くりこまれた基底状態の非摂動的解析理論

廣島文生

平成31 年11 月21 日

場の量子論に現れる Hamiltonian は, とりあえず紫外切断 (UV cutoff) を導入して自己共役作用素として定義される. 次に, この Hamiltonian を適当にくりこんで紫外切断のない Hamiltonian を定義する. 本講演では, このくりこんだ Hamiltonian の基底状態の存在とその性質 (特に局所性) を経路積分によって非摂動的に解析する方法を紹介する.

主に研究されている模型には, パウリフィールツ模型, Nelson 模型, スピンボゾン模型などやその相対論的な模型がある. 今回は Nelson 模型といわれるスカラー場とシュレディンガー作用素の相互作用系の (1) くりこみ理論と (2) 基底状態の解析を紹介する. これらの研究は [14] にまとめられている.

Nelson 模型の Hamiltonian H_ε はカットオフのパラメター $\varepsilon > 0$ ごとにヒルベルト空間

$$L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F} \cong \oplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$$

上に自己共役作用素として定義される. 簡単のため $N = 1$ とする.

基底状態の話:

$$H_\varepsilon \varphi_{\mathrm{g}} = e_0 \varphi_{\mathrm{g}}, \quad e_0 = \inf \mathrm{Spec}(H_\varepsilon),$$

となる φ_{g} を基底状態という. 1996-7 年頃には Arai-Hirokawa[1], Bach-Fröhlich-Sigal [2, 3, 4] で結合定数が小さいときに基底状態の存在が示された. 1998 年には汎関数積分をつかって Spohn[22] が任意結合定数でその存在を示し, 2000 年には Gérard が関数解析的な別証明を与えた [5]. 最終的には Griesemer-Lieb-Loss [6] が一般的な場合に示して決着した. Enhanced binding が FH-Spohn [16] で示され, くりこまれた場合の基底状態の存在は結合定数が十分小さいとき Hirokawa-FH-Spohn [9] で示された. また基底状態の縮退 (基底状態のはる線形空間の次元) は [10, 17, 11] の結果がある. 一連の結果は [13] にまとめられている.

くりこみの話: Nelson は 1963 年 [20], ある E_ε ($E_\varepsilon \to -\infty$) が存在して

$$H_\varepsilon - E_\varepsilon \to \exists H_\infty \quad (\varepsilon \to 0)$$

となることを示したと研究会で宣言したがその証明は不完全だった．しかし, [19] で見事に関数解析的な別証明を与えた．50 年後, Gubinelli-FH-Lőrinczi [7] は Nelson が不完全に終わらせた証明を完成させた．それは汎関数積分と確率解析的手法を用いるもので [19] とは本質的に異なる．今回はその証明の概略を超簡単に紹介する．

さらに Matte-Møller[18] は 2017 年に長大な論文で e^{-TH_∞} の汎関数積分表示を構成した．この表示を使って H_∞ の基底状態 $\varphi_{\rm g}$(くりこまれた基底状態という) が任意の結合定数で存在することが FH-Matte [15] で証明された．つまり

$$H_\infty\varphi_{\rm g} = e\varphi_{\rm g}, \quad \inf \mathrm{Spec}(H_\infty).$$

一意性は [18] で証明されている．次の目標は $\varphi_{\rm g}$ の性質を調べることにある．[12] で基底状態の存在だけから無限体積ギブス測度 μ_{Gibbs} の存在が証明された[1]．この事実を使うと $\varphi_{\rm g}$ の様々な局所性を示すことができる[2]大雑把位に言えば $(e^{-TH_\infty} f\otimes 1\!\!1, Ae^{-TH_\infty} f\otimes 1\!\!1)/\|e^{-TH_\infty} f\otimes 1\!\!1\|^2 = \mathbb{E}_{\mu_T}[A_T]$ と表せて, $T\to\infty$ の極限で

$$(\varphi_{\rm g}, A\varphi_{\rm g}) = \mathbb{E}_{\mu_{Gibbs}}[A_\infty].$$

個数作用素 N はボソンの個数を数える作用素である．$\varphi_{\rm g} = \oplus_{n=0}^\infty \varphi_{\rm g}^{(n)}$ と表せば $N\varphi_{\rm g}^{(n)} = n\varphi_{\rm g}^{(n)}$ だから, N の期待値は $(\varphi_{\rm g}, N\varphi_{\rm g}) = \sum n\|\varphi_{\rm g}^{(n)}\|^2$ になるが, 一般に $\sum n\|\varphi_{\rm g}^{(n)}\|^2 < \infty$ とは限らない[3]．ところが

$$\sum e^{\beta n}\|\varphi_{\rm g}^{(n)}\|^2 < \infty, \quad \forall\beta > 0$$

なるときボソン数は超指数減衰するという．N をエネルギの一低いところと高いところに分ける: $N = N_0 + N_\infty$. [18] の汎関数積分表示を使えば $\|e^{\beta N_\infty}\varphi_{\rm g}\|^2 < \infty$ が示せる．また μ_{Gibbs} によって

$$\|e^{\beta N_0}\varphi_{\rm g}\|^2 = \mathbb{E}_{\mu_{Gibbs}}[e^{-(1-e^\beta)\int_{-\infty}^0 ds \int_0^\infty dt W(B_s - B_t, s-t)}]$$

と表現できることから $\|e^{\beta N}\varphi_{\rm g}\|^2 < \infty$ が任意の $\beta \in \mathbb{R}$ で示せる [15].

[1] 基底状態の存在を仮定しない場合にも特別な模型で無限体積ギブス測度の存在が Osada-Spohn [21] で知られている．

[2] 例えばそれは SB 模型に応用された [8].

[3] $\sum \|\varphi_{\rm g}^{(n)}\|^2 = 1$ と正規化されている．

参考文献

[1] A. Arai and M. Hirokawa. On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model. *J. Funct. Anal.*, 151:455–503, 1997.

[2] V. Bach, J. Fröhlich, and I.M. Sigal. Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles. *Adv.Math.*, 137:299–395, 1998.

[3] V. Bach, J. Fröhlich, and I.M. Sigal. Renormalization group analysis of spectral problems in quantum field theory. *Adv.Math.*, 137:205–298, 1998.

[4] V. Bach, J. Fröhlich, and I.M. Sigal. Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation field. *Commun. Math. Phys.*, 207:249–290, 1999.

[5] C. Gérard. On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians. *Ann. H. Poincaré*, 1:443–459, 2000.

[6] M. Griesemer, E. Lieb, and M. Loss. Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. *Invent. Math.*, 145:557–595, 2001.

[7] M. Gubinelli, F. Hiroshima, and J. Lörinczi. Ultraviolet renormalization of the Nelson Hamiltonian through functional integration. *J. Funct. Anal.*, 267:3125–3153, 2014.

[8] M. Hirokawa, F. Hiroshima, and J. Lőrinczi. Spin-boson model through a Poisson driven stochastic process. *Math. Zeitschrift*, 277:1165–1198, 2014.

[9] M. Hirokawa, F. Hiroshima, and H. Spohn. Ground state for point particles interacting through a massless scalar bose field. *Adv. Math.*, 191:339–392, 2005.

[10] F. Hiroshima. Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics II. *J. Math. Phys.*, 41:661–674, 2000.

[11] F. Hiroshima. Multiplicity of ground states in quantum field models: applications of asymptotic fields. *J. Funct. Anal.*, 224:431–470, 2005.

[12] F. Hiroshima. Functional integral approach to semi-relativistic Pauli-Fierz models. *Adv. Math.*, 259:784–840, 2014.

[13] F. Hiroshima. *Ground states in quantum field models.* Springer, 2019.

[14] F. Hiroshima and J. Lőrinczi. *Feynman-Kac type theorems and its applications. volume 2 (2nd ed).* De Gruyter, to appear in 2019 536 pages.

[15] F. Hiroshima and O. Matte. Ground states and their associated Gibbs measures in the renormalized Nelson model. *arXiv:1903.12024*, preprint, 2019.

[16] F. Hiroshima and H. Spohn. Enhanced binding through coupling to a quantum field. *Ann. Henri Poincaré*, 2:1159–1187, 2001.

[17] F. Hiroshima and H. Spohn. Ground state degeneracy of the Pauli-Fierz model with spin. *Adv. Theor. Math. Phys.*, 5:1091–1104, 2001.

[18] O. Matte and J. Møller. Feynman-Kac formulas for the ultra-violet renormalized Nelson model. *arXiv:1701.02600*, preprint, 2017.

[19] E. Nelson. Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field. *J. Math. Phys.*, 5:1990–1997, 1964.

[20] E. Nelson. Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field. In *Proc. of a conference on analysis in function space, W. T. Martin and I. Segal (eds.)*, page 87. MIT Press, 1964.

[21] H. Osada and H. Spohn. Gibbs measures relative to Brownian motion. *Ann. Probab.*, 27:1183–1207, 1999.

[22] H. Spohn. Ground state of a quantum particle coupled to a scalar boson field. *Lett. Math. Phys.*, 44:9–16, 1998.