varphi,\ E(\lambda)E(I)\varphi\right) \qquad E(I)\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$$

$$= \int_{(a,b)} \xi_I(\lambda)\, d\lambda$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \left((A-\lambda-i\varepsilon)^{-1} - (A-\lambda+i\varepsilon)^{-1}\varphi,\ \varphi\right) d\lambda$$

$$\therefore \frac{1}{2\pi i}\left((A-\lambda-i\varepsilon)^{-1} - (A-\lambda+i\varepsilon)^{-1}\varphi,\ \varphi\right) = \frac{d}{d\lambda}\left(\varphi,\ E_A(\lambda)\varphi\right)$$

形式的に

$$\downarrow$$

$$\delta(A-\lambda)$$

Radon-Nykodim derivative が resolvent の境界値の差.

2019 · 1 · 28

(13) ここから

Lem 12.3: A s.a. I b'dd open ($\subset \mathbb{R}$) $D \subset \mathcal{H}$ dense

$\forall \varphi \in D$, $\exists F_\varphi(\cdot) \subset L^1(I)$ st $\sup_{\varepsilon>0} (\varphi, \delta_\varepsilon(A-\lambda)\varphi) \le F_\varphi(\lambda)$ $\forall \lambda \in I$

$\Rightarrow E(I)\mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{ac}$

∵ $\delta_\varepsilon(\lambda) = \dfrac{\varepsilon/\pi}{\lambda^2+\varepsilon^2} \to \delta(0)$ in the sense of distribution

$K = (a, b) \in I$ に対して

$$\lim \int_K (\varphi, \delta_\varepsilon(A-\lambda)\varphi)\, d\lambda = (\varphi, E((a,b))\varphi) + \frac{1}{2}(E(\{a\})\varphi, \varphi) + \frac{1}{2}(E(\{b\})\varphi, \varphi)$$

$$(E(\{a\})\varphi, \varphi) \overset{\angle}{=} \lim_{\nu\to 0} \lim_{\varepsilon\downarrow 0} \int_{-\nu+a}^{\nu+a} (\varphi, \delta_\varepsilon(A-\lambda)\varphi)\, d\lambda = \lim_{\nu\to 0} \int_{-\nu+a}^{\nu+a} F_\varphi(\lambda)\, d\lambda = 0$$

$$\therefore (\varphi, E((a,b))\varphi) = \lim_\varepsilon \int_K (\varphi, \delta_\varepsilon(A-\lambda)\varphi)\, d\lambda \le \int_K F_\varphi(\lambda)\, d\lambda$$

$$\| $$

$$\int \mathbb{1}_{(a,b)}(\lambda)\, d\mu_\varphi(\lambda) \le \int \mathbb{1}_{(a,b)} F_\varphi(\lambda)\, d\lambda$$

K $\forall \varepsilon$ $\exists A_n$ st $K \subset \bigcup A_n$ $\lambda(\bigcup A_n \setminus K) < \varepsilon$ とできる

$$(\varphi, E(K)\varphi) \le (\varphi, E(\bigcup A_n)\varphi) \le \int_{\underline{\bigcup A_n}} F(\lambda)\, d\lambda$$

$$\le \int_K + \underline{\int_{\bigcup A_n \setminus K}}$$

$$\le \int_K F(\lambda)\, d\lambda + \varepsilon. \quad \swarrow \nu.$$

$$\therefore (\varphi, E(K)\varphi) \le \int_K F(\lambda)\, d\lambda.$$

∴ abs. cont.

$\therefore$ $E(I)\varphi = \varphi_I$ とすると

$$(\varphi_I,\ E(K)\varphi_I) = (\varphi_I,\ E(I\cap K)\varphi_I) = \int_{I\cap K} F_\varphi(\lambda)\,d\lambda$$

$\lambda(K)=0 \Rightarrow \lambda(I\cap K)=0$.

$\varphi\in D$ は dense より, $\varphi\in\mathcal{H}$ に拡張できる. //

Lem 12.4 I open bdd, $D\subset\mathcal{H}$ dense

$$\left|(\varphi,\ (A-\lambda\mp i\varepsilon)^{-1}\varphi)\right| \le C_\varphi \quad (\forall\varepsilon>0,\ \lambda\in I)$$

$\Rightarrow$ A は I 上 abs cont.

(:) Lem 12.3 より 分かる.

Example: $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$ ~ $\frac{1}{2}|k|^2$ はこれと考えてみる.

$$(\varphi,\ \delta_\varepsilon(\cdots)\ \varphi) = \int \frac{|\hat\varphi|^2\,\varepsilon/\pi}{(\frac{1}{2}|k|^2-\lambda)^2+\varepsilon^2}\,dk$$

$$\delta_\varepsilon\left(\tfrac{1}{2}|k|^2-\lambda\right) = \frac{\varepsilon/\pi}{(\frac{1}{2}|k|^2-\lambda)^2+\varepsilon^2}$$

$$= \frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty dr \int_{S^{d-1}} \frac{|\hat\varphi(r\omega)|^2}{(\frac{1}{2}r^2-\lambda)^2+\varepsilon^2}\, r^{d-1}\,d\omega\,dr$$

$\frac{1}{2}r^2=\rho$, $r\,dr=d\rho$

$$\frac{\varepsilon}{\pi}\int_0^\infty d\rho \int \frac{|\hat\varphi(\sqrt{2\rho}\,\omega)|^2}{(\rho-\lambda)^2+\varepsilon^2}(2\rho)^{\frac{d-2}{2}}\,d\rho$$

$$\le C_1^2\, S_{d-1} \sup_{a<\rho<b}(2\rho)^{\frac{d-2}{2}} \int_a^b \frac{\varepsilon/\pi}{(\rho-\lambda)^2+\varepsilon^2}\,d\rho$$

$D = C_0^\infty$ とは $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subset L^2$ dense

$\operatorname{supp}\varphi \subset \{x \mid a < \frac{1}{2}|x|^2 < b\}$

$0 < a < b$ をとる.

$\|\varphi\|_\infty = G < \infty$

$$\int_a^b \frac{\varepsilon/\pi}{(\rho-\lambda)^2+\varepsilon^2}\,d\rho \qquad \rho-\lambda = k$$

$$= \int_{a-\lambda}^{b-\lambda} \frac{\varepsilon/\pi}{k^2+\varepsilon^2}\,dk = \frac{1}{\pi}\left(\arctan\frac{b-\lambda}{\varepsilon} - \operatorname{arctot}\frac{a-\lambda}{\varepsilon}\right) \leq 1$$

よって F_0 は $\forall I$ (bdd) で absolutely cont.

$$(\varphi,\ [A,B]\varphi) = (A^*\varphi,\ B\varphi) - (B^*\varphi,\ A\varphi) \qquad -(*)$$

B bdd, A unbdd $\qquad y \in \mathcal{H} \to \mathcal{H} \subset y^*$

$u \mapsto (u, \cdot)$

つまり $[A,B]\varphi \in D(A)^*$ と思える

$[A,B]$ が bdd op に拡張される $\Leftrightarrow \exists S$ bdd s.t.

(1) $(\varphi, S\varphi) = (A^*\varphi, B\varphi) - (B^*\varphi, A\varphi)$ $\varphi \in D(A)$ のとき

(2) S は bdd

bdd B が

$\in C^k(A)$級 $\leftrightarrow$ $e^{itA} B e^{-itA}$ が $\mathcal{H}$-valued C^k級.

Lemma 12.5

$[iA, B]$ が bdd に対応可 $\Leftrightarrow$ B が $C^1(A)$級

☺ $\frac{d}{dt}(\varphi,\ B(t)\psi) = \left(e^{itA}\varphi,\ [iA,B]e^{-itA}\psi\right)$ $\qquad \varphi, \psi \in D(A)$

$\therefore \left|\frac{d}{dt}(\varphi,\ B(t)\psi)\right| \le C_t \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$ $\qquad t=0$ とおく

$|(\varphi,\ [iA,B]\psi)| \le C_0 \|\varphi\| \cdot \|\psi\|$ //

逆に: $B(t)\varphi = B\varphi + \int_0^t e^{isA} \overbrace{[iA,B]}^{S} e^{isA}\varphi\, ds$

$\psi \in D(A)$ は $\varphi \in \mathcal{H}$ に拡大できる.

右辺は $C^1(A)$級になる //

$[B, iA]$

A, H s.a. とする　　H が $C^k(A)$ 級 とは

$(H-z)^{-1}$ が $C^k(A)$ 級　$\left(\forall z \in \rho(H)\right)$

Lemma 12.6　　H は $C^1(A)$ 級.

このとき　$(H-z)^{-1}[H, iA](H-z)^{-1} : D(A) \to D(A^*)$

は b'dd op に 一意的に 拡張される.

$(H-z)^{-1}[H, iA](H-z)^{-1}$ C S b'dd operator とする.

(∵)　H が $C^1(A)$ だから $[(H-z)^{-1}, iA]$ は b'dd に 拡大できる.

$\forall \varphi \in D(A)$

$A(H-z)^{-1}\varphi = (H-z)^{-1}A\varphi + [A, (H-z)^{-1}]\varphi$

から $(H-z)^{-1}\varphi \in D(A)$ が いえる.

$\therefore (\varphi, [(H-z)^{-1}, A]\psi) = -((H-z)^{-1}\varphi, [H, iA](H-z)^{-1}\psi)$,,

Thm 12.7 (Mourre)

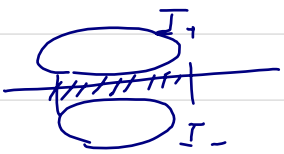
H は $C^2(A)$　$I \subset \mathbb{R}$ bdd区間　$c > 0$

$$E(I)[H, iA]E(I) \geq cE(I)$$

$\Rightarrow \forall I' \subset\subset I$　と $s > 1/2$

$$\sup_{z \in I_\pm'} \| \langle A \rangle^{-s} (H - z)^{-1} \langle A \rangle^{-s} \| \leq C < \infty$$

$$I_\pm' = \{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \in I',\ \pm \mathrm{Im}\, z > 0 \}$$



さらに

① $z \mapsto \langle A \rangle^{-s} (H - z)^{-1} \langle A \rangle^{-s}$ は $I_\pm'$ で Hölder cont

② $\langle A \rangle^{-s} (H - \lambda \pm i0)^{-1} \langle A \rangle^{-s}$　$(\lambda \in I)$ が存在する。

Cor 12.8　H は I 上で a.c.

Thm 12.8

$$E(I)[H, iA]E(I) \geqslant cE(I) + \underset{\text{cpt}}{K}$$

$\exists \{c_1 \cdots c_n\}$ s.t.　$I \setminus \{c_1 \cdots c_n\}$ で H は a.c.

よって Thm 12.7 の主張が成立する。

Example: $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$

$H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$, $H = H_0 + V$

$U(\theta)\varphi(x) = e^{d\theta/2}\varphi(e^\theta x)$ $\quad U(\theta) = e^{i\theta A}$

① 実は $A = \frac{1}{2}(xD_x + D_x x)$ check せよ.

② $[H_0, iA] = 2H_0$ check

$I = [a, b]$ $\quad E(I)[H_0, iA]E(I) = 2E(I)H_0E(I)$

$\geq 2aE(I)$

① H_0 は $C^\infty(A)$ ∵) $e^{i\theta A}(H_0 - z)^{-1}e^{-i\theta A} =$

$H_0 e^{-i\theta A}\varphi = H_0\varphi(e^\theta x)\cdot e^{d\theta/2} = \frac{1}{2}e^{2\theta}\varphi''(e^\theta x)e^{d\theta/2}$

$e^{i\theta A}H_0 e^{-i\theta A}\varphi = \frac{1}{2}e^{2\theta}\varphi''$ ∴ $(e^{2\theta}H_0 - z)^{-1} = e^{-2\theta}(H_0 - e^{-2\theta}z)^{-1}$

② $V \in C^2$ ならば H は $C^2(A)$

∴

$e^{i\theta A} V e^{-i\theta A} = V(e^\theta x)$

$\frac{\partial}{\partial\theta}V(e^\theta x) = \nabla V(e^\theta x)\cdot e^\theta x = (x\cdot\nabla V)(e^\theta x)$

∴ $\frac{\partial^k}{\partial\theta^k}V(e^\theta x) = (x\cdot\nabla^k V)(e^\theta x)$

よって $e^{i\theta A}(H_0 - z)e^{-i\theta A} = e^{2\theta}(H_0 + e^{2\theta}V_\theta - e^{2\theta}z)^{-1}$

② $[H, iA] = 2H_0 - x\cdot\nabla V(x) = 2H - 2\left(V + \frac{x\cdot\nabla V}{2}\right)$

③ $E_I [H, iA] E_J \overset{?}{=} 2a E_I + K$ where

$K = -2 E_I \underbrace{\left(V + \frac{1}{2} x\cdot\nabla V\right)}_{W} E_I = \bar{E}_I W E_I$

W は H − cpt. ∴ K は cpt.

∴ $E_I [H, iA] E_I = 2a E_I + K$ where

$K = -2 E_I \underbrace{\left(V + \frac{x}{2}\nabla V\right)}_{W} E_I$

$W \to 0$.

$W (H_0+z)^{-1}$ cpt

∴ $W (H_0 + V + z)^{-1}$

$= W \left((H_0+z)(1 + (H_0+z)^{-1} V)\right)^{-1}$

$= W (H_0+z)^{-1} \underbrace{(1 + (H_0+z)^{-1} V)^{-1}}$

W は H cpt

$K = -2 E_I W (H+i)^{-1} (H+i) E_I$ cpt

Report 問題　　2019 / 1 / 28 (Mon)

1) $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^1)$

$e^{-itH_0}\varphi = \int_{-\infty}^{\infty} G_t(x,y)\varphi(y)\,dy$　　G_t を求めよ

2) H s.a.　$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{ac} + \mathcal{H}_{sing}$

$\forall \varphi, \psi \in \mathcal{H}_{ac}$ に対して

$\lim_{t\to\pm\infty} (\varphi, e^{-itH}\psi) = 0$　　を示せ.

3) $H_0 = -\frac{1}{2}\Delta$, $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$　　$\sigma_{ac}(H_0) = [0,\infty)$ を示せ

4) $p \geq 2$, $p > d/2$, $V \in L^p(\mathbb{R}^d)$　$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^d)$

① $-\frac{1}{2}\Delta + V$ は s.a

②

$W_\pm = s\text{-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0}$ 存在すると仮定する

$W_\pm (H_0 - z)^{-1} = (H-z)^{-1} W_\pm$　を示せ.

③ $\varphi \in \mathcal{H}_{ac}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ 有界 なとき $\| \chi_\Omega e^{-itH}\varphi \| \to 0$ $(t\to\pm\infty)$

$\varphi \in D(H)$

を示せ.