汎関数積分によるくりこみ理論と基底状態の非摂動的解析について

廣島文生　九大数理

1　お話

数学的場の量子論は, 1956 年に Segal [45, 46] によって測度論的手法が導入され,50 年代から 60 年代にかけて, 公理論的な場の量子論 (例えば [1]) 及び構成的場の量子論 (例えば [14, 47]) として発展した. 数学的場の量子論では量子系のエネルギー Hamiltonian は適当な Hilbert 空間の自己共役作用素として実現される. 自己共役作用素 H のスペクトルの下限 $\inf\sigma(H) = E$ を固有値にもつ固有ベクトル φ が存在すればこれを基底状態という:

$$H\varphi = E\varphi.$$

数学的な場の量子論において基底状態の存在と縮退度を確定することは最重要な課題である. その存在は紫外切断・赤外切断の有無, ボゾンの質量, ポテンシャルの挙動, 結合定数の大きさなど様々なファクターと複雑に絡み合っている. 1995 年頃に数学的場の量子論のスペクトル解析に関する研究でブレイクスルーがあった [2, 5, 4, 6, 11, 16, 48]. それは非摂動的なスペクトル解析といわれ, 基底状態, 共鳴,Lamb のずれの存在などを非摂動的に証明するものである. このブレイクスルーでは格子近似の理論, コンパクト作用素の理論, コンパクト集合の理論, 汎関数積分の方法など様々な方法が開発された. これらの結果は例えば拙著 [28] に詳しくまとめられている. その後 21 世紀に入り, 場の量子論に現れる Hamiltonian のスペクトルに関する大量の論文が出版され現在に至っている.

今回の報告の概略を説明する. ここで紹介する結果は [25, 17, 30] による. これらの結果の一部は [29, Chapter 3] にまとめられている.

Nelson は [41] で場の量子論の線形相互作用の模型の Hamiltonian を作用素論的手法でくりこむことに成功した. 実は 1963 年に測度論的手法によって証明を試みているが未完に終わっている. このことは [42] のイントロに記されている. Nelson が未完成だった測度論的なくりこみ理論は 2014 年 Gubinelli-FH-Lőrinczi [17] で 50 年ぶりに完成した. くりこまれた Nelson Hamiltonian$H_{\rm ren}$ の基底状態の存在に関して, これまでは結合定数 g が十分小さい特別な場合に Hirokawa-FH-Spohn [22] の結果があるだけだった. しかし FH-Matte [30] は Feynman-Kac 公式を用いて $H_{\rm ren}$ の基底状態の存在と非存在 (ある条件下で) を示した. また Matte-Møller [38] の Feynman-Kac 公式より $H_{\rm ren}$ の基底状態が存在すれば一意的であることが瞬時に示せる. さらに FH [25],Hirokawa-FH-Lőrinczi [21] の結果を応用して, パス空間上に $H_{\rm ren}$ に付随したギブス測度を構成することができ, その結果, 基底状態の局所性 (空間的減衰性の上下からの評価, ボゾン数の超指数減衰性, 場の作用素に関する Gaussian domination の上下からの評価) を示すことができる [30].

2　Nelson 模型の確率論的くりこみ理論

2.1　確率論的くりこみ理論

ボゾンと N 個の粒子の線形相互作用模型である Nelson 模型を定義する.[1]運動量 $k \in \mathbb{R}^3$ で質量 $\mu \geq 0$ のボゾンの相対論的なエネルギーは $\omega(k) = \sqrt{|k|^2 + \mu^2}$ で与えられる.Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^3)$[2] 上のボゾン Fock 空間 $\mathcal{F}$ を考える. $\mathcal{F}$ 上の量子場の自由 Hamiltonian は $\omega : L^2(\mathbb{R}^3) \to L^2(\mathbb{R}^3)$ を掛け算作用素とみなして, その第 2 量子化 $H_{\mathrm{f}} = d\Gamma(\omega)$ で与えられる. 一方, 粒子の Hamiltonian はポテンシャルを $V : \mathbb{R}^{3N} \to \mathbb{R}$ として $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ 上の Schrödinger 作用素

$$H_{\mathrm{p}} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N} \Delta_j + V$$

で与えられる. これから非結合 Hamiltonian はテンソル積 Hilbert 空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F}$ 上の作用素

$$H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}}$$

で与えられる. さて, 相互作用を導入する. それは場の作用素で与えられる. $x \in \mathbb{R}^3$ に対して

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(a^{\dagger}(e^{ik\cdot x}\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}) + a(e^{-ik\cdot x}\tilde{\hat{\varphi}}/\sqrt{\omega})\right)$$

とする. ここで $\widetilde{\hat{\varphi}}(k) = \hat{\varphi}(-k)$ である. $L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F} \cong \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} \mathcal{F} dx$ の同一視の下で $\phi = \sum_{j=1}^{N} \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} \phi(x_j) dx$ と定義する.つまり $(\phi\Psi)(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{j=1}^{N} \phi(x_j)\Psi(x_1, \ldots, x_N)$ がほとんど至る所の $(x_1, \ldots, x_N) \in \mathbb{R}^{3N}$ で成り立つ.

定義 2.1 (Nelson Hamiltonian) Nelson Hamiltonian は $H = H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}} + g\phi$ と定義される. ここで $g \in \mathbb{R}$ は結合定数を表す.

Nelson 模型の特徴は相互作用項 ϕ が線形であることである. 以降 $\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}, \hat{\varphi}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\hat{\varphi}(-k) = \overline{\hat{\varphi}(k)}$ を仮定する. この仮定の下で H は $D(H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1}) \cap D(\mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}})$ 上で自己共役作用素になる. さらに下から有界である. さて $\hat{\varphi} \to \mathbb{1}$ の極限を考える. ただし, このとき $1/\sqrt{\omega} \notin L^2(\mathbb{R}^3)$ なので $\phi(x)$ は定義されない. そのために"くりこみ"が必要になる. いま, 特別な紫外切断関数を考える:

$$\hat{\varphi}_{\varepsilon}(k) = e^{-\varepsilon|k|^2/2}\mathbb{1}_{|k|\geq\lambda}, \quad \varepsilon > 0. \tag{2.1}$$

ここで $\lambda \geq 0$ は赤外切断であり, 以下で λ を固定する.$\lambda = 0$ も含まれることに注意. 結局われわれの考察する Hamiltonian は $\varepsilon > 0$, $\lambda \geq 0$ をパラメターにもった

$$H_{\varepsilon} = H_{\lambda,\varepsilon} = H_{\mathrm{p}} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}} + g\phi_{\varepsilon} \tag{2.2}$$

になる. ここで ϕ_{ε} は ϕ で $\hat{\varphi} \to \hat{\varphi}_{\varepsilon}$ とおき換えたものである. さて,

$$E_{\varepsilon} = -N\int_{|k|\geq\lambda} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{2\omega(k)}\beta(k)dk \tag{2.3}$$

とする. ここで $\beta(k) = \frac{1}{\omega(k)+|k|^2/2}$. $E_{\varepsilon} \to -\infty (\varepsilon \downarrow 0)$ に注意する. Nelson は次を証明した.

[1]物理的には核子 (N 粒子) とパイ中間子 (ボゾン) の強い相互作用を表す.

[2]Fock 空間に関わる基本的な事柄, 生成・消滅作用素, 第 2 量子化, 自由 Hamiltonian は Appendix を参照せよ.

命題 2.2 (Nelson [42]) $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 $H_{\rm ren}$ で以下を満たすものが存在する:

$$\mathrm{s}-\lim_{\varepsilon\downarrow 0} e^{-T(H_\varepsilon - g^2 E_\varepsilon)} = e^{-TH_{\rm ren}}.$$

Nelson は [41] で H_Λ をユニタリー変換し作用素論的手法で命題 2.2 を示した.

この章では確率論的な別証明を与える. $(B_t)_{t\in\mathbb{R}} = (B_t^1, \ldots, B_t^N)_{t\in\mathbb{R}}$ は確率空間 $(\mathscr{X}, \mathcal{B}, \mathcal{W}^x)$ 上の $x \in \mathbb{R}^{3N}$ から出発する $3N$ 次元の two-sided ブラウン運動を表す. また $\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x = \mathbb{E}_{\mathcal{W}^x}$ は期待値を表す. 次の命題はよく知られている [29, Chapter 2].

命題 2.3 $f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$, $\mathbb{1} \in \mathcal{F}$ は真空とする. このとき

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH_\varepsilon} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x \Big[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds} e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon}\Big] dx. \tag{2.4}$$

ここで $S_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{-T}^T W_\varepsilon(B_s^i - B_t^j, s-t) dt$ はペア相互作用とよばれ, ペアポテンシャル W_ε は次で与えられる:

$$W_\varepsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-ik\cdot x} e^{-\omega(k)|t|} \mathbb{1}_{|k|\geq\lambda}}{2\omega(k)} dk.$$

$t \neq 0$ のとき $W_\varepsilon(x,t)$ は $W_\varepsilon(x,t) \to W_0(x,t)$ $(\varepsilon \downarrow 0)$. しかし $t = 0$ で $W_\varepsilon(0,0) \to \infty (\varepsilon \downarrow 0)$. $W_0(x,t)$ は $t = 0$ で特異性をもつ. $\varepsilon \downarrow 0$ のとき S_ε の対角成分だけが特異な部分である. しかし対角成分は 2 次元のルベーグ測度で測ればゼロである. 測度ゼロの集合上の無限大を取り除くために確率積分を利用する. また $0 < \tau \leq T$ を固定し, $[t]_T = -T \vee t \wedge T$ とする. S_ε を対角成分と非対角成分にわける. $S_\varepsilon = S_\varepsilon^{\rm d} + S_\varepsilon^{\rm od}$:

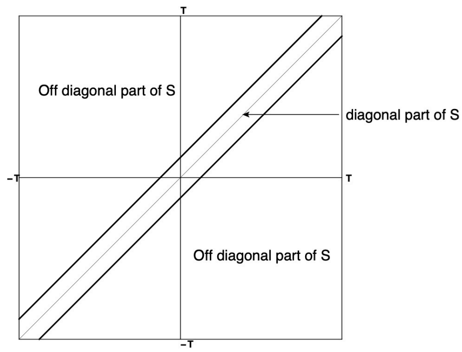

図 1: S_ε の積分領域

$$S_\varepsilon^{\rm d} = 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} W_\varepsilon(B_s^i - B_t^j, s-t) dt,$$

$$S_\varepsilon^{\rm od} = 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{[s+\tau]_T}^T W_\varepsilon(B_s^i - B_t^j, s-t) dt.$$

$S_\varepsilon^{\rm d}$ はを長方形 $[-T,T] \times [-T,T]$ の対角成分の近傍 $\{(t,t) \in \mathbb{R}^2 | |t| \leq T\}$ での積分. $S_\varepsilon^{\rm od}$ はそれ以外の部分を表す. $\tau = T$ のときは $S_\varepsilon^{\rm od} = 0$ となる. パスごとに $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} S_\varepsilon^{\rm od} = S_0^{\rm od}$ はすぐにわかる. 確率積分をつかって $S_\varepsilon^{\rm d}$ を評価できる. 本質的にくりこみの理論で V は大きな役割を果たさないので, 簡単のために $V = 0$ とおく. (2.4) の $\varepsilon \to 0$ の極限命題を求める. $T > 0$ を固定する. 次の関数を考える.

$$\varrho_\varepsilon(x,t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-ik\cdot x - \omega(k)|t|} \mathbb{1}_{|k|\geq\lambda}}{2\omega(k)} \beta(k) dk, \quad \varepsilon \geq 0.$$

この関数は $(\partial_t + \Delta_x)\varrho_\varepsilon(x,t) = -W_\varepsilon(x,t)$ を満たす. くりこまれた作用を次のように定義する:

$$S_\varepsilon^{\rm ren} = S_\varepsilon - 4NT\varrho_\varepsilon(0,0), \quad \varepsilon > 0.$$

これは $S_\varepsilon^{\rm ren}=S_\varepsilon^{\rm od}+X_\varepsilon+Y_\varepsilon+Z_\varepsilon$ のように表せる:

$$X_\varepsilon=2\sum_{i\neq j}^N\int_{-T}^T\varrho_\varepsilon(B_s^i-B_s^j,0)ds,\quad Y_\varepsilon=2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_s^{[s+\tau]_T}\nabla\varrho_\varepsilon(B_s^i-B_t^j,s-t)\cdot dB_t,$$
$$Z_\varepsilon=-2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varrho_\varepsilon(B_s^j-B_{[s+\tau]_T}^i,s-[s+\tau]_T)ds.$$

X_ε,$S_\varepsilon^{\rm od}$ と Z_ε は簡単に評価できる.

補題 2.4 **(X_ε, Z_ε の評価)**

(1) 定数 c_z,c_s が存在して $|Z_\varepsilon|\leq c_zT$ と $|S_\varepsilon^{\rm od}|\leq c_s(T+1)$ がパスと $\varepsilon\geq 0$ に一様に成立する.

(2) 任意の $\alpha>0$,$\varepsilon\geq 0$,$T>0$ に対して $\displaystyle\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x[e^{\alpha|X_\varepsilon|}]\leq e^{c_X\alpha T}$ を満たす定数 c_X が存在する.

Y_ε について考える. $\varepsilon>0$ のときは Fubini の定理より確率積分とルベーグ積分を交換してもいい. よって $Y_\varepsilon=\sum_{i=1}^N\int_{-T}^T\Phi_{\varepsilon,t}^idB_t^i$. ここで $\Phi_{\varepsilon,t}=(\Phi_{\varepsilon,t}^1,\ldots,\Phi_{\varepsilon,t}^N)$ は $\mathbb{R}^{3N}$ に値をとる確率過程:

$$\Phi_{\varepsilon,t}^i=2\sum_{j=1}^N\int_{[t-\tau]_T}^t\nabla\varrho_\varepsilon(B_s^i-B_t^j,s-t)ds.$$

Y_0 を $Y_0=\sum_{i=1}^N\int_{-T}^T\Phi_{0,t}^idB_t^i$ で定義する.

補題 2.5 **(Y_ε の評価)** $1/2<\theta<1$ とする. このとき定数 $c_Y=c_Y(\theta)$ が存在して, 任意の $\alpha>0$ に対して $\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x[e^{\alpha Y_\varepsilon}]\leq e^{c_Y(\alpha^2+\alpha^{\frac{2}{1-\theta}})(T+1)}$ $(\varepsilon\geq 0)$. また $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x[|Y_\varepsilon-Y_0|^2]=0$.

証明 $\int_{-T}^T|\Phi_{\varepsilon,t}|^2dt\leq 4c^2N\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\left(\int_{[t-\tau]_T}^t|B_s^i-B_t^j|^{-\theta}|s-t|^{-(1-\theta)}ds\right)^2dt$ となる. ここで Jensen の不等式と $|\nabla\varrho_\varepsilon(x,t)|\leq c|x|^{-\theta}|t|^{-(1-\theta)}$ を使った. この評価は $\varepsilon\in[0,1]$ に一様である. シュワルツの不等式を使えば

$$\begin{aligned}\int_{-T}^T|\Phi_{\varepsilon,t}|^2dt&\leq 4c^2N\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\left(\int_{[t-\tau]_T}^t|B_s^i-B_t^j|^{-2\theta}ds\right)\left(\int_{[t-\tau]_T}^t|s-t|^{-2(1-\theta)}ds\right)dt\\&\leq 4c^2\tau^{2\theta-1}N\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\left(\int_{[t-\tau]_T}^t|B_s^i-B_t^j|^{-2\theta}ds\right)dt\leq 4c^2\tau^{2\theta-1}NQ.\end{aligned}$$

ここで c は定数で ε に依らない. $Q=\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^Tds\int_s^{[s+\tau]_T}|B_s^i-B_t^j|^{-2\theta}dt$. Girsanov の定理から

$$\left(\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[e^{\alpha Y_\varepsilon}\big]\right)^2\leq\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[e^{2\alpha\int_{-T}^T\Phi_{\varepsilon,t}\cdot dB_t-\frac12(2\alpha)^2\int_{-T}^T|\Phi_{\varepsilon,t}|^2dt}\big]\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[e^{2\alpha^2\int_{-T}^T|\Phi_{\varepsilon,t}|^2dt}\big]\leq\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[e^{\gamma Q}\big].$$

ここで $\gamma=8c\sqrt{N}\alpha^2\tau^{2\theta-1}$. Jensen の不等式をもう一度つかって

$$\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[e^{\gamma Q}\big]\leq\int_{-T}^T\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_s^{s+\tau}|B_s^i-B_t^j|^{-2\theta}dt}\big]\frac{ds}{2T}.$$

ここで $[s+\tau]_T\leq s+\tau$ を使った. 右辺を次の補題 2.6 で評価すれば補題が従う. ■

Malliavin 解析の Clark-Ocone 公式 [31] を使うと次の命題が従う.

命題 2.6 (Bley-Thomas [8]) f は非負関数で $f_*(t) = \operatorname{ess\,sup}_{t\le s\le T} f(s)$ $(t \le T)$ とおく. $1 \le \alpha < 2$ とする. 次が従う.

(1) 各 j に対して非負定数 a_α,b_α が存在して

$$\mathbb{E}_{\mathcal{W}}\left[\exp\left(\int_0^T ds \int_0^s \frac{f(s-t)}{|B_s^j - B_t^j|^\alpha} dt\right)\right] \le \exp\left(a_\alpha \int_0^T \left(\int_0^s f_*(t)dt\right)^{\frac{2}{2-\alpha}} ds + b_\alpha \int_0^T ds \int_0^s f_*(t)t^{-\alpha/2}dt\right).$$

(2) $i \ne j$ とするとき非負定数 a'_α,b'_α が存在して

$$\sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^{2d}} \mathbb{E}_{\mathcal{W}}\left[\exp\left(\int_0^T ds \int_0^s \frac{f(s-t)}{|B_s^i + x - B_t^j - y|^\alpha} dt\right)\right] \le \exp\left(a'_\alpha T \left(\int_0^T f(t)dt\right)^{\frac{2}{2-\alpha}} + b'_\alpha T^{1-\alpha/2} \int_0^T f(t)dt\right).$$

(3) 各 j に対して非負定数 a''_α,b''_α が存在して

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\left[\exp\left(\int_0^T \frac{f(s)}{|B_s^j|^\alpha} ds\right)\right] \le \exp\left(a''_\alpha \int_0^T f_*(t)^{\frac{2}{2-\alpha}} dt + b''_\alpha \int_0^T f_*(t) t^{-\alpha/2} dt\right).$$

補題 2.7 定数 $c_{\rm ren}$ が存在して, 全ての $\alpha \in \mathbb{R}$,$\varepsilon > 0$,$f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ に対して次が成り立つ:

$$\int_{\mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x[f(B_{-T})h(B_T)e^{\alpha S_\varepsilon^{\rm ren}}]dx \le \|f\|\|h\| e^{c_{\rm ren}(\alpha^{\frac{1}{1-\theta}} + \alpha^2 + \alpha)(T+1)}.$$

証明 補題 2.4 と 2.5 から従う. ■

補題 2.8 $\alpha \in \mathbb{R}$ ならば $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{E}_{\mathcal{W}}\big[|e^{\alpha U_\varepsilon(x)} - e^{\alpha U_0(x)}|\big] = 0, \quad x \in \mathbb{R}^{3N}$, $U = {\rm od}, X, Y, Z$.

証明 $U = Z$ のときは簡単に示せる. $U = X$ とする. $V_C(x) = C \sum_{i\ne j}^N \frac{1}{|x^i - x^j|}$ とする. このとき

$$\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^0\big[|e^{\alpha X_\varepsilon(x)} - e^{\alpha X_0(x)}|\big] \le 2\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^0\big[|e^{\alpha \int_{-T}^T V_C(B_s^1 + x^1, \ldots, B_s^N + x^N)ds}\big] < \infty$$

がわかる. $X_\varepsilon(x) \to X_0(x)$a.s. なので補題 2.8 がわかる. $U = Y$ とする. $\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[|e^{\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)} - 1|^2\big] \to 0$ を示せば十分.

$$\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\Big[\left(e^{\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)} - 1\right)^2\Big] = \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[e^{2\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)}\big] + 1 - 2\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[e^{\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)}\big]$$

だから $\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x[e^{\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)}] = 1$ を示す. 確率変数 $\delta\Phi_t = \Phi_{\varepsilon,t} - \Phi_{0,t}$ を $Y_\varepsilon - Y_0 = \int_{-T}^T \delta\Phi_t \cdot dB_t$ となるように定義する. Girsanov の定理から $1 = \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x[e^{\alpha \int_{-T}^T \delta\Phi_t \cdot dB_t - \frac{\alpha^2}{2} \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt}]$. 故に

$$\left(\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[e^{\alpha(Y_\varepsilon - Y_0)}\big] - 1\right)^2 \le \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[e^{2\alpha \int_{-T}^T \delta\Phi_t \cdot dB_t}\big] \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\Big[\left(1 - e^{-\frac{\alpha^2}{2} \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt}\right)^2\Big]. \tag{2.5}$$

また

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[e^{2\alpha \int_{-T}^T \delta\Phi_t \cdot dB_t}\big] \le \sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}} \left(\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[e^{4\alpha^2 \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt}\big]\right)^{1/2}, \tag{2.6}$$

$$\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\Big[\left(1 - e^{-\frac{\alpha^2}{2} \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt}\right)^2\Big] \le \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\Big[\left|\frac{\alpha^2}{2} \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt\right|^2\Big] \to 0 \quad (\varepsilon \downarrow 0). \tag{2.7}$$

(2.7) は補題 2.5 で示されている. (2.6) の右辺は ε に一様に有界. 故に (2.5) の右辺はゼロに収束することがわかる. $U = S^{\rm od}$ のときも同様にわかる. ■

補題 2.9 $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(f\otimes 1\!\!1, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}h\otimes 1\!\!1)=\int_{\mathbb{R}^{3N}}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}\big]dx$ が成り立つ．ここで

$$
\begin{aligned}
S_0^{\mathrm{ren}}=&\,2\sum_{i\neq j}^N\int_{-T}^T\varrho_0(B_s^i-B_s^j,0)ds+2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\left(\int_{-T}^t\nabla\varrho_0(B_s^i-B_t^j,s-t)ds\right)\cdot dB_t\\
&-2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varrho_0(B_T^i-B_s^j,T-s)ds.
\end{aligned}\tag{2.8}
$$

証明 Feynman-Kac 型積分公式より

$$
(f\otimes 1\!\!1, e^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}h\otimes 1\!\!1)=\int_{\mathbb{R}^{3N}}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}\big]dx \tag{2.9}
$$

である．$S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}=S_\varepsilon^{\mathrm{od}}+X_\varepsilon+Y_\varepsilon+Z_\varepsilon$ と telescoping によって

$$
\left|\int_{\mathbb{R}^{3N}}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[f(B_{-T})h(B_T)\left(e^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}-e^{\alpha S_0^{\mathrm{ren}}}\right)\big]dx\right|\leq\int_{\mathbb{R}^{3N}}|f(x)|\left(\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[|h(B_T)|^2\big]\right)^{1/2}E_\varepsilon(x)dx.
$$

ここで $E_\varepsilon(x)=\left(\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[\left(e^{\alpha S_\varepsilon}-e^{\alpha S_0}\right)^2\big]\right)^{1/2}$．また $\sup_{x\in\mathbb{R}^{3N}}E_\varepsilon(x)<\infty$ かつ $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}E_\varepsilon(x)=0$ なのでルベーグの収束定理より (2.9) の右辺は $\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}]dx(\varepsilon\downarrow 0)$ に収束する．よって補題 2.9 がわかる．また $\tau=T$ とすれば (2.8) がわかる． ■

紫外切断のくりこみ理論で最も本質的な部分が $H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0)$ の下からの一様有界性を示すことにある．Nelson [42] ではほとんどがこの下からの一様評価に費やされている．

補題 2.10 定数 $C\in\mathbb{R}$ があって $H_\varepsilon+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0)>C$ が $\varepsilon>0$ に一様に成り立つ．

証明 補題 2.4 と 2.5 から, 定数 a と b が存在して $\left(\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x\big[e^{g^2(S_\varepsilon^{\mathrm{od}}+X_\varepsilon+Y_\varepsilon+Z_\varepsilon)}\big]\right)^{1/2}\leq ae^{b(g^{\frac{4}{1-\theta}}+g^4+g^2)(T+1)}$ が全ての $T>0$ で成立することがわかる．関数 $w(x^1,...,x^N)=\sum_{j=1}^N|x^j|^2$ を考える．H_ε に δw を加えたものを $H_\varepsilon(\delta)$ と表す．もちろん $\delta\geq 0$. $H_\varepsilon(\delta)$ は至るところ正の基底状態 $\varphi_{\mathrm{g}}(\delta)$ をもつことが示せる [48]．特に $(f\otimes 1\!\!1,\varphi_{\mathrm{g}}(\delta))\neq 0$ が任意の $0\leq f\in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ．その結果

$$
\inf\sigma\left(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0)\right)=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log(f\otimes 1\!\!1, e^{-T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}f\otimes 1\!\!1) \tag{2.10}
$$

が成り立つ. また $w\geq 0$ だから

$$
(f\otimes 1\!\!1, e^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}f\otimes 1\!\!1)\leq\|f\|^2ae^{b(g^{\frac{4}{1-\theta}}+g^4+g^2)(T+1)}.
$$

これは (2.10) から $\inf\sigma\left(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0)\right)+\frac{b(g^{\frac{4}{1-\theta}}+g^4+g^2)}{2}\geq 0$ を意味する．大事なことは b が δ に依っていないことである．よって $|(F,e^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}G)|\leq\|F\|\|G\|e^{b(g^{\frac{4}{1-\theta}}+g^4+g^2)T}$ が従う．$F,G\in\mathcal{H}$ とする．$\lim_{\delta\downarrow 0}(F,e^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}G)=(F,e^{-2T(H_\varepsilon(0)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}G)$ なので

$$
|(F,e^{-2T(H_\varepsilon(0)+g^2N\varrho_\varepsilon(0,0))}G)|\leq\|F\|\|G\|e^{b(g^{\frac{4}{1-\theta}}+g^4+g^2)T}.
$$

$H_\varepsilon = H_\varepsilon(0)$ なので $\inf\sigma(H_\varepsilon + g^2 N\varrho_\varepsilon(0,0)) + \frac{b(g^{\frac{4}{1-\theta}}+g^4+g^2)}{2} \geq 0$. $C = -\frac{b(g^{\frac{4}{1-\theta}}+g^4+g^2)}{2}$ とおけば系が従う. ■

命題 2.2 の測度論的証明 [Nelson[41],Gubinelli-FH-Lőrinczi [17]] を以下で与える:

証明 稠密な部分空間 $\mathscr{D} \subset \mathcal{H}$ を次で定義する.

$$\mathscr{D} = \left\{ f \otimes F(\phi(f_1), \ldots, \phi(f_n))1\!\!1 \,|\, F \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n), f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), 1 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N}, f \in L^2(\mathbb{R}^{3N}) \right\}.$$

$F, G \in \mathcal{H}$,$C_\varepsilon(F,G) = (F, e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N\varrho_\varepsilon(0,0))}G)$ とする. $F, G \in \mathscr{D}$ に対して $C_\varepsilon(F,G)$ が $\varepsilon \downarrow 0$ で収束することがわかる. 一様な不等式 $\|e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N\varrho_\varepsilon(0,0))}\| < e^{-tC}$ と $\mathscr{D}$ が $\mathcal{H}$ で稠密ということから $\{C_\varepsilon(F,G)\}_\varepsilon$ がコーシー列となる. $C_0(F,G) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} C_\varepsilon(F,G)$ とする. そうすれば $|C_0(F,G)| \leq e^{-tC}\|F\|\|G\|$. Riesz の定理より有界作用素 T_t で $C_0(F,G) = (F, T_t G)$, $F, G \in \mathcal{H}$, となるものが存在する. よって $\mathrm{s}-\lim_{\varepsilon\downarrow 0} e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N\varrho_\varepsilon(0,0))} = T_t$. さらに $T_t T_s = T_{t+s}$ もすぐに従う. $e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N\varrho_\varepsilon(0,0))}$ は対称なので, T_t も対称. また $(F, T_t G)$ は $t = 0$ で $F, G \in \mathscr{D}$ に対して連続になることもわかる. $\mathscr{D}$ は $\mathcal{H}$ で稠密,$\|T_t\|$ は $t = 0$ の近傍で一様に有界なので, T_t は $t = 0$ で強連続になる. 故に下から有界な自己共役作用素 H_{ren} で $T_t = e^{-tH_{\mathrm{ren}}}$,$t \geq 0$, となるものが存在することが半群に関する Stone の定理 [36, Prop.4.81] わかる. $E_\varepsilon = -g^2 N\varrho_\varepsilon(0,0)$ とおけば証明完了. ■

2.2 くりこみ項

E_ε の正体を考える. $N = 1$,$V = 0$ とする. 全運動量作用素 (total momentum) を $P_{\mathrm{tot}} = -i\nabla \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes \int k a^\dagger(k) a(k) dk$ と定義すれば $[H_\varepsilon, P_{\mathrm{tot}}] = 0$ がわかるから H_ε を P_{tot} のスペクトルで分解することができる: $H_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^3}^\oplus H_\varepsilon(P) dP$. ここで $\mathbb{R}^3$ は P_{tot} の結合スペクトルである. 実は

$$H_\varepsilon(P) = \frac{1}{2}(P - P_{\mathrm{f}})^2 + H_{\mathrm{f}} + g\phi_\varepsilon(0)$$

となることがわかる. ここで $P_{\mathrm{f}} = \int k a^\dagger(k) a(k) dk$. $P = 0$ のときの $H_\varepsilon(P = 0)$ の基底状態エネルギーを $E_\varepsilon(g^2)$ とおく. *i.e.*, $\inf\sigma(H_\varepsilon(0)) = E_\varepsilon(g^2)$. そして $E_\varepsilon(g^2) = \sum_{n=0}^\infty a_n g^{2n}$ と展開し, 基底状態 φ_{g} を $\varphi_{\mathrm{g}} = 1\!\!1 + g\phi_1 + g^2\phi_2 + \cdots$ と展開すれば $\phi_1 = -(\frac{1}{2}P_{\mathrm{f}}^2 + H_{\mathrm{f}})^{-1}\phi_\varepsilon(0)1\!\!1$ なので

$$a_2 = -(1\!\!1, \phi_\varepsilon(0)\phi_1) = -(\phi_\varepsilon(0)1\!\!1, (\frac{1}{2}P_{\mathrm{f}}^2 + H_{\mathrm{f}})^{-1}\phi_\varepsilon(0)1\!\!1) = E_\varepsilon$$

となり $a_2 = E_\varepsilon$ がわかる. この事実を汎関数積分から導きたい. 命題 2.3 と同様に次を示すことができる. [24] も参照.

$$(1\!\!1, e^{-2TH_\varepsilon(0)}1\!\!1)_{\mathcal{F}} = \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^0\big[e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon}\big].$$

$\inf\sigma(H_\varepsilon(0)) = E_\varepsilon(g^2)$ だから

$$E_\varepsilon(g^2) = -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\log(1\!\!1, e^{-2TH_\varepsilon(0)}1\!\!1) = -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\log\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^0\big[e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon}\big] \tag{2.11}$$

となる. $S_\varepsilon = S_\varepsilon^{\mathrm{ren}} + 4T\varrho_\varepsilon(0,0)$ である. 次の補題がキーになる補題である.

補題 2.11 結合定数 g に依らない定数 $b, c > 0$ が存在して, 全ての $\varepsilon > 0$ で

$$\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^0\big[e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}\big] \leq \exp\left(b(c + (g^4 + g^{\frac{4}{1-\theta}})(T+1) + g^2\log T) + c(\tau)\frac{g^2}{2}T\right).$$

ここで $c(\tau) = 8\pi\int_\lambda^\infty e^{-\varepsilon r^2}e^{-\tau r}dr$.

証明 $S_\varepsilon^{\rm ren}=S_\varepsilon^{\rm od}+Y_\varepsilon+Z_\varepsilon$ とおく. $\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^0\big[e^{\alpha Y_\varepsilon}\big]\le e^{(\alpha^2+\alpha^{\frac{2}{1-\theta}})(T+1)b_1}$ は証明した. ここで $b_1>0$ は定数. また $|\varrho_\varepsilon(B_T-B_s,T-s)|\le|\varrho_\varepsilon(0,T-s)|<M$ となる定数 M が存在し, かつ $|\varrho_\varepsilon(0,u)|\le\frac{C}{u}$ となるから $|Z_\varepsilon|\le 2\int_0^{2T}\varrho_\varepsilon(0,u)du\le 2\left(\int_0^1+\int_1^{2T}\right)\varrho_\varepsilon(0,u)du\le 2M+C\log(2T)$. 最後に

$$|S_\varepsilon^{\rm od}|\le 2\int_{-T}^{T-\tau}ds\int_{S+\tau}^T dt\int_{|k|\ge\lambda}\frac{1}{2\omega(k)}e^{-\varepsilon|k|^2}e^{-\omega(k)|s-t|}dk\le c(\tau)T.$$

■

定理 2.12 (FH [26, 27]) 次が成立する.

$$\lim_{g\to0}\frac{E_\varepsilon(g^2)}{g^2}=E_\varepsilon,\quad \lim_{\varepsilon\downarrow0}|E_\varepsilon(g^2)-g^2E_\varepsilon|<\infty. \tag{2.12}$$

証明 b と $c(\tau)$ は補題 2.11 で与えた定数とする. このとき,

$$\left|\frac{E_\varepsilon(g^2)}{g^2}+\varrho_\varepsilon(0,0)\right|\le\frac12\left(b(g^4+g^{\frac{4}{1-\theta}})+\frac12c(\tau)\right). \tag{2.13}$$

これは

$$E_\varepsilon(g^2)=-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\log\mathbb{E}_{\mathcal{W}}\big[e^{\frac{g^2}{2}(S_\varepsilon^{\rm ren}+4T\varrho_\varepsilon(0,0))}\big]=-g^2\varrho_\varepsilon(0,0)-\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\log\mathbb{E}_{\mathcal{W}}\big[e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon^{\rm ren}}\big] \tag{2.14}$$

から従う. よって $\lim_{g\to0}\left|\frac{E_\varepsilon(g^2)}{g^2}-E_\varepsilon\right|\le\frac14c(\tau)$. ここで τ は任意かつ $c(\tau)\to0(\tau\to\infty)$. また $c(\tau)<\infty$ なので (2.12) が従う. ■

$E_\varepsilon(0)=0$ なので定理 2.12 から $E_\varepsilon=\frac{dE_\varepsilon(g^2)}{dg^2}\Big\lceil_{g^2=0}$ となる. そのキーになる等式は (2.14) だった. 直感的には $e^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon^{\rm ren}}$ の期待値の対数 $/g^2$ の極限なので右辺が $g^2\to0$ の極限でゼロに収束するようにはみえないが, 確率積分の項から g^4 が現れてゼロに収束する. ミラクルな感じがする. また $\lim_{\varepsilon\downarrow0}|E_\varepsilon(g^2)-g^2E_\varepsilon|$ が有界となることを摂動論的に示すことは自明ではない. 確率積分を通して Nelson のくりこみ項と基底状態エネルギーを関連づけることができた. このような状況で確率積分が現れることに深いものを感じる.

3 くりこまれた Nelson 模型の基底状態の存在・非存在

この章では $N=1$, $g=1$ とおく. $\varphi_{\rm g}$ を基底状態とする $H\varphi_{\rm g}=E\varphi_{\rm g}$. ここで $E=\inf\sigma(H)$. また, この章では $e^{-\varepsilon|k|^2/2}$ を $\mathbb{1}_{|k|\le\Lambda}$ とおきかえ, E_Λ は E_ε で $e^{-\varepsilon|k|^2/2}$ を $\mathbb{1}_{|k|\le\Lambda}$ におき換えたものである. E_Λ を引き去った Nelson Hamiltonian を $H_{\lambda,\Lambda}$ と表す. つまり

$$H_{\lambda,\Lambda}=H-E_\Lambda.$$

$H_{\lambda,\Lambda}$ の $\Lambda\to\infty$ の極限 $H_{\lambda,\infty}$ が存在することは命題 2.2 と同様に示すことができる.

3.1　生成消滅作用素の指数型関数による汎関数積分表示

紫外切断が存在するときの基底状態の存在証明に関する結果を紹介する．$\mu > 0$ のときは Bach-Fröhlich-Sigal [5, 6],Arai-Hirokawa [2] による格子近似による方法, Griesemer-Lieb-Loss [16] による binding 条件による方法, Gérard [11] によるコンパクト作用素による方法が知られている．続いて $\mu = 0$ のときはスペクトルの下限が連続スペクトルの端点になっているために, 基底状態の存在証明はハードな問題であった．一般的な方法として $\mu > 0$ のときの規格化された基底状態の族 $\{\varphi_{\rm g}^\mu\}$ は Hilbert 空間の単位球上にあることに注意する. その極限として $\mu = 0$ のときの基底状態を構成する. そのためには

$$\mathrm{w} - \lim_{\mu\to 0} \varphi_{\rm g}^\mu \neq 0$$

を示せばいいことが知られている [2]. その方法論として (1) Pull-through 公式による方法 [5, 6, 2], (2) ソボレフ空間のコンパクトな埋め込みを使う方法, [16][3] (3) コンパクト作用素を使う方法 [11], (4) 汎関数積分による方法 [48] がよく知られている.(1)–(4) の手法では紫外切断と赤外切断が必要で, さらに (1)–(4) には各々以下のような条件が必要である: (1) 結合定数が十分小さい, (2) 紫外切断関数 $\hat{\varphi}$ のサポートが有界, (3) $(H_{\rm p} + i)^{-1}$ がコンパクト, (4)$H_{\rm p}$ が離散スペクトルのみをもつ. 詳しくは [28, Chapter 1] を参照せよ.

われわれは以下を応用して基底状態の存在・非存在を解析する:

(1) 汎関数積分,　(2) 熱半群の超縮小性,　(3)Kolmogorov − Riesz − Frechet の定理 [10] の応用.

汎関数積分を応用するために以下で $\Lambda < \infty$ と $\Lambda = \infty$ の場合の Feynman-Kac 型積分公式を与える.

補題 3.1 (Feynman-Kac 型積分公式 $\Lambda < \infty$)

$$(F, e^{-tH_{\lambda,\Lambda}} G)_{\mathcal{H}} = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x \big[(F(B_0), I_t(\Lambda) G(B_t))_{\mathcal{F}} \big] dx.$$

ここで,$S_\Lambda^{\rm ren}$ は $S_\varepsilon^{\rm ren}$ で $e^{-\varepsilon|k|^2/2}$ を $\mathbb{1}_{|k|\le\Lambda}$ におきかえたもので

$$I_t(\Lambda) = \exp(\frac{1}{2} S_\Lambda^{\rm ren}) \exp\left(- \int_0^t V(B_s) ds \right) \exp(a^\dagger(U_t^\Lambda)) \exp(-tH_{\rm f}) \exp(a(\bar{U}_t^\Lambda)),$$
$$U_t^\Lambda = - \int_0^t \mathbb{1}_{\lambda\le|k|\le\Lambda} \frac{e^{-|s|\omega(k)}}{\sqrt{2\omega(k)}} e^{-ikB_s} ds, \quad \bar{U}_t^\Lambda = - \int_0^t \mathbb{1}_{\lambda\le|k|\le\Lambda} \frac{e^{-|s-t|\omega(k)}}{\sqrt{2\omega(k)}} e^{ikB_s} ds.$$

定理 3.2 (Feynman-Kac 型積分公式 $\Lambda = \infty$ [17, 38])

$$(F, e^{-tH_{\lambda,\infty}} G) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^x \big[(F(B_0), I_t(\infty) G(B_t))_{\mathcal{F}} \big] dx.$$

ここで,$I_t(\infty)$ は $I_t(\Lambda)$ で $\Lambda = \infty$ としたもので,$S_\infty^{\rm ren} = S_0^{\rm ren}$.

[17] では稠密な空間上で Feynman-Kac 型積分公式が与えられ, [38] では $\mathcal{H}$ 上で公式が与えられた.

[3] $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ を測度有界な集合とする. このとき, 埋め込み $\iota : W^{1,p}(\Omega) \to L^{p^*}(\Omega)$ は有界 $p^* = dp/(d-p)$, $\iota : W^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ はコンパクト $1 < q < p^*$.

3.2 有界な $\mathrm{D}\subset\mathbb{R}^3$ と $\mu>0$ の場合

以下 $\lambda>0$ を固定する．$\mathrm{D}\subset\mathbb{R}^3$ とし，$\tau_{\mathrm{D}}(x)=\inf\{t>0|B_t+x\notin\mathrm{D}\}$ は D からの脱出時間. $H=H_{\mathrm{D},\mu,\Lambda}$ は Feynman-Kac 型積分公式:

$$(F,e^{-tH_{\mathrm{D},\mu,\Lambda}}G)=\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x_{\mathcal{W}}\big[\mathbb{1}_{\tau_{\mathrm{D}}(x)\geq t}(F(B_0),I_t(\Lambda)G(B_t))_{\mathcal{F}}\big]dx.$$

で定義する．特に $H_{\mathrm{ren}}=H_{\mathbb{R}^3,\mu,\infty}$ である．Schrödinger 表現をとれば $\mathcal{F}\cong L^2(Q)$ となる.A.3 を参照. このとき $L^2(\mathrm{D})\otimes\mathcal{F}\cong L^2(\mathrm{D}\times Q)$ という同型対応が得られる．$\|\cdot\|_p$ を $L^p(\mathrm{D}\times Q)$ のノルムとする.

定理 3.3 (FH-Matte [30]) $\mathrm{D}\subset\mathbb{R}^3$ は有界,$\mu>0$,$\Lambda\leq\infty$ とする．このとき $e^{-tH_{\mathrm{D},\mu,\Lambda}}$ は超縮小作用素 (hypercontracive) になる *i.e.*,$\exists p>2$ *s.t.* $e^{-tH_{\mathrm{D},\mu,\Lambda}}:L^2\to L^p$．特に $H=H_{\mathrm{D},\mu,\Lambda}$ の基底状態が存在する.[4]

証明 $\Lambda=\infty$ の場合を証明する．$p=e^{t\mu/3}+1>2$ とする．このとき $e^{-\frac{t}{6}H_{\mathrm{f}}}:L^2\to L^p$ が知られている [43].[5] $e^{-sH_{\mathrm{f}}}$ と $e^{-s(-\Delta)}$ の超縮小性より

$$\|e^{-tH}\Psi\|_p^p=\int_{\mathrm{D}}\|e^{-\frac{t}{6}H_{\mathrm{f}}}e^{\frac{t}{6}H_{\mathrm{f}}}e^{-tH}\Psi(x)\|^p_{L^p(Q)}dx\leq\int_{\mathrm{D}}\|e^{\frac{t}{6}H_{\mathrm{f}}}e^{-tH}\Psi(x)\|^p_{L^2(Q)}dx\leq C\|\Psi\|_2^p$$

となる．ここで $e^{-tH}\Psi(x)=\mathbb{E}^x_{\mathcal{W}}[\mathbb{1}_{\tau_{\mathrm{D}}(x)\geq t}I_t(\infty)\Psi(B_t)]$ の表現を使って $\|e^{\frac{t}{6}H_{\mathrm{f}}}e^{-tH}\Psi(x)\|^p_{L^2(Q)}$ を評価した．Appendix A.4 を参照せよ. ■

3.3 非有界な $\mathrm{D}\subset\mathbb{R}^3$ と $\mu=0$ の場合

$\mathrm{D}_n\subset\mathbb{R}^3$ は有界集合とする．$\varphi_{\mathrm{g}}^{n,m,l}$ は $H_{\mathrm{D}_n,\mu_m,\Lambda_l}$ の基底状態を表す．ここで

$$\mathrm{D}_n\uparrow\mathbb{R}^3\ (\text{無限体積極限}),\ \mu_m\to0\ (\text{massless 極限}),\ \Lambda_l\to\infty\ (\text{くりこみ})$$

の極限を考える．強位相で $\{\varphi_{\mathrm{g}}^{n,m,l}\}_{n,m,l}$ の相対コンパクト性を示したい．そうすれば $\exists$ 部分列 n_k,m_k,l_k s.t. $\varphi_{\mathrm{g}}=\exists\mathrm{s}-\lim_{n_k,m_k,l_k\to\infty}\varphi_{\mathrm{g}}^{n_k,m_k,l_k}\neq0$ となる．このとき φ_{g} は $H_{\mathbb{R}^3,0,\infty}=H_{\mathrm{ren}}$ の基底状態になる．キーとなるのはアスコリ=アルツェラ定理の L^p 版である以下の命題である.

命題 3.4 (Kolmogorov-Riesz-Fréchet) $A\subset L^p(\mathbb{R}^n)$ とする．$\tau_hf=f(\cdot+h)$ はシフト作用素．次を仮定する: (1) $\displaystyle\lim_{|h|\to0}\sup_{f\in A}\|\tau_hf-f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}=0$, (2)$\forall\epsilon>$ に対して $\exists\Omega_\epsilon\subset\mathbb{R}^n$ *s.t.* $\displaystyle\sup_{f\in A}\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n\setminus\Omega_\epsilon)}<\epsilon$. このとき A は相対コンパクト．つまり $\bar{A}$ はコンパクト.

$\Psi\in L^2(\mathbb{R}^3_x)\otimes\mathcal{F}$ に対して次を定める:

$$(a\Psi)(k)=\Big(\sqrt{n}(J_n\Psi^{(n)})(k)\Big)_{n=1}^{\infty},\quad N_{a,b}=\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{a\leq|k|\leq b}\|(a\Psi_n)(k)\|^2_{\mathcal{F}}dk$$

ここで $J_n:L^2(\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^{3n})\to L^2(\mathbb{R}^3;L^2(\mathbb{R}^3_x\times\mathbb{R}^{3(n-1)}))$ で $(J_nf)(k)=f(k,\cdot),\ k\in\mathbb{R}^3$.

[4] 有限測度空間上の L^2 空間の超縮小作用素 T は $\|T\|$ が固有値になる.[47]

[5] $\|T\|^2\leq(p-1)/(q-1)$ のとき $\Gamma(T):L^p\to L^q$. また $\|e^{-tH_{\mathrm{f}}}\|\leq e^{-\mu t}$.

	$\Lambda<\infty$	$\Lambda=\infty$
$\lvert g\rvert \ll 1$	Bach-Fröhlich-Sigal (1999) [4]	Hirokawa-FH-Spohn (2005) [22]
$\forall g$	Spohn (1998) [48], Gérard (2000) [11]	FH-Matte (2018) [30]

図 2: Nelson 模型の基底状態 ($\mu=0,\lambda>0$ のとき)

補題 3.5 (FH-Matte [30]) $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{H}$ は有界集合とする．$F_\delta(k)=F(|f|/\delta)$, $F\in C^\infty(\mathbb{R})$ で $0\le F(k)\le 1$, $F(k)=0(|k|<1)$ $F(k)=1(|k|>2)$ とする．次の (1)-(4) を仮定する:

(1) $\displaystyle\lim_{R\to\infty}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{|x|\ge R}\|\Phi_n(x)\|^2_{\mathcal{F}}dx=0$, (2) $\displaystyle\lim_{|y|\to 0}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^3}\|\Phi_n(x+y)-\Phi_n(x)\|^2_{\mathcal{F}}dx=0$,

(3) $\forall\delta\in(0,1]$ に対して $\displaystyle\lim_{|h|\to 0}\sup_{n\in\mathbb{N}}\int_{\mathbb{R}^3}\|(F_\delta a\Phi_n)(k)-(F_\delta a\Phi_n)(k+h)\|^2_{\mathcal{F}}dk=0$,

(4) $N_{0,\infty}<\infty$, $\displaystyle\lim_{a\to\infty}N_{a,\infty}=0,\lim_{b\downarrow 0}N_{0,b}=0$. このとき $\{\Phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathcal{H}$ の相対コンパクト集合になる．

$E_{\mathrm{D},\Lambda}=\inf\sigma(H_{\mathrm{D},\mu,\Lambda})$ と $\Sigma_{\mathrm{D},\Lambda}=\lim_{R\to\infty}\Sigma^R_{\mathrm{D},\Lambda}=\lim_{R\to\infty}\inf\sigma(H_{\mathrm{D}\cap B_R,\mu,\Lambda})$ を定義する．この定義は [44, 15] による．$\mathrm{D}=\emptyset$ ならば $\inf\sigma(H_{\mathrm{D},\Lambda})=\infty$ である．次を binding 条件という:

$$(\text{binding 条件})\quad \Sigma_{\mathrm{D},\Lambda}>E_{\mathrm{D},\Lambda}\quad \Lambda\le\infty.$$

$\Lambda<\infty$ のときは binding 条件が適当な条件下で示されている ([16],[28, Prop.3.11,Cor.3.12]). $\Lambda=\infty$ のときは次が示せる ([30, Example 3.14]).

例 3.6 $E^0_{\mathbb{R}^3,\Lambda}$ を $V=0$ のときの基底状態エネルギーとする．$\inf\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mathrm{p}})>\inf\sigma(H_{\mathrm{p}})$ かつ $\Lambda<\infty$ で $\Sigma_{\mathbb{R}^3,\Lambda}>E^0_{\mathbb{R}^3,\Lambda}+\inf\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mathrm{p}})$ のとき $\Sigma_{\mathbb{R}^3,\infty}>E_{\mathbb{R}^3,\infty}$ が示せる．これは収束 $e^{-tH_{\mathbb{R}^3,\mu,\Lambda}}\to e^{-t(H_{\mathbb{R}^3,\mu,\infty})}$ が一様位相で成立することから従う．

補題 3.7 (局所性) $\lambda>0$ とする．D は有界, $\mu>0$, $\Lambda\le\infty$ とし φ_{g} を $H_{\mathrm{D},\mu,\Lambda}$ の基底状態とする．

(空間的局所性) Binding 条件を仮定する．このとき $\Delta=\Sigma^R_{\mathrm{D},\Lambda}-E_{\mathrm{D},\Lambda}-4/R^2$ として $\|e^{c\Delta|x|}\varphi_{\mathrm{g}}\|<\infty$.

(ボゾン数の局所性) N を個数作用素とすれば, D,Λ,μ に依らない定数 M があって $\|N^{1/2}\varphi_{\mathrm{g}}\|<M$.

定理 3.8 (存在, FH-Matte [30]) $\lambda>0$ とする．D は非有界, $\mu=0$, $\Lambda=\infty$ とする．Binding 条件 $\Sigma_{\mathrm{D},\infty}>E_{\mathrm{D},\infty}$ を仮定する．このとき $H_{\mathrm{D},\mu,\Lambda}$ の基底状態が存在する．

証明 $\varphi^{n,m,l}_{\mathrm{g}}$ を $H_{\mathrm{D}_n,\mu_m,\Lambda_l}$ の基底状態とする．ここで $\mathrm{D}_n\subset\mathbb{R}^3$ は有界, $\mu_m>0$, $\Lambda_l<\infty$ で $\mathrm{D}_n\uparrow\mathrm{D}(n\to\infty)$, $\mu_m\to 0(m\to\infty)$, $\Lambda_l\to\infty(l\to\infty)$. 補題 3.7 から有界集合 $\{\varphi^{n,m,l}_{\mathrm{g}}\}$ が補題 3.5 の条件 (1)-(4) を満たすことがわかる．よって補題 3.5 より必要であれば部分列をとって強収束の意味で $\varphi^{n,m,l}_{\mathrm{g}}\stackrel{n,m,l\to\infty}{\longrightarrow}\varphi_{\mathrm{g}}\neq 0$ が存在することがわかる．故に φ_{g} は $H_{\mathrm{D},0,\infty}$ の基底状態になる． ■

3.4 赤外発散・非存在・非 Fock 表現

$\lambda=0$ は赤外特異条件といわれる.$\Lambda<\infty$ のときには赤外特異条件下で基底状態の非存在が知られている [3, 9, 12, 37].

定理 3.9 (非存在,FH-Matte [30]) $\lambda=0$ とする．$\mathrm{D}\subset\mathbb{R}^3$, $\mu=0$,$\Lambda\le\infty$ とする．このとき $H_{\mathrm{D},\mu,\Lambda}$ の基底状態は存在しない．

Arai は [1] で $\Lambda<\infty$ かつ $\lambda=0$ のとき Gross 変換した Nelson Hamiltonian, G, の基底状態が存在することを証明した．H は基底状態を持たないので, もちろん $H\not\cong G$ である．G は Nelson Hamiltonian の非 Fock 表現といわれる．H_{ren} についても同様なことが示せる．

定理 3.10 (非 Fock 表現,FH-Matte [30]) $\lambda=0$ とする．$\mathrm{D}\subset\mathbb{R}^3$,$\mu=0$,$\Lambda\le\infty$ とする．このとき Gross 変換した $H_{\mathrm{D},\mu,\Lambda}$, $G_{\mathrm{D},\mu,\Lambda}$, は基底状態をもつ. 特に $H_{\mathrm{D},\mu,\Lambda}\not\cong G_{\mathrm{D},\mu,\Lambda}$ である．

4　くりこまれた基底状態の局所性

この章では H_{ren} の基底状態 φ_{g} の存在を仮定する. そのため $\lambda>0$ と仮定する．φ_{g} の様々な局所性について考える. 注意することはわれわれは H_{ren} の存在は知っているがその具体的な形は二次形式または Feynman-Kac 公式でしか与えられていないということである. しかし [7] を拡張することにより, 基底状態の性質を調べることができる．O をオブザーバブルとする. 数学的には $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素である．$(\varphi_{\mathrm{g}},O\varphi_{\mathrm{g}})$ を評価したい．O として興味のある例は $e^{+\beta N}, e^{+\beta\phi(f)^2}, e^{|x|}$ などである．

4.1　ボゾン数の局所性

はじめに $(\varphi_{\mathrm{g}},e^{+\beta N}\varphi_{\mathrm{g}})$ を考える.$\Lambda<\infty$ のときは $(\varphi_{\mathrm{g}},e^{+\beta N}\varphi_{\mathrm{g}})<\infty$ が示されている．$\Lambda=\infty$ のときはどうか？物理的に考えると $\Lambda<\infty$ のときは大きな運動量を切断した模型なので,φ_{g} に含まれる大きな運動量のボゾンの個数は 0 個になる．一方 $\Lambda=\infty$ とした場合は運動量の大きなボゾンの個数が果たして局所化されているのか自明ではない．しかし Feynman-Kac 公式を使うと運動量の大きなボゾン数の局所性を瞬時に示すことができる．いま運動量の大きさが 1 以上の個数作用素を $N_+=d\Gamma(\mathbb{1}_{|k|\ge1})=\int_{|k|\ge1}a^\dagger(k)a(k)dk$ とし $N_-=N-N_+$ とおく．

補題 4.1 $\varphi_{\mathrm{g}}\in D(e^{\beta N_+})$ が任意の $\beta\ge0$ で成り立つ．

証明 $\varphi_{\mathrm{g}}=e^{tE}e^{-tH_{\mathrm{ren}}}\varphi_{\mathrm{g}}$ だから $\|e^{\beta N}\varphi_{\mathrm{g}}\|=e^{tE}\|e^{\beta N}e^{-tH_{\mathrm{ren}}}\varphi_{\mathrm{g}}\|$ と Feynman-Kac 公式から

$$\Big(F,e^{\beta N}e^{-tH_{\mathrm{ren}}}G\Big)=\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x_{\mathcal{W}}\big[e^{\frac12 S_0^{\mathrm{ren}}}e^{-\int_0^t V(B_s)ds}\,(F(B_0),AG(B_t))\big]dx.$$

ここで $A=e^{\beta N}e^{a^\dagger(U_t^\infty)}e^{-tH_{\mathrm{f}}}e^{a(\bar U_t^\infty)}=e^{a^*(e^{\beta\mathbb{1}_{|k|\ge1}}U_t^\infty)}e^{\beta N_+}e^{-tH_{\mathrm{f}}}e^{a(\bar U_t^\infty)}$. $e^{\beta N_+}e^{-tH_{\mathrm{f}}}=\Gamma(e^{-t\omega+\mathbb{1}_{|k|\ge1}\beta})$ なので $t>\beta$ のとき $e^{\beta N_+}e^{-tH_{\mathrm{f}}}$ は有界である．■

次に N_- の局所性を考える．実は赤外発散の問題があり $\lambda=0$ のときにはいくらでもエネルギーがゼロに近いボゾンが現れて局所性は成り立たない (実際は基底状態が存在しない)．$\lambda>0$ でも, N_- の局所性の証明は [25, 21] で構築されたギブス測度を使えば証明できる．

補題 4.2 $\varphi_{\mathrm{g}}\in D(e^{\beta N_-})$ が任意の $\beta\ge0$ で成り立つ．

証明 $(\mathscr{X},\mathcal{B})$ 上の確率測度 $\mu_t(\cdot)$ を

$$\mu_t(A)=\frac{1}{Z_t}\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x_{\mathcal{W}}\big[\mathbb{1}_A\mathcal{L}_t\big]dx,\quad A\in\mathcal{B}$$

で定める. ここで $f \geq 0$ で $\mathscr{L}_t = f(B_{-t})f(B_t)e^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}e^{-\int_{-t}^{t}V(B_s)ds}$. 次のように計算できる:

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{-\beta N_-}\varphi_{\mathrm{g}}) = \lim_{t\to\infty}\frac{(e^{-tH_{\mathrm{ren}}}f\otimes\mathbb{1}, e^{-\beta N_-}e^{-tH_{\mathrm{ren}}}f\otimes\mathbb{1})}{\|e^{-tH_{\mathrm{ren}}}f\otimes\mathbb{1}\|^2} = \lim_{t\to\infty}\mathbb{E}_{\mu_t}\left[e^{-(1-e^{-\beta})\int_{-t}^{0}ds\int_0^t Wdr}\right],$$

ここで

$$W = \int_{0\leq|k|\leq\lambda}\frac{e^{-|r-s|\omega(k)}e^{-ik(B_r-B_s)}}{\omega(k)}dk$$

確率測度 μ_∞ で以下を満たすものが存在することが [25] で示されている.

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{-\beta N_-}\varphi_{\mathrm{g}}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-(1-e^{-\beta})\int_{-\infty}^{0}ds\int_0^\infty Wdr}\right].$$

この μ_∞ を H_{ren} に付随した Gibbs 測度という. 解析接続により $\beta\in\mathbb{C}$ 全体に拡張する.

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{\beta N_-}\varphi_{\mathrm{g}}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-(1-e^{\beta})\int_{-\infty}^{0}ds\int_0^\infty Wdr}\right] \quad \text{for} \quad \beta\in\mathbb{C}.$$

特に全ての $\beta > 0$ に対して $\|e^{+\beta N_-}\varphi_{\mathrm{g}}\| < \infty$. ■

定理 4.3 (FH-Matte [30]) $\varphi_{\mathrm{g}} \in D(e^{\beta N})$ が任意の $\beta > 0$ で成り立つ.

証明 補題 3.1 と 3.2 から $(\varphi_{\mathrm{g}}e^{\beta N}\varphi_{\mathrm{g}}) = (e^{\beta N_+}\varphi_{\mathrm{g}}, e^{\beta N_-}\varphi_{\mathrm{g}}) = \|e^{\beta N_+}\varphi_{\mathrm{g}}\|\cdot\|e^{\beta N_-}\varphi_{\mathrm{g}}\| < \infty$. ■

4.2 Gaussian domination

1 次元調和振動子 $h = -\Delta + |x|^2 - 1$ を考える. 固有値 n の固有ベクトル $hf_n = nf_n$, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, は $f_n(x) = H_n(x)e^{-|x|^2}$ である. ここで H_n はエルミート多項式. すぐに $\lim_{\beta\uparrow 1/2}\|f_n e^{\beta|x|^2}\| = 0$ がわかる.Nelson Hamiltonian の基底状態に関しても同じ性質が満たされることが Gibbs 測度を使って示せる.

補題 4.4 $\beta > 0$,$g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$ とする. ただし $\hat{g}/\omega, \hat{g}/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^3)$. このとき

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{-\beta\phi(g)^2}\varphi_{\mathrm{g}}) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta\|\hat{g}/\sqrt{\omega}\|^2}}\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-\frac{\beta K(g)^2}{1+\beta\|\hat{g}/\sqrt{\omega}\|}}\right]. \quad (4.1)$$

ここで $K(g)$ は次で定義される確率変数である.

$$K(g) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}(e^{-|r|\omega}e^{-ikB_r}\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}, \hat{g}/\sqrt{\omega})dr.$$

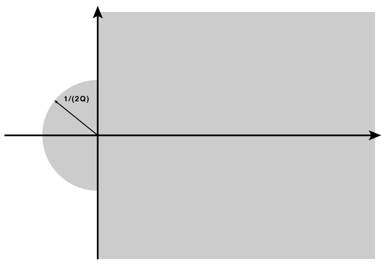

図 3: 解析接続領域

証明 $|K(g)| \leq \|\hat{\varphi}/\omega\|\|\hat{g}/\omega\| < \infty$ に注意する. 補題 4.2 と同じように次を示すことができる:

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{ik\beta\phi(g)}\varphi_{\mathrm{g}}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-k^2\beta^2 I_g/2}e^{-ik\beta I_X}\right].$$

ここで $I_g = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}\frac{|\hat{g}(k)|^2}{2\omega(k)}dk$, $I_X = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^3}dk\frac{\hat{\varphi}(k)\overline{\hat{g}(k)}}{2\omega(k)}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\omega(k)|s|}e^{-ikX_s}ds$ これを計算すると

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{-\beta^2\phi(g)^2/2}\varphi_{\mathrm{g}}) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}e^{-k^2/2}(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{ik\beta\phi(g)}\varphi_{\mathrm{g}})dk = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2 I_g}}\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{-\frac{\beta^2 K(g)^2/2}{1+\beta^2 I_g}}\right].$$

$\beta^2/2$ を $\beta > 0$ におき換えると補題が従う. ■

定理 4.5 (FH-Matte [30]) $g \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^3)$ で $\hat{g}/\omega, \hat{g}/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\beta \in \mathbb{C}$ は図 *3* の領域に含まれているとする．ただし $2Q = \|\hat{g}/\sqrt{\omega}\|^2$. このとき $\varphi_{\rm g} \in D(e^{(\beta/2)\phi(g)^2})$ で

$$\|e^{(\beta/2)\phi(g)^2}\varphi_{\rm g}\|^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta\|\hat{g}/\sqrt{\omega}\|^2}}\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[e^{\frac{\beta K(g)^2}{1-\beta\|\hat{g}/\sqrt{\omega}\|^2}}\right].$$

特に $\lim_{\beta\uparrow(\|\hat{g}/\sqrt{\omega}\|^2)^{-1}}\|e^{(\beta/2)\phi(g)^2}\varphi_{\rm g}\| = \infty$.

5 結語

(くりこみ) [13] ではローレンツ多様体上に定義された Nelson 模型のくりこみ理論が展開されている. この模型に対する測度論的手法によるくりこみ理論も興味がそそられる．また相対論的な運動項をもった Nelson Hamiltonian

$$(\sqrt{-\Delta+m^2}-m+V)\otimes\mathbb{1}+\phi+\mathbb{1}\otimes H_{\rm f}+V$$

のくりこみ可能性は筆者の知る限り成功していないと思われる.

(相対論的 QED) 相対論的 Pauli-Fierz 模型

$$H = \sqrt{(-i\nabla_z - A)^2+m^2}-m+V\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes H_{\rm rad}$$

の解析も盛んに行われている．[18, 19, 20, 25, 32, 33, 34, 35, 39] などで汎関数積分を使ったスペクトル解析が行われている．[25] では本質的自己共役性と e^{-tH} の Feynman-Kac 型積分表示が与えられ, [18] では自己共役性が示された. 本質的自己共役性の証明には $e^{-tH}: D \hookrightarrow D$ となる不変部分空間を見つける．非相対論的な場合は [23]．[34, 35, 39] では $m > 0$ のときの基底状態の存在が示されている．[19] では $m = 0$ かつ $\mu > 0$ な場合の基底状態の存在が示され, [20] では $m = 0$ かつ $\mu = 0$ な場合の基底状態の存在が示された.

	$m > 0$	$m = 0$
$\mu > 0$	————	Könenberg-Matte-Stockmeyer [34, 35]
$\mu = 0$	Hidaka-FH [18]	Hidaka-FH-Sasaki [20]

図 4: 相対論的 Pauli-Fierz 模型の基底状態

A Fock 空間・第２量子化・生成消滅作用素

A.1 Fock 空間

場の量子論を記述するためには量子の生成・消滅を表現しなくてはならない．量子力学の描像では量子の個数は変化しないが場の量子論では量子が生成と消滅を繰り返し, 量子の個数はその期待値だけが意味をもつ．場の量子論にはボーズ統計とフェルミ統計が存在する. ボーズ統計に従う量子がボゾンで, フェルミ統計に従うのがフェルミオンである. 気持ちはフェルミオンが粒でボゾンがフェルミオンの粒々をつなぐノリである. 例えば量子電気力学では電子がフェルミオンで光子がボゾンになる．ボーズ統計によれば 3 量子の状態関数 $f_1(x)f_2(y)f_3(z)$ は $3\times3=9$ 次元空間上の関

数であるが,$(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3$ に関して対称でなければならない．これは 3 つの量子に固有の名前をつけて区別することができないことを意味する．つまり,$\mathfrak{S}_3$ を $\{x,y,z\}$ の置換全体として $\frac{1}{3!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_3}f_1(\pi(x))f_2(\pi(y))f_3(\pi(z))$ がボーズ統計での 3 量子状態を表す. これは $f_1\otimes_s f_2\otimes_s f_3$ または $S_3(f_1\otimes f_2\otimes f_3)$ のように表される．そこで $\mathscr{W}$ を 1 つの量子を表す Hilbert 空間とし, その n-重対称テンソル積空間がボーズ統計での n 量子空間であると定義する．つまり次のように考える. ボゾンの状態関数の空間は $\otimes_{\rm s}^n\mathscr{W}$ を $\mathscr{W}$ の n-重対称テンソル積としてその無限直和空間

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}(\mathscr{W})=\bigoplus_{n=0}^{\infty}\otimes_{\rm s}^n\mathscr{W}$$

とする．ただし $\otimes_{\rm s}^0\mathscr{W}=\mathbb{C}$. $\mathcal{F}$ に内積を定めて位相を入れる．$\Psi=\oplus_{n=0}^{\infty}\Psi^{(n)},\Phi=\oplus_{n=0}^{\infty}\Phi^{(n)}\in\mathcal{F}$ の内積は $(\Psi,\Phi)_{\mathcal{F}}=\sum_{n=0}^{\infty}(\Psi^{(n)},\Phi^{(n)})_{\otimes_{\rm s}^n\mathscr{W}}$ で定義する．内積空間 $(\mathcal{F},(\cdot,\cdot)_{\mathcal{F}})$ は $\mathscr{W}$ 上の ボゾン Fock 空間といわれる. 以降 Fock 空間と呼ぶことにする．これは Hilbert 空間である．Fock 空間 $\mathcal{F}$ はベクトル列 $(\Psi^{(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ で $\Psi^{(n)}\in\otimes_{\rm s}^n\mathscr{W}$ かつ

$$\|\Psi\|_{\mathcal{F}}^2=\sum_{n=0}^{\infty}\|\Psi^{(n)}\|_{\otimes_{\rm s}^n\mathscr{W}}^2<\infty$$

となるものと同一視される．$1\!\!1=(1,0,0,...)$ は Fock 真空とよばれる．いま $\|\Psi\|_{\mathcal{F}}=1$ とする.$\|\Psi^{(n)}\|^2$ は Ψ の粒子数を観測したときに粒子数が n になる確率を与えると解釈する．よって $\sum_{n=0}^{\infty}n\|\Psi^{(n)}\|^2$ は Ψ の粒子数の期待値を与えることになる. さらにある $\beta>0$ に対して

$$\sum_{n=0}^{\infty}e^{\beta n}\|\Psi^{(n)}\|^2<\infty$$

となれば Ψ の粒子数 n の確率が指数的に小さくなることを意味する.

生成・消滅作用素という $\mathcal{F}$ 上の 2 つの閉作用素を定義する．生成作用素 $a^\dagger(f)$ は

$$(a^\dagger(f)\Psi)^{(n)}=\sqrt{n}S_n(f\otimes\Psi^{(n-1)}),\quad n\geq 1,$$

$(a^\dagger(f)\Psi)^{(0)}=0$ で定義される.S_n は対称化作用素である. これらは可閉作用素でその閉包も同じ記号で書くことにする．定義域は

$$D(a^\dagger(f))=\left\{(\Psi^{(n)})_{n\geq0}\in\mathcal{F}\left|\sum_{n=1}^{\infty}n\|S_n(f\otimes\Psi^{(n-1)})\|_{\mathcal{F}}^2<\infty\right.\right\}.$$

さらに消滅作用素は $a(f)=(a^\dagger(\bar{f}))^*$ で定義する.$a^\sharp(f)$ は f について線形である．名前からわかるように $a^\dagger(f)$ はボゾン数を一つ増やし, $a(f)$ は一つ減らす作用である. 実際 $a(f):\otimes_s^n\mathscr{W}\to\otimes_s^{n-1}\mathscr{W}$, $a^\dagger(f):\otimes_s^n\mathscr{W}\to\otimes_s^{n+1}\mathscr{W}$ のように作用する．$a^\sharp(f)$ は $\otimes_s^n\mathscr{W}$ に制限すれば有界作用素になるが $\mathcal{F}$ 上の作用素としては非有界作用素である.

$$\mathcal{F}_{\rm fin}=\left\{(\Psi^{(n)})_{n\geq0}\in\mathcal{F}\left|\exists M\ s.t.\ \Psi^{(m)}=0\quad(\forall m\geq M)\right.\right\}$$

は有限粒子部分空間といわれる．$a,a^\dagger$ は $\mathcal{F}_{\rm fin}$ を不変にするので,$a^\sharp$ の代数的な関係式を導くには有用な集合である.$\mathcal{F}_{\rm fin}$ 上で正準交換関係

$$[a(f),a^\dagger(g)]=(\bar{f},g)1\!\!1,\quad[a(f),a(g)]=0,\quad[a^\dagger(f),a^\dagger(g)]=0$$

を満たす.a,$a^\dagger$ は対称作用素ではないので, これらの線形和で対称な作用素を定義する. はじめに場の作用素 $\Phi(f)$ は和で定義される:

$$\Phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^\dagger(f) + a(\bar{f})).$$

またその共役運動量作用素は $i\times$ 差で定義される:

$$\Pi(f) = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^\dagger(f) - a(\bar{f})).$$

これらは対称作用素であることはすぐにわかるが, 実際 $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$ 上で本質的自己共役作用素であることも示される. 以降その自己共役拡大を同じ記号で表す. すぐに

$$[\Phi(f), \Pi(g)] = i\mathrm{Re}(f,g), \quad [\Phi(f), \Phi(g)] = i\mathrm{Im}(f,g), \quad [\Pi(f), \Pi(g)] = i\mathrm{Im}(f,g)$$

がわかる.

A.2 第 2 量子化

第 2 量子化 Γ を定義する. $C(\mathscr{W})$ を $\mathscr{W}$ 上の縮小作用素の集合とする. 同様に $C(\mathcal{F})$ も定義する.$T \in C(\mathscr{W})$ とする. T の第 2 量子化 $\Gamma(T)$ を $\Gamma(T) = \bigoplus_{n=0}^\infty (\otimes^n T)$ で定義する. ここで $\otimes^0 T = \mathbb{1}$.$\Gamma(T)$ も縮小作用素になる.Γ は

$$\Gamma : C(\mathscr{W}) \to C(\mathcal{F})$$

なる関手である. 関手 Γ は半群の性質をみたし, さらに $C(\mathscr{W})$ は $*$-代数である. つまり $\Gamma(S)\Gamma(T) = \Gamma(ST)$, $\Gamma(S)^* = \Gamma(S^*)$, $\Gamma(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$ が $S, T \in C(\mathscr{W})$ に対して成り立つ. 自己共役作用素 h に対して $\{\Gamma(e^{ith}) : t \in \mathbb{R}\}$ は強連続 1 径数ユニタリー群になる. ストーンの定理により一意的な自己共役作用素 $d\Gamma(h)$ で $\Gamma(e^{ith}) = e^{itd\Gamma h}$ となるものが存在する. これも $d\Gamma(h)$ の第 2 量子化という. もし $0 \notin \sigma_{\mathrm{p}}(h)$ ならば $d\Gamma(h)$ の固有値 0 は単純になることが知られている. $N = d\Gamma(\mathbb{1})$ は個数作用素といわれ, $\sigma(N) = \sigma_{\mathrm{p}}(N) = \mathbb{N} \cup \{0\}$ である.

A.3 Schrödinger 表現

確率空間 (Q, Σ, μ) 上の実ベクトル空間 $\mathscr{E}$ を指数にもつ Gauss 型確率変数について考える. 以降 $\mathbb{E}_Q[\cdots]$ は確率測度 Q での期待値を表す. $\phi(f)$,$f \in \mathscr{E}$, が確率空間 (Q, Σ, μ) 上の $\mathscr{E}$ を指数にもつ Gauss 超過程であるとは次を満たすことである.

(1) $\phi(f)$ は (Q, Σ, μ) 上の Gauss 過程で平均ゼロ, 共分散が $\mathbb{E}_\mu[\phi(f)\phi(g)] = \frac{1}{2}(f,g)_{\mathscr{E}}$.

(2) $\phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\phi(f) + \beta\phi(g)$,$\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(3) Σ は $\{\phi(f) \mid f \in \mathscr{E}\}$ を可測にする最小のシグマ代数.

Gauss 超過程の存在は知られている. 例えば $\mathscr{E} = L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ とすれば,Q として実シュワルツ超関数空間 $Q = \mathscr{S}'_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ を取ることができ,Gauss 測度 μ は Minlos の定理 [40] で存在が保証される. $L^2(Q) = L^2(Q, \Sigma, \mu)$ とおく. $\mathscr{E}$ を実 Hilbert 空間とする. 以下で見るように $L^2(Q)$ と $\mathcal{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})$ はユニタリー同値になることが知られている. $L^2(Q) \cong \mathcal{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})$. ここで $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$ は複素 Hilbert 空間で $\mathscr{E}$ の複素化である. Fock 空間の Wick 積と同様に $L^2(Q)$ 上の Wick 積を定義する. $\prod_{i=1}^n \phi(f_i)$ の Wick 積を帰納的に

$:\phi(f):=\phi(f)$, $:\phi(f):\phi ::= \phi(f):\phi: -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n (f,f_j):\prod_{i\neq j}\phi(f_i):$ で定義する．すぐに $f_i, g_j \in \mathscr{E}$ に対して

$$\left(:\prod_{i=1}^m \phi(f_i):, :\prod_{i=1}^m \phi(g_i):\right) = \delta_{mn}\sum_{\pi\in\wp_n} 2^{-n}\prod_{i=1}^n (f_i, g_{\pi(i)}).$$

部分空間を $L_n^2(Q) = \overline{\mathrm{L.H.}\,\{:\phi:| f_i \in \mathscr{E}, i=1,...,n\}\cup\{1\!\!1\}}$ とする．このとき

$$L^2(Q) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_n^2(Q)$$

は Wiener-Itô 分解という．$\theta : \mathcal{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}) \to L^2(Q)$ を $\theta : \prod_{i=1}^m \Phi(g_i) : 1\!\!1 =: \prod_{i=1}^m \phi(g_i) :$, $\theta 1\!\!1 = 1\!\!1$ で定める．このとき次を満たす: (1)$\theta 1\!\!1 = 1\!\!1$, (2)$\theta\mathcal{F}_n(\mathscr{E}_{\mathbb{C}}) = L_n^2(Q)$, (3)$\theta\Phi(f)\theta^{-1} = \phi(f)$．この θ が $\mathcal{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})$ と $L^2(Q)$ の同値関係を与える．

$T \in C(\mathscr{E})$ を $\mathscr{E}_{\mathbb{C}}$ 上の縮小作用素に 拡張しておく．$Ad_\theta : C(\mathcal{F}(\mathscr{E}_{\mathbb{C}})) \to C(L^2(Q))$ を $Ad_\theta(B) = \theta B\theta^{-1}$ と定める．$Ad_\theta\Gamma(T) \in C(L^2(Q))$ も $L^2(Q)$ 上の第 2 量子化作用素とよばれ, 簡単に $\Gamma(T)$ と書く．さらに自己共役作用素 h に対して $\theta d\Gamma(h)\theta^{-1}$ も混乱しない限りは簡単に $d\Gamma(h)$ とかくことにする．

A.4 生成消滅作用素の指数型作用素とコヒーレントベクトル

生成消滅作用素の指数型作用素については例えば [29, Chapter 1] を参照せよ．$f \in \mathscr{W}$ として F_f を $F_f = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}a^\dagger(f)^n$ とし定義域は $D(F_f) = \left\{\Phi \in \cap_{n=1}^\infty D(a^\dagger(f)^n) \middle| \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}\|a^\dagger(f)^n\Phi\| < \infty\right\}$ と定める．これは非有界作用素である．すぐに $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}} \subset D(F_f)$ がわかる．同様に $G_f = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}a(f)^n$ も定義する．$F_f = e^{a^\dagger(f)}$, $G_f = e^{a(\bar{f})}$ と表す．$(e^{a^\dagger(f)})^* \supset e^{a(\bar{f})}$ なので $e^{a^\dagger(f)}$ は可閉作用素のなる．その閉包も同じ記号で表す．同様に $e^{a(f)}$ も可閉作用素でその平方を同じ記号で表す．$C(f) = e^{a^\dagger(f)}1\!\!1$ はコヒーレントベクトルといわれる．以下で性質を羅列する:

命題 A.1 (a) 代数関係式 $f, g \in \mathscr{W}$ とし P は多項式とする．このとき次が成り立つ．

$$(1)\ e^{a^\dagger(g)}e^{a^\dagger(f)}1\!\!1 = e^{a^\dagger(f+g)}1\!\!1, (2)\ P(a(g))e^{a^\dagger(f)}1\!\!1 = P((\bar{g}, f))e^{a^\dagger(f)}1\!\!1, (3)\ e^{a(g)}e^{a^\dagger(f)}1\!\!1 = e^{(\bar{g},f)}e^{a^\dagger(f)}1\!\!1.$$

(b) 連続性 $\Phi \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$ とする．このとき写像 $\mathscr{W} \ni f \mapsto e^{a^\sharp(f)}\Phi \in \mathcal{F}$ は連続である．

(c) 微分可能性 h は $\mathscr{W}$ 上の自己共役作用素とする．$f \in D(h)$, $\Phi \in \mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$ とする．このとき $\mathbb{R} \ni t \mapsto e^{a^\sharp(e^{ith}f)}\Phi \in \mathcal{F}$ は強微分可能であり $\frac{d}{dt}e^{a^\sharp(e^{ith}f)}\Phi = a^\sharp(ihe^{ith}f)e^{a^\sharp(e^{ith}f)}\Phi$.

さらに $e^{a^\dagger(f)}$ と $\Gamma(T)$ の関係も知られている．

$$\mathscr{D} = \mathrm{L.H.}\{a^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(f_n)1\!\!1, 1\!\!1 | f_j \in \mathscr{W}, j=1,\ldots,n, n\geq 1\},$$
$$\mathscr{D}_h = \mathrm{L.H.}\{a^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(f_n)1\!\!1, 1\!\!1 | f_j \in D(h), j=1,\ldots,n, n\geq 1\}.$$

命題 A.2 (Intertwining 性) (1) $T \in C(\mathscr{W})$ とする．このとき $\mathcal{F}_{\mathrm{fin}}$ 上で

$$\Gamma(T)e^{a^\dagger(f)} = e^{a^\dagger(Tf)}\Gamma(T), \quad \Gamma(T)e^{a(\overline{T^*\bar{f}})} = e^{a(f)}\Gamma(T).$$

(2) h は自己共役作用素とし,$f \in D(h)$ とする．このとき $\mathscr{D}_h$ 上で次が成り立つ．

$$
\begin{aligned}
d\Gamma(h)e^{a^\dagger(f)} &= a^\dagger(hf)e^{a^\dagger(f)} + e^{a^\dagger(f)}d\Gamma(h),\\
d\Gamma(h)e^{a(f)} &= -a(\overline{h\bar{f}})e^{a^\dagger(f)} + e^{a(f)}d\Gamma(h).
\end{aligned}
$$

最後に $e^{\Phi(f)}$ と $e^{a^\dagger(f)}$,$e^{a(f)}$ の関係を述べる．$\mathscr{D}_\mathrm{b} = \mathrm{L.H.}\{C(g), \Phi |\, g, \Phi \in \mathcal{F}_\mathrm{fin}\}$.

命題 A.3 (Baker-Campbell-Hausdorff 公式) $\mathscr{D}_\mathrm{b}$ 上で $e^{a^\dagger(f)+a(\bar{f})} = e^{a^\dagger(f)}e^{a(\bar{f})}e^{\frac{1}{2}\|f\|^2}$ が成り立つ．

この等式は非有界作用素の等式であることを注意しておく．

A.5 $\mathscr{W} = L^2(\mathbb{R}^d)$ の例

$\mathscr{W} = L^2(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき $\mathcal{F}$ は $L^2(\mathbb{R}^{dn})$ の対称関数の全体 $L^2_\mathrm{sym}(\mathbb{R}^{dn})$ と同一視できる．特殊相対論によれば運動量 $k \in \mathbb{R}^d$ で静止質量 $\mu \geq 0$ のボゾンの運動エネルギーは $\sqrt{c^2|k|^2 + c^4\mu^2}$ で与えられる．$c = 1$ としているので $\sqrt{|k|^2 + \mu^2}$ となる．このとき運動量表示で粒子数 n のボゾン $\Psi = \Psi(k_1, \ldots, k_n)$ のエネルギーは $\sum_{j=1}^n \sqrt{|k_j|^2 + \mu^2}$ になる．そこで $\omega : L^2(\mathbb{R}^d) \to L^2(\mathbb{R}^d)$ はかけ算作用素その第 2 量子化作用素は定義から

$$
\left(d\Gamma(\omega)\Psi\right)^{(n)}(k_1, ..., k_n) = \left(\sum_{j=1}^n \omega(k_j)\right)\Psi^{(n)}(k_1, ..., k_n)
$$

となる．$\sum_{j=1}^n \omega(k_j)$ はまさに $\Psi^{(n)}(k_1, ..., k_n)$ の運動エネルギーを表していることがわかる．$d\Gamma(\omega)$ は量子場の自由 Hamiltonian といわれ, $H_\mathrm{f} = d\Gamma(\omega)$ とおく. ちなみに H_f の添字の f は $\dot{f}ield =$ 場の意味である．スペクトルは $\sigma(H_\mathrm{f}) = [0, \infty)$ かつ $\sigma_\mathrm{p}(H_\mathrm{f}) = \{0\}$ である．特に $H_\mathrm{f}\mathbb{1} = 0$. 交換関係は $[H_\mathrm{f}, a(f)] = -a(\omega f)$, $[H_\mathrm{f}, a^\dagger(f)] = a^\dagger(\omega f)$ である．

命題 A.4 (有界性) $t > 0$ とし $f \in D(1/\sqrt{\omega})$ とする．このとき $e^{a^\dagger(f)}e^{-tH_\mathrm{f}}$ と $\overline{e^{-tH_\mathrm{f}}e^{a(f)}}$ は有界で, さらに $f \in D(1/\sqrt{\omega})$ のとき

$$
\begin{aligned}
\|e^{a^\dagger(f)}e^{-tH_\mathrm{f}}\| &\leq \sqrt{2}e^{4/s\|f\|^2_\omega}\|e^{-\frac{1}{2}(t-s)H_\mathrm{f}}\|, \quad 0 < s < t \leq 1,\\
\|e^{a^\dagger(f)}e^{-tH_\mathrm{f}}\| &\leq \sqrt{2}e^{4\|f\|^2_\omega}\|e^{-\frac{1}{2}(t-1)H_\mathrm{f}}\|, \qquad 1 < t.
\end{aligned}
$$

写像 $L^2(\mathbb{R}^d) \ni f \mapsto e^{a^\sharp(f)}\Phi$ の強連続性は述べたが, さらに写像 $f \mapsto e^{a^\dagger(f)}e^{-tH_\mathrm{f}}$ の一様連続性もわかる．

命題 A.5 (一様連続性) $f, g \in D(1/\sqrt{\omega})$ とする．このとき次が成り立つ,

$$
\begin{aligned}
\|e^{a^\dagger(f)}e^{-tH_\mathrm{f}} - e^{a^\dagger(g)}e^{-tH_\mathrm{f}}\| &\leq \sqrt{2}\|f - g\|_\omega e^{4/s(\|f\|_\omega + \|g\|_\omega + 1)^2}, \quad 0 < s < t \leq 1,\\
\|e^{a^\dagger(f)}e^{-tH_\mathrm{f}} - e^{a^\dagger(g)}e^{-tH_\mathrm{f}}\| &\leq \sqrt{2}\|f - g\|_\omega e^{4(\|f\|_\omega + \|g\|_\omega + 1)^2}, \qquad 1 < t.
\end{aligned}
$$

特に $f, f_n \in D(1/\sqrt{\omega})$ が $\|f - f_n\|_\omega \to 0$ なとき $e^{a^\dagger(f_n)}e^{-tH_\mathrm{f}}$ は一様に $e^{a^\dagger(f)}e^{-tH_\mathrm{f}}$ に収束する．

参考文献

[1] A. Arai. Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation. *Rev. Math. Phys.*, 13:1075–1094, 2000.

[2] A. Arai and M. Hirokawa. On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model. *J. Funct. Anal.*, 151:455–503, 1997.

[3] A. Arai, M. Hirokawa, and F. Hiroshima. On the absence of eigenvectors of Hamiltonians in a class of massless quantum field models without infrared cutoff. *J. Funct. Anal.*, 168:470–497, 1999.

[4] V. Bach, J. Fröhlich, and I.M. Sigal. Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles. *Adv.Math.*, 137:299–395, 1998.

[5] V. Bach, J. Fröhlich, and I.M. Sigal. Renormalization group analysis of spectral problems in quantum field theory. *Adv.Math.*, 137:205–298, 1998.

[6] V. Bach, J. Fröhlich, and I.M. Sigal. Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation field. *Commun. Math. Phys.*, 207:249–290, 1999.

[7] V. Betz, F. Hiroshima, J. Lőrinczi, R. A. Minlos, and H. Spohn. Ground state properties of the Nelson Hamiltonian - A Gibbs measure-based approach. *Rev. Math. Phys.*, 14:173–198, 2002.

[8] G. Bley and L. Thomas. Estimates on functional integrals of quantum mechanics and non-relativistic quantum field theory. *Commun.Math.Phys.*, 350:79–103, 2017.

[9] J. Dereziński and C. Gérard. Scattering theory of infrared divergent Pauli-Fierz Hamiltonians. *Ann. Henri Poincaré*, 5:523–578, 2004.

[10] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Amer. Math. Soc., 2002.

[11] C. Gérard. On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians. *Ann. H. Poincaré*, 1:443–459, 2000.

[12] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati, and A. Suzuki. Absence of ground state for the Nelson model on static space-times. *J. Funct. Anal.*, 262:273–299, 2012.

[13] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati, and A. Suzuki. Removal of UV cutoff for the Nelson model with variable coefficients. *Lett. Math. Phys.*, 101:305–322, 2012.

[14] J. Glimm and A. Jaffe. *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*. Springer, 1981.

[15] M. Griesemer. Exponential decay and ionization thresholds in non-relativistic quantum electrodynamics. *J. Funct. Anal.*, 210:321–340, 2004.

[16] M. Griesemer, E. Lieb, and M. Loss. Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics. *Invent. Math.*, 145:557–595, 2001.

[17] M. Gubinelli, F. Hiroshima, and J. Lőrinczi. Ultraviolet renormalization of the Nelson Hamiltonian through functional integration. *J. Funct. Anal.*, 267:3125–3153, 2014.

[18] T. Hidaka and F. Hiroshima. Self-adjointness of semi-relativistic Pauli-Fierz models. *Rev. Math. Phys.*, 27:1550015, 18 pages, 2015.

[19] T. Hidaka and F. Hiroshima. Spectrum of semi-relativistic Pauli-Fierz Hamiltonian I. *J. Math. Anal. Appl.*, 437:330–349, 2016.

[20] T. Hidaka, F. Hiroshima, and I. Sasaki. Spectrum of semi-relativistic Pauli-Fierz Hamiltonian II. *arXiv: 1609. 07651*, preprint, 2018.

[21] M. Hirokawa, F. Hiroshima, and J. Lőrinczi. Spin-boson model through a Poisson driven stochastic process. *Math. Zeitschrift*, 277:1165–1198, 2014.

[22] M. Hirokawa, F. Hiroshima, and H. Spohn. Ground state for point particles interacting through a massless scalar bose field. *Adv. Math.*, 191:339–392, 2005.

[23] F. Hiroshima. Essential self-adjointness of translation-invariant quantum field models for arbitrary coupling constants. *Commun. Math. Phys.*, 211:585–613, 2000.

[24] F. Hiroshima. Multiplicity of ground states in quantum field models: applications of asymptotic fields. *J. Funct. Anal.*, 224:431–470, 2005.

[25] F. Hiroshima. Functional integral approach to semi-relativistic Pauli-Fierz models. *Adv. Math.*, 259:784–840, 2014.

[26] F. Hiroshima. Note on ultraviolet renormalization and ground state energy of the Nelson model. *arXiv: 1507. 05302*, preprint, 2015.

[27] F. Hiroshima. Translation invariant models in QFT without ultraviolet cutoffs. *arXiv: 1506. 07514*, preprint, 2015.

[28] F. Hiroshima. *Ground states in quantum field models.* Springer, 2019.

[29] F. Hiroshima and J. Lőrinczi. *Feynman-Kac type theorems and its applications. volume 2 (2nd ed).* De Gruyter, 2020.

[30] F. Hiroshima and O. Matte. Ground states and their associated Gibbs measures in the renormalized Nelson model. *arXiv:1903.12024*, preprint, 2019.

[31] I. Karatzas and S. E. Shreve. *Methods of Mathematical Finance.* Springer, 2001.

[32] M. Könenberg and O. Matte. Ground states of semi-relativistic Pauli-Fierz and no-pair Hamiltonians in QED at critical Coulomb coupling. *J. Operator Theory*, 70:211–237, 2013.

[33] M. Könenberg and O. Matte. On enhanced binding and related effects in the non- and semi-relativistic Pauli-Fierz models. *Commun. Math. Phys.*, 323:635–661, 2013.

[34] M. Könenberg, O. Matte, and E. Stockmeyer. Existence of ground states of hydrogen-like atoms in relativistic QED I: the semi-relativistic Pauli-Fierz operator. *Rev. Math. Phys.*, 23:635–661, 2011.

[35] M. Könenberg, O. Matte, and E. Stockmeyer. Existence of ground states of hydrogen-like atoms in relativistic quantum electrodynamics. II. The no-pair operator. *J. Math. Phys.*, 52:123501, 34pages, 2011.

[36] J. Lőrinczi, F. Hiroshima, and V. Betz. *Feynman-Kac type theorems and its applications, volume 1 (2nd ed).* De Gruyter, 2020.

[37] J. Lőrinczi, R. A. Minlos, and H. Spohn. The infrared behaviour in Nelson's model of a quantum particle coupled to a massless scalar field. *Ann. Henri Poincaré*, 3:1–28, 2002.

[38] O. Matte and J. Møller. Feynman-Kac formulas for the ultra-violet renormalized Nelson model. *arXiv:1701.02600*, preprint, 2017.

[39] O. Matte and E. Stockmeyer. Exponential localization of hydrogen-like atoms in relativistic quantum electrodynamics. *Commun. Math. Phys.*, 295:551–583, 2010.

[40] R. A. Minlos. Generalized random processes and their extension to a measure. *Trudy. Mosk. Mat. Obs.*, 8:497–518, 1959.

[41] E. Nelson. Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field. *J. Math. Phys.*, 5:1990–1997, 1964.

[42] E. Nelson. Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field. In *Proc. of a conference on analysis in function space, W. T. Martin and I. Segal (eds.)*, page 87. MIT Press, 1964.

[43] E. Nelson. The free Markoff field. *J. Funct. Anal.*, 12:211–227, 1973.

[44] I. Sasaki. Ground state of the massless Nelson model in a non-Fock representation. *J. Math. Phys.*, 46:102107, 2005.

[45] I. Segal. Tensor algebras over Hilbert spaces, I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 81:106–134, 1956.

[46] I. Segal. Tensor algebras over Hilbert spaces, II. *Ann. Math.*, 63:160–175, 1956.

[47] B. Simon. *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory.* Princeton University Press, 1974.

[48] H. Spohn. Ground state of a quantum particle coupled to a scalar boson field. *Lett. Math. Phys.*, 44:9–16, 1998.