平均曲率流に対する閾値型近似問題について

石井　克幸 (神戸大学大学院　海事科学研究科)

1　序

このノートでは 1992 年以来研究されている平均曲率流に対する閾値型近似アルゴリズムについて, その概要と数学的な収束について基本的な部分を解説することが目的である.

$\{\Gamma(t)\}_{0\le t<T}$ $(T > 0)$ を $\mathbb{R}^N$ における超曲面の族とする. この族が**平均曲率流**であるとは, $\{\Gamma(t)\}_{0\le t<T}$ が次の方程式に従って運動しているときをいう:

$$V = -\operatorname{div}\mathbf{n} \quad \text{on } \Gamma(t),\ t \in (0,T). \tag{1.1}$$

ここで, $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t,x)$ は $x \in \Gamma(t)$ における単位法線ベクトル場, $V = V(t,x)$ は $x \in \Gamma(t)$ における $\mathbf{n}(t,x)$ 方向の $\Gamma(t)$ の速度, $-\operatorname{div}\mathbf{n}(t,x)$ は $x \in \Gamma(t)$ における $\Gamma(t)$ の主曲率の和 (= 平均曲率の $(N-1)$ 倍) である. $-\operatorname{div}\mathbf{n}(t,x)$ の部分は, 正確には $-\operatorname{div}_{\Gamma(t)}\mathbf{n}(t,x)$ = ($\Gamma(t)$ 上の $\mathbf{n}$ の発散) であるが, 微分幾何学における基本的な考察から $-\operatorname{div}_{\Gamma(t)}\mathbf{n}(t,x) = -\operatorname{div}\mathbf{n}(t,x)$ (= $\mathbb{R}^N$ 上の $\mathbf{n}$ の発散) for all $t \in (0,T)$, $x \in \Gamma(t)$ がわかる.

平均曲率流は, 数学のみならず, 様々な分野に現れる. 実際, 平均曲率流は材料科学に現れる粒界の運動をモデル化する際に導出されたのが最初である (Mullins [45]). その後, 相転移現象における界面運動を記述するときに現れた (Allen–Cahn [2]). 最近では画像処理における輪郭抽出, 輪郭補正等への応用が研究されている (Alvarez–Lions–Morel [4], Alvarez–Guichard–Lions–Morel [3] 等). このような応用面からの動機で平均曲率流の数値計算法の研究も活発に行われている.

平均曲率流の数値計算法としては Allen–Cahn 方程式と呼ばれる半線形放物型偏微分方程式を用いたものがよく知られている. 何故ならば, この方程式に対する特異極限として平均曲率流が現れるからである. Allen–Cahn 方程式に対する解の性質に関する研究や解の零点集合 (これが**界面**と呼ばれる) の平均曲率流への収束, その誤差解析に関する研究は多い (de Mottoni–Schatzman [14], X.-F. Chen [9], Evans–Soner–Souganuidis [21], Barles–Soner–Souganidis [6], Ilmanen [30], Soner [50], Ishii [36], Alfaro–Droniou–Matano [1] 等). $N = 2$ の場合, (1.1) に従って動く曲線の族は**曲線短縮流**と呼ばれるが, 平面上の曲線ならではの近似法が存在する. そのうちの 2 つが境界追跡法とクリスタライン近似である. いずれも曲率で動く単純閉曲線を多角形で近似してその時間変化を追跡するのであるが, 曲率の近似法が根本的に異なる. 詳細は省くが, 境界追跡法に関しては Kimura [39], [40] 等, クリスタライン近似に関しては Girao–Kohn [28], Girao [27], Ushijima–Yazaki [52], Ishii–Soner [37], Giga–Giga [24], Ushijima–Yagishita [51] 等を参照してほしい.

平均曲率流の数値計算法は上で述べたもの以外にも多くあると思われるが, 1992 年に簡明な近似アルゴリズムが Bence, Merriman, Osher の 3 氏によって提案され ([7]), しばしば **BMO アルゴリズム**, 或いは **MBO アルゴリズム**と呼ばれている (このノートでは BMO アルゴリズムと呼ぶことにする). このノートでは BMO アルゴリズムの概要やその数学的な収束の証明等の基本的な部分をできるだけ詳しく解説することを目的とする.

各節の内容は以下のとおりである. **2** 節では BMO アルゴリズムの概要とその導出に関する 1 つの考え方について説明する. **3** 節では BMO アルゴリズムが平均曲率流の近似になることを形式的に見る. **4** 節においては平均曲率流に対する等高面の方法について簡単に述べる. その際に等高面方程式と呼ばれる非線形偏微分方程式が導かれるが, その方程式の初期値問題に対する粘性解の比較定理や存在, 安定性等について説明する. **5** 節では BMO アルゴリズムの収束の概要について解説する. **6** 節では (まとまった形ではあまり見かけないであろう) 関数の連続度について述べる. 加えて, 有界かつ一様連続な関数からなる線形空間が sup ノルムに関して Banach 空間になることの証明を与える.

本稿はできるだけ self-contained に読めるようにかなり詳しく書いたつもりである. しかし, 説明が冗長, 或いは不十分な箇所があったり, 余計な記述が多いことは十分に考えられる. そういう箇所は各自で補ったり, 適当に読み飛ばしていただきたい. また, 定理, 命題等には可能な限り参考文献を添えたので, 詳細が知りたい方は参考にしてほしい.

2　BMO アルゴリズム

2.1　概要

まず BMO アルゴリズムの概要について説明する. $C_0 \subset \mathbb{R}^N$ をコンパクト集合とし, $h > 0$ を時間刻み幅とする. このとき u^0 を次の熱方程式に対する初期値問題の解とする:

$$
\begin{cases} u_t = \Delta u \quad \text{in } (0,h] \times \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in C_0, \\ -1 & \text{for } x \in \mathbb{R}^N \backslash C_0, \end{cases} \end{cases} \tag{2.1}
$$

この解 u^0 を使って新しい集合 C_1 を

$$
C_1 := \{u^0(h,\cdot) \geq 0\} (:= \{x \in \mathbb{R}^N \mid u^0(h,x) \geq 0\}) \tag{2.2}
$$

と定義する. 次に u^1 を初期条件において C_0 を C_1 に置き換えた (2.1) の解とする. この u^1 を用いて新しい集合 C_2 を

$$
C_2 := \{u^1(h,\cdot) \geq 0\}
$$

とおく. この操作を帰納的に繰り返すことにより, コンパクト集合列 $\{C_k\}_{k=0}^{[T/h]}$ が構成できる. 但し, $[r]$ は $r \in \mathbb{R}$ を越えない最大の整数である. この集合列を次のように補間する:

$$
C^h(t) := C_k \quad \text{for } t \in [kh, (k+1)h),\ k = 0, 1, 2 \ldots
$$

ここで $h \to 0$ とすると, (今のところ) 形式的には $C^h(t)$ はコンパクト集合 $C(t)$ に収束し, その境界の族 $\{\partial C(t)\}_{t \geq 0}$ は ∂C_0 を初期曲面とする平均曲率流となることがわかる (**3** 節参照).

注意 2.1. (1) Bence–Merriman–Osher [7] では初期条件を

$$
u(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in C_0, \\ 0 & \text{for } x \in \mathbb{R}^N \backslash C_0, \end{cases}
$$

とし, $C_1, C_2, \ldots$ を $\{u^0(h,\cdot) \geq 1/2\}$ 等で定義している. いずれの場合でも本質的には変わらないが, (2.2) の方が多少わかりやすいことと, 後で述べる Allen–Cahn 方程式との関係を述べるのに便利なので初期条件を (2.1) のようにしておく.

(2) (2.2) を見れば分かるように, BMO アルゴリズムにおいては例えば, 熱方程式の解の値が 0 以上であるか否かで集合 C_1 を定義している. 言い換えると, $x \in \mathbb{R}^N$ が C_1 に属するかどうかを 0 を基準値として判定している. この意味で BMO アルゴリズムやその拡張等は**閾値型近似アルゴリズム**と呼ばれる.

2.2 導出に関する一考察

本小節では BMO アルゴリズムが導出される際の筆者の考えについて述べる. Vivier [53] でも指摘されているように BMO アルゴリズムは Allen–Cahn 方程式と同類のもの (or 変形) と考えることができる. ここでは Allen–Cahn 方程式に対する数値解法から BMO アルゴリズムが導出される過程について説明する.

Allen–Cahn 方程式に対する初期値問題として次のようなものを考える: $C_0 \subset \mathbb{R}^N$ をコンパクト集合, $\varepsilon > 0$ とし, $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t,x)$ を次の Allen–Cahn 方程式に対する初期値問題の解とする.

$$\tag{2.3} \begin{cases} u_t = \Delta u + \dfrac{1}{\varepsilon^2} u(1-u^2) \quad \text{in} \quad (0,+\infty)\times\mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in C_0, \\ -1 & \text{for } x \in \mathbb{R}^N \backslash C_0. \end{cases} \end{cases}$$

この解 u^ε を数値解析でもよく知られている splitting 法で構成してみる: $h > 0$ を時間刻み幅として $v^1 = v^1(t,x)$ を熱方程式の初期値問題

$$\tag{2.4} \begin{cases} v_t = \Delta v \quad \text{in } (0,h]\times\mathbb{R}^N, \\ v(0,x) = u(0,x) \end{cases}$$

の解とする. $v^2 = v^2(t,x)$ を常微分方程式の初期値問題

$$\tag{2.5} \begin{cases} w_t = \dfrac{1}{\varepsilon^2} w(1-w^2) \quad \text{in } (0,h]\times\mathbb{R}^N, \\ w(0,x) = v^0(h,x) \end{cases}$$

の解とする. 次に v^3 を初期条件を $v^2(h,\cdot)$ に置き換えた初期値問題 (2.4) の解とし, v^4 を初期条件を $v^3(h,\cdot)$ に置き換えた初期値問題 (2.5) の解とする. 以下, 帰納的にこの操作を繰り返す. 即ち, v^{2k} $(k \in \mathbb{N})$ が与えられたとき, v^{2k+1} を初期条件を $v^{2k}(h,\cdot)$ とする (2.4) の解とし, $v^{2(k+1)}$ を初期条件を $v^{2k+1}(h,\cdot)$ とする (2.5) の解とする. このようにして構成した関数列 $\{v^k\}_{k=0}^{+\infty}$ に対して v^h を

$$v^h(t,x) := \begin{cases} u^0(h,x) & (t,x) \in [0,h)\times\mathbb{R}^N, \\ v^{2k}(h,x) & (t,x) \in [kh,(k+1)h)\times\mathbb{R}^N \quad (k \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

と定義する. $h \to 0$ とすると v^h は (2.3) の解 u^ε に収束する. これは Trotter (or Trotter–Kato) の積公式を応用すれば証明できる. Trotter の積公式に関しては Pazy [47] を, 実際の証明は Descombes [15] 等を参照するとよい ([15] では上の v^h より精度の高い splitting 法を扱っているので, 上の v^h の収束は [15] よりも容易に証明できる). また, splitting 法そのものに関しては, 例えば Holden–Karlsen–Lie–Risebro [29] 等を参照されたい.

注意 2.2. v^h の定義に関して, 上の説明では分かりにくいかもしれない. 作用素論的には次のようになる. 初期条件 u^0 に対して, $v^1(t,\cdot) := A_1(t)u^0(\cdot)$, $v^2(t,\cdot) := A_2(t)v^1(h,\cdot)$ とおくと,

$$v^h(t,x) = [A_2(h)A_1(h)]^k u^0(x) \quad \text{for } t \in [kh,(k+1)h) \times \mathbb{R}^N,\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

となる. また (2.5) の解は求積できることにも注意する.

このようにして定義した v^h の挙動を簡単に説明する. v^1 に関しては熱方程式に対する拡散の効果 (強最大値原理と言ってもよい) によって $|v^1(t,x)| < 1$ $((t.x) \in (0,h) \times \mathbb{R}^N)$ かつ $v^1(t,x)$ の概形は図 2.2.1 のようになる. v^2 に関しては非線形項の効果によって, $v^1(t,x) > 0$ となる $x \in \mathbb{R}^N$ においては $v^2(t,x) \nearrow 1$ $(t \nearrow h)$ となり, $v^1(t,x) < 0$ となる $x \in \mathbb{R}^N$ においては $v^2(t,x) \searrow -1$ $(t \nearrow h)$ となる. 大まかな様子は図 2.2.2 のようになる (図 2.2.1, 2.2.2 共に, 説明の都合上, かなり大袈裟に描いている). $v^1(h,x) = 0$ となる $x \in \mathbb{R}^N$ では $v^2(t,x) = 0$ である. そこで v^3 を求める際には初期条件 $v^2(h,x)$ は u^0 と同じような形をしており, 零点集合 $\{v^2(h,\cdot) = 0\}$ のみが異なる.

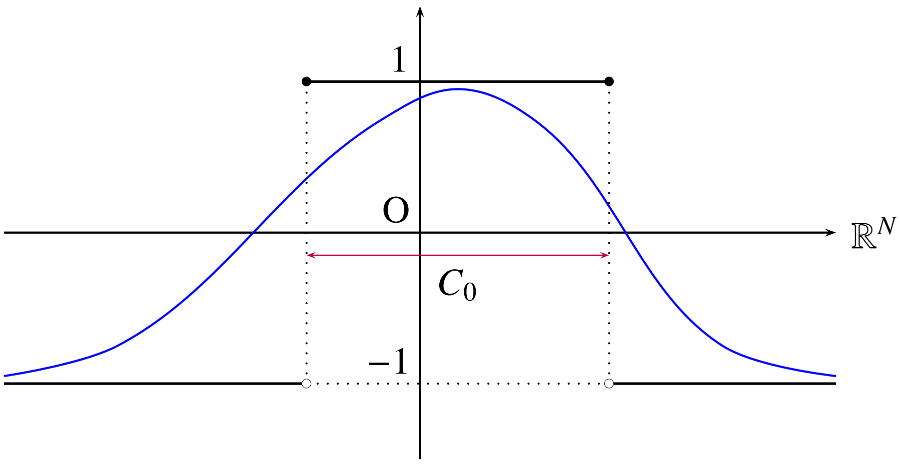

図 2.2.1: $v^1(0,\cdot)$ (黒い線) $v^1(t,\cdot)$ (青い曲線) のグラフの概形

ここで (2.5) において $\varepsilon \to 0$ とすると,

$$v^{2k}(t,x) \longrightarrow \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \{v^{2k}(h,\cdot) > 0\}, \\ 0 & \text{for } x \in \{v^{2k}(h,\cdot) = 0\}, \\ -1 & \text{for } x \in \{v^{2k}(h,\cdot) < 0\}, \end{cases}$$

となる. このように考えると (2.5) の解を使わなくても (2.4) の初期条件を

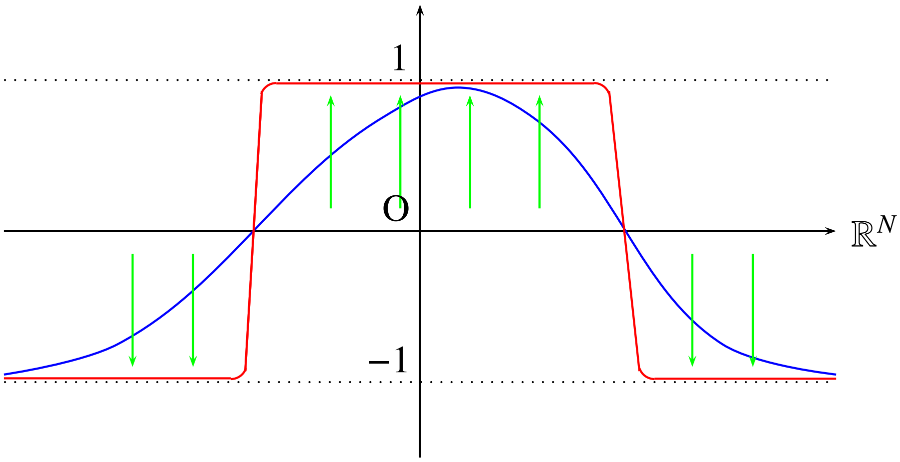

図 2.2.2: $v^2(0,\cdot)$ (青い曲線) $v^2(t,\cdot)$ (赤い曲線) のグラフの概形
緑色の矢印のついた線は (2.5) の右辺の非線形項が作用する向きを表す

$$v^{2k+1}(0,x) = \begin{cases} 1 & \text{for } x \in \{v^{2k}(h,\cdot) \geq 0\}, \\ -1 & \text{for } x \in \{v^{2k}(h,\cdot) < 0\}, \end{cases}$$

としても平均曲率流の近似はできるであろう. おそらくこのような考察で BMO アルゴリズムが導出されたと (少なくとも筆者には) 考えられる.

3　形式的な計算

数学的な収束の証明を与える前に, 形式的な計算によって BMO アルゴリズムが平均曲率流の近似を与えることを見てみる. 以下の形式的な考察は Evans [18] に述べられていることを少し修正したものである.

$C_0 \subset \mathbb{R}^N$ は ∂C_0 が十分滑らかな集合とする. ∂C_0 上の点を任意に取り, それを原点 O とする. このとき, O における ∂C_0 の内向き法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とし, それを y_N 軸とする. そして正規直交基底 $\{e_1,\ldots,e_{N-1},\mathbf{n}\}$ を, O の近くの ∂C_0 が

$$y_N = g(y') + o(|y'|^2),\ g(y') := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N=1}\kappa_i y_i^2,\ y' = (y_1,\ldots,y_{N-1})$$

と表せるように選ぶ. ここで, $\kappa_1,\ldots,\kappa_{N-1}$ は O における ∂C_0 の主曲率である. 細かい計算をできるだけ避けるために,

$$\partial C_0 = \{y = (y_1,y_2,\ldots,y_N) \mid y_N = g(y')\}$$

とする. $h>0$ を十分小さく取るので, 熱方程式の基本解の形より, 実際の議論は原点 O の近くでの計算で十分である. よって, ∂C_0 (つまり, C_0 は) コンパクトでなくても差し支えない.

(2.1) の解を u とすると

$$u(t,x) = \int_{C_0} E(t,y-x)dy - \int_{\mathbb{R}^N \setminus C_0} E(t,y-x)dy.$$

但し, $E(t,x) := \dfrac{e^{-|x|^2/4t}}{(4\pi t)^{N/2}}$, $E(x) := E(1,x)$ とする. $\overline{x} = (0,0,vt)$ を $u(t,\overline{x}) = 0$ を満たす点とする. このとき v は原点 O における ∂C_0 の $\mathbf{n}$ 方向速度になる. そこで

$$\begin{aligned} 0 &= u(t,\overline{x}) = \int_{C_0} E(t,y-\overline{x})dy - \int_{\mathbb{R}^N \setminus C_0} E(t,y-\overline{x})dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{y_N \geq g(y')} E(t,y-\overline{x})dy - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{y_N < g(y')} E(t,y-\overline{x})dy \end{aligned}$$

において $\xi := (y-\overline{x})/2\sqrt{t}$ とおくと, ξ_N に関しては

$$\xi_N = \overline{g}(\xi') := \sqrt{t}\left(\sum_{i=1}^{N-1} \kappa_i \xi_i^2 - \frac{v}{2}\right),\ \xi' := (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{N-1}), \tag{3.1}$$

となるので, 上の式より

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|\xi'|^2} \int_{\xi_N \geq \sqrt{t}\overline{g}(\xi')} e^{-\xi_N^2} d\xi_N d\xi' - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|\xi'|^2} \int_{\xi_N < \sqrt{t}\overline{g}(\xi')} e^{-\xi_N^2} d\xi_N d\xi' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|\xi'|^2} \left(\int_{\xi_N \geq \sqrt{t}\overline{g}(\xi')} - \int_{\xi_N < \sqrt{t}\overline{g}(\xi')}\right) e^{-\xi_N^2} d\xi_N d\xi' \\ &= -\int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|\xi'|^2} \int_{-\sqrt{t}\overline{g}(\xi')}^{\sqrt{t}\overline{g}(\xi')} e^{-\xi_N^2} d\xi_N d\xi' \\ &= -2\int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|\xi'|^2} \int_0^{\sqrt{t}\overline{g}(\xi')} e^{-\xi_N^2} d\xi_N d\xi'. \end{aligned} \tag{3.2}$$

関数 $s \mapsto \displaystyle\int_0^s e^{-r^2} dr$ $(s \in \mathbb{R})$ に対して, $s = 0$ のまわりで Taylor の定理を使うと

$$\int_0^s e^{-s^2} ds = s + O(s^3).$$

よって (3.2) は

$$0 = -2\int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|\xi'|^2} \{\sqrt{t}\overline{g}(\xi') + O((t^{1/2}\overline{g}(\xi'))^3)\} d\xi' \tag{3.3}$$

となる. (3.1) を使うと

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|\xi'|^2} \sqrt{t}\overline{g}(\xi') d\xi' &= \sqrt{t}\left(\sum_{i=1}^{N-1} \kappa_i \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|\xi'|^2} \xi_i^2 d\xi' - \frac{v}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|\xi'|^2} d\xi'\right) \\ &= \frac{\sqrt{t}}{2}\left(\sum_{i=1}^{N-1} \kappa_i - v\right) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|\xi'|^2} d\xi', \end{aligned} \tag{3.4}$$

を得る. 剰余項については Hölder の不等式より

$$(3.5)\quad \left|\int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|\xi'|^2} O((t^{1/2}\overline{g}(\xi'))^3)\} d\xi'\right| \le Ct^{3/2}\left(\sum_{i=1}^{N-1}|\kappa_i|^3 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|\xi'|^2}|\xi_i|^6 d\xi' + v^3 \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|\xi'|^2} d\xi'\right) \le Ct^{3/2}$$

となる. ここで $C > 0$ は既知定数にのみ依存する定数で各行で異なる. 従って (3.3), (3.4), (3.5) より

$$\left|v - \sum_{i=1}^{N-1}\kappa_i\right| \le Ct \quad \text{as } t \searrow 0$$

が導かれ, $t > 0$ が十分小さいときには BMO アルゴリズムは平均曲率流の近似を与えることが形式的にわかる.

注意 3.1. 上の計算では $\mathbf{n}$ 方向速度 v は $|v| < \sum_{i=1}^{N-1}|\kappa_i|$ となることが証明できる. ∂C_0 がコンパクトならば, v は ∂C_0 上で有界である.

4 平均曲率流に対する等高面の方法

この節では 1991 年に Chen–Giga–Goto [10], Evans–Spruck [22] によって独立に発表された平均曲率流に対する等高面の方法とその粘性解理論による取り扱いについて簡単に述べる. 本節の内容や [10], [22] 以降の進展に関しては Giga [25] で詳しく解説されているので, 詳細はそちらを参照されたい.

4.1 等高面方程式の導出

まず (1.1) から等高面方程式を形式的に導出する. $\{\Gamma(t)\}_{0\le t<T}$ を $\mathbb{R}^N$ における滑らかでコンパクトな平均曲率流とし, $D(t) \subset \mathbb{R}^N$ は $\partial D(t) = \Gamma(t)$ となる有界領域とする. 滑らかな関数 $u = u(t,x)$ を

$$u(t,x)\begin{cases} > 0 & (x \in D(t)), \\ = 0 & (x \in \Gamma(t)), \\ < 0 & (x \in \mathbb{R}^N \setminus (D(t) \cup \Gamma(t))) \end{cases}$$

を満たすように選ぶ. $\mathbf{n} = \mathbf{n}(t,x)$ を $x \in \Gamma(t)$ における $\Gamma(t)$ に対する内向き単位法線ベクトルとする. $x \in \Gamma(t)$ を任意に固定し, $Du(t,x) \ne 0$ とする. $0 < h \ll 1$ に対して $x + V_h h\mathbf{n}(t,x) \in \Gamma(t+h)$, 及び $V := \lim_{h\to 0} V_h$ とする. このとき, V は $x \in \Gamma(t)$ における $\Gamma(t)$ の $\mathbf{n}$ 方向速度である. Taylor の定理と $u(t,x) = u(t+h, x + V_h\mathbf{n}(t,x)) = 0$ より

$$0 = u(t+h, x + V_h h\mathbf{n}(t,x)) = u_t(t,x)h + \langle Du(t,x), V_h h\mathbf{n}(t,x)\rangle + o(|h|).$$

$\mathbf{n}(t,x) = \dfrac{Du(t,x)}{|Du(t,x)|}$ なので,

$$V_h = -\frac{u_t(t,x)}{|Du(t,x)|} + o_h(1) \quad \text{for small } h > 0.$$

但し, $\lim\limits_{h\to 0} o_h(1) = 0$ とする. $h \to 0$ とすると $V = -\dfrac{u_t}{|Du(t,x)|}$ を得る. 一方,

$$-\mathrm{div}\ \mathbf{n} = -\mathrm{div}\left(\frac{Du(t,x)}{|Du(t,x)|}\right)$$

であるから, これらを (1.1) に代入すると

$$\frac{u_t}{|Du|} = \mathrm{div}\left(\frac{Du}{|Du|}\right) \quad \text{on } \Gamma(t),\ t \in (0,T).$$

両辺に $|Du|$ をかけた後, 方程式を $\mathbb{R}^N$ 全体に拡張すると

$$u_t + F(Du, D^2u) = 0 \quad \text{in } Q_T := (0,T)\times\mathbb{R}^N. \tag{4.1}$$

ここで

$$F(p,X) := -\mathrm{tr}\left\{\left(I - \frac{p\otimes p}{|p|^2}\right)X\right\} \quad \text{for } (p,X) \in (\mathbb{R}^N\backslash\{0\})\times\mathbb{S}^N, \tag{4.2}$$

$\mathrm{tr}\, A := A$ の対角成分の和,

$\mathbb{S}^N := N$ 次対称行列の全体.

更に, $\widehat{Q}_T := [0,T)\times\mathbb{R}^N$, $\overline{Q}_T := [0,T]\times\mathbb{R}^N$ とする. (4.1) を (1.1) に対する**等高面方程式**と言う. この方程式に初期条件を課して解きたいのであるが, F は非線形性が強く, しかも $p = 0$ で特異性がある. そのため, 一般には古典解の存在は期待できず, 弱解を考えることになる. F が非発散形をしていることより, 弱解として粘性解の概念を導入し, その意味での解の一意存在等を考える.

4.2 (4.1) に対する粘性解

(4.1) に対する粘性解を定義するために, いくつか記号を用意する.

$\mathcal{O}$ を距離空間, 又はその部分集合とする. $USC(\mathcal{O})$ (resp., LSC(O)) を $\mathcal{O}$ 上で上半連続な関数全体 (resp., 下半連続な関数全体) を表す. $\mathcal{O}$ 上で有界かつ一様連続な関数の全体を $BUC(\mathcal{O})$ とする. 特に $BUC(\mathbb{R}^N)$ は次のノルムに関して Banach 空間である.

$$\|f\| := \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |f(x)|.$$

$BUC(\mathbb{R}^N)$ がこのノルムで Banach 空間になることは **6** 節で示す.

定義 4.1. $\mathcal{O}$ を距離空間, 又はその部分集合とする. $\mathcal{O}$ で定義された実数値関数 u が**局所有界**であるとは, 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathcal{O}$ に対して u は K 上で有界であるときを言う.

u を $\widehat{Q_T}$ で定義された局所有界な実数値関数とする. $(t,x) \in \widehat{Q_T}$ に対して

$$u^*(t,x) := \lim_{r\to 0} \sup\{u(s,y) \mid (s,y) \in \widehat{Q_T},\ |s-t| < r,\ |y-x| < r\},$$
$$u_*(t,x) := \lim_{r\to 0} \inf\{u(s,y) \mid (s,y) \in \widehat{Q_T},\ |s-t| < r,\ |y-x| < r\},$$

とおく. u^*, u_* をそれぞれ u の**上半連続包**, **下半連続包**と言う. 次の補題が成り立つ.

補題 4.1. $u^* \in USC(\widehat{Q_T})$, $u_* \in LSC(\widehat{Q_T})$.

証明. $u^* \in USC(\widehat{Q_T})$ のみを示す. $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\overline{u}_n(t,x) := \sup\{u(s,y) \mid (s,y) \in \widehat{Q_T},\ |s-t| < 1/n,\ |y-x| < 1/n\}$$

とおく. すると $\{\overline{u}_n\}_{n=1}^{+\infty}$ は単調減少列である. $\varepsilon > 0$, $(t,x) \in \widehat{Q_T}$ を任意に取り, 固定する, このとき $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|\overline{u}(t,x) - \overline{u}_{n_0}(t,x)| < \varepsilon.$$

$|s-t| < \dfrac{1}{3n_0}, |y-x| < \dfrac{1}{3n_0}$ を満たす任意の $(s,y) \in \widehat{Q_T}$ に対して

$$u(s',y') \le \overline{u}_{n_0}(t,x) \quad \text{for all } (s',y') \in \widehat{Q_T},\ |s'-s| < \frac{1}{3n_0},\ |y'-y| < \frac{1}{3n_0}$$

従って

$$\overline{u}(s,y) \le \overline{u}_{3n_0}(s,y) \le \overline{u}_{n_0}(t,x) < \overline{u}(t,x) + \varepsilon$$
$$\text{for all } (s,y) \in \widehat{Q_T},\ |s-t| < \frac{1}{3n_0},\ |y-x| < \frac{1}{3n_0}.$$

故に $\overline{u} \in USC(\widehat{Q_T})$. □

更に $\widehat{Q_T}$ 上で $u_* \le u \le u^*$ を満たす. また, u が $(t,x) \in \widehat{Q_T}$ で連続であることと $u^*(t,x) = u(t,x) = u_*(t,x)$ が成り立つことは同値である.

同様に, (4.2) で与えられた F の上半連続包 F^*, 下半連続包 F_* をそれぞれ以下のように定義する: $(p,X) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ に対して

$$F^*(p,X) := \lim_{r\to 0} \sup\{F(q,Y) \mid (q,Y) \in (\mathbb{R}^N \backslash \{0\}) \times \mathbb{S}^N,\ |q-p| < r,\ \|Y-X\| < r\},$$
$$F_*(p,X) := \lim_{r\to 0} \inf\{F(q,Y) \mid (q,Y) \in (\mathbb{R}^N \backslash \{0\}) \times \mathbb{S}^N,\ |q-p| < r,\ \|Y-X\| < r\}.$$

ここで $X \in \mathbb{S}^N$ に対して $\|X\| := \sup_{p\in\mathbb{R}^N, |p|\le 1} |\langle Xp, p\rangle|$ である. F^*, F_* に関しては以下が成り立つ:

$$F^*(p,X) = F(p,X) = F_*(p,X) \quad \text{for } (p,X) \in (\mathbb{R}^N \backslash \{0\}) \times \mathbb{S}^N, \tag{4.3}$$
$$F^*(0,X) = \sup\{-\mathrm{tr}\,\{(I - \nu\otimes\nu)X\} \mid \nu \in \mathbb{R}^N,\ |\nu| = 1\}, \tag{4.4}$$
$$F_*(0,X) = \inf\{-\mathrm{tr}\,\{(I - \nu\otimes\nu)X\} \mid \nu \in \mathbb{R}^N,\ |\nu| = 1\}, \tag{4.5}$$
$$F^*(0,O) = F_*(0,O) = 0. \tag{4.6}$$

(4.2) で定義された F は**幾何学的**と呼ばれる次の性質が成り立つ: 任意の $(p,X)\in(\mathbb{R}^N\backslash\{0\})\times\mathbb{S}^N$, $\lambda,\sigma\in\mathbb{R}$ に対して

$$F(\lambda p, \lambda X+\sigma p\otimes p)=\lambda F(p,X). \tag{4.7}$$

F^*, F_* に対しても同じ等式が成り立つ.

(4.1) に対する粘性解を定義する.

定義 4.2. u を Q_T 上で定義された有界な実数値関数とする.

(1) u が *(4.1)* の**粘性劣解**であるとは, 任意の $\varphi\in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $u^*-\varphi$ が $(t_0,x_0)\in Q_T$ で極大値を取るならば,

$$\varphi_t+F_*(D\varphi,D^2\varphi)\le 0 \quad at\ (t_0,x_0) \tag{4.8}$$

を満たすときを言う.

(2) u が *(4.1)* の**粘性優解**であるとは, 任意の $\varphi\in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $u_*-\varphi$ が $(t_0,x_0)\in Q_T$ で極小値を取るならば,

$$\varphi_t+F^*(D\varphi,D^2\varphi)\ge 0 \quad at\ (t_0,x_0) \tag{4.9}$$

を満たすときを言う.

(3) u が *(4.1)* の**粘性解** であるとは, *(4.1)* の粘性劣解, かつ粘性優解であるときを言う.

注意 4.1. (1) 粘性解は**最大値原理**, つまり $u\in C^{1,2}(Q_T)$ が $(t_0,x_0)\in Q_T$ で最大値を取れば,

$$u_t=0,\ Du=0,\ D^2u\le O \quad \text{at } (t_0,x_0)$$

が成り立つ, という命題に基づく弱解の概念であり, 2 階退化楕円型/放物型偏微分方程式において有効な解の概念である. 但し, $X\in\mathbb{S}^N$ に対して, $X\le O$ とは X が半負定値行列であることを意味する. また**退化楕円型**とは, (4.2) について言うと, 任意の $p\in\mathbb{R}^N\backslash\{0\}$ に対して

$$F(p,Y)\le F(p,X) \quad \text{if } X,Y\in\mathbb{S}^N \text{ and } X\le Y\ (\Longleftrightarrow\ X-Y\le O)$$

を満たす場合を言う.

(2) $u\in C^{1,2}(Q_T)$ が (4.1) の**古典劣解** (resp., **古典優解**), つまり

$$u_t+F_*(Du,D^2u)\le 0\ (\text{resp., } \ge 0) \quad \text{in } Q_T$$

ならば, u は (4.1) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) である. 逆に (4.1) の粘性劣解 (resp., 粘性優解) u が $C^{1,2}(Q_T)$ に属しているならば, u は (4.1) の古典劣解 (resp., 古典優解) である.

次の命題 (というよりは, その証明の一部) は以下の議論でしばしば用いられる.

命題 4.1. u を Q_T 上で定義された有界な実数値関数とする.

(1) u が (*4.1*) の粘性劣解であることは次と同値である：任意の $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $u^* - \varphi$ が $(t_0, x_0) \in Q_T$ で狭義極大値 (或いは最大値, 狭義最大値) を取るならば, (*4.8*) が成り立つ.

(2) u が (*4.1*) の粘性優解であることは次と同値である：任意の $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $u^* - \varphi$ が $(t_0, x_0) \in Q_T$ で狭義極小値 (或いは最小値, 狭義最小値) を取るならば, (*4.9*) が成り立つ.

証明. Koike [42, 命題 2.5] に沿って (1) のみを示す. $\Longrightarrow$ は明らかである.

$\Longleftarrow$ を $u^* - \varphi$ が狭義最大値を取る場合に証明する. 記号を簡単にするため, $u \in USC(Q_T)$ とする. 任意の $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $u - \varphi$ が $(t_0, x_0) \in Q_T$ で極大値を取ったとする. すると, $r_0 \in (0, 1)$ が存在して

$$u(t, x) - \varphi(t, x) \le u(t_0, x_0) - \varphi(t_0, x_0) \quad \text{for all } (t, x) \in \overline{Q((t_0, x_0), 3r_0)} (\subset Q_T)$$

を満たす. ここで, $Q((t, x), r) := (t - r, t + r) \times B_N(x, r)$, $B_N(x, r) := \{y \in \mathbb{R}^N \mid |y - x| < r\}$ とする.

$\widehat{\varphi}$ を次のようにおく.

$$\widehat{\varphi}(t, x) := \varphi(t, x) + \{(t - t_0)^2 + |x - x_0|^4\} + u(t_0, x_0) - \varphi(t_0, x_0).$$

すると

$$\begin{aligned} &u(t_0, x_0) - \widehat{\varphi}(t_0, x_0) = 0, \\ &u(t, x) - \widehat{\varphi}(t, x) \le -\{(t - t_0)^2 + |x - x_0|^4\} \quad \text{for all } (t, x) \in \overline{Q((t_0, x_0), 3r_0)} \end{aligned}$$

を得る. 関数 $\xi = \xi(t, x) \in C^\infty(Q_T)$ を次を満たすようなものとする:

$$\begin{aligned} &0 \le \xi \le 1 \quad \text{in } Q_T, \\ &\xi \equiv 1 \quad \text{on } \overline{Q((t_0, x_0), r_0)}, \\ &\xi \equiv 0 \quad \text{in } Q_T \backslash \overline{Q((t_0, x_0), 2r_0)}. \end{aligned}$$

$M := \sup\limits_{[0,T)\times\mathbb{R}^N} |u| + 1$ とおき, $\Phi = \Phi(t, x) := \xi(t, x)\widehat{\varphi}(t, x) - (1 - \xi(t, x))M$ とすると,

$$u(t, x) - \Phi(t, x) \begin{cases} = u(t, x) - \widehat{\varphi}(t, x) & \text{if } (t, x) \in \overline{Q((t_0, x_0), r_0)}, \\ \le -2r_0^2 & \text{if } (t, x) \in Q((t_0, x_0), 2r_0) \backslash \overline{Q((t_0, x_0), r_0)}, \\ \le -1 & \text{if } (t, x) \in Q_T \backslash \overline{Q((t_0, x_0), 2r_0)} \end{cases}$$

である. 従って $u - \Phi$ は (t_0, x_0) で狭義最大値を取るので, この点において

$$\Phi_t + F_*(D\Phi, D^2\Phi) \le 0 \quad \text{at } (t_0, x_0).$$

ここで

$$\Phi_t(t_0, x_0) = \varphi_t(t_0, x_0),\ D\Phi_t(t_0, x_0) = D\varphi(t_0, x_0),\ D^2\Phi(t_0, x_0) = D^2\varphi(t_0, x_0)$$

に注意すると, $u - \varphi$ の極大点 (t_0, x_0) で (4.8) が成り立つことがわかる. □

注意 4.2. (1) 命題 4.1 では有界な粘性劣解, 粘性優解を扱ったが, 適当な条件の下で非有界な場合も同じ主張が成り立つ.

(2) 上の証明は $u^* - \varphi$ が狭義極大値, または最大値をとる場合の証明も含んでいる.

(3) 粘性解理論一般に関しては Crandall–Ishii–Lions [12], Koike [41], [42] 等を参照されたい.

そもそも, 弱解は解となる関数の微分をテスト関数と呼ばれる滑らかな関数の微分に置き換えて定義される. これは発散型の偏微分方程式に対する超関数解の定義を思い出せば納得できることと思う (Green の公式を用いて解となる関数の微分をテスト関数の微分に置き換えていることからわかる). その観点から, 定義 4.2 は, 例えば, $u^* - \varphi$ の極大点において (最大値原理を背景として) u^* の微分を φ の微分に置き換えることで粘性劣解を定義している. この点についてもう少し詳しく見てみる. $u \in USC(Q_T)$, $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $u-\varphi$ が $(t_0, x_0) \in Q_T$ で極大値を取ると仮定する. このとき, $u(t_0+s, x_0+h)-\varphi(t_0+s, x_0+h) \leq u(t_0, x_0) - \varphi(t_0, x_0)$ as $(s, h) \to (0, 0)$ と Taylor の定理より

$$\begin{aligned}
u(t_0 + s, x_0 + h) &\leq u(t_0, x_0) + \varphi(t_0 + s, x_0 + h) - \varphi(t_0, x_0) \\
&= u(t_0, x_0) + \varphi_t(t_0, x_0)s + \langle D\varphi(t_0, x_0), h\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2\varphi(t_0, x_0)h, h\rangle \\
&\quad +o(|s| + |h|^2) \quad \text{as } (s, h) \to (0, 0)
\end{aligned}$$

となる. 粘性劣解の定義 4.2 (1) においては, この不等式を満たす $(\varphi_t(t_0, x_0), D\varphi(t_0, x_0), D^2\varphi(t_0, x_0))$ を u の微分として用いていると考えることができる. この考えを推し進めると, 不等式

$$\begin{aligned}
u(t_0 + s, x_0 + h) &\leq u(t_0, x_0) + \varphi(t_0 + s, x_0 + h) - \varphi(t_0, x_0) \\
&= u(t_0, x_0) + \tau s + \langle p, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Xh, h\rangle \\
&\quad +o(|s| + |h|^2) \quad \text{as } (s, h) \to (0, 0)
\end{aligned}$$

を満たす $(\tau, p, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ が存在すれば, それを u の微分として使うことで粘性劣解を定義できると考えてもよいだろう. 粘性優解についても同様である. そこで, 集合 $P^{1,2,\pm}u(t, x)$ を導入する. Q_T で定義された実数値関数 u と $(t, x) \in Q_T$ に対して

$$\begin{aligned}
P^{1,2,+}u(t, x) &:= \left\{ \begin{array}{l} (\tau, p, X) \\ \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N \end{array} \middle| \begin{array}{c} u(t + s, x + h) \leq u(t, x) + \tau s + \langle p, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Xh, h\rangle \\ +o(|s| + |h|^2) \quad \text{as } (s, h) \to (0, 0) \end{array} \right\}, \\
P^{1,2,-}u(t, x) &:= \left\{ \begin{array}{l} (\tau, p, X) \\ \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N \end{array} \middle| \begin{array}{c} u(t + s, x + h) \geq u(t, x) + \tau s + \langle p, h\rangle + \frac{1}{2}\langle Xh, h\rangle \\ +o(|s| + |h|^2) \quad \text{as } (s, h) \to (0, 0) \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

と定義する. $P^{1,2,\pm}u(t, x)$ を u の (t, x) における**放物型セミ・ジェット**という. $u \in C^{1,2}(Q_T)$ ならば, 任意の $(t, x) \in Q_T$ に対して Taylor の定理より $(s, h) \to (0, 0)$ のとき

$$u(t + s, x + h) = u(t, x) + u_t(t, x)s + \langle Du(t, x), h\rangle + \frac{1}{2}\langle D^2u(t, x)h, h\rangle + o(|s| + |h|^2)$$

となるが, これを 2 つに分ける:

$$
\begin{aligned}
u(t+s,x+h) &\le u(t,x)+u_t(t,x)s+\langle Du(t,x),h\rangle+\frac{1}{2}\langle D^2u(t,x)h,h\rangle+o(|s|+|h|^2),\\
u(t+s,x+h) &\ge u(t,x)+u_t(t,x)s+\langle Du(t,x),h\rangle+\frac{1}{2}\langle D^2u(t,x)h,h\rangle+o(|s|+|h|^2).
\end{aligned}
$$

この 2 つの不等式に注目して, $u \notin C^{1,2}(Q_T)$ であっても, これらの不等式の少なくとも一方を満たす $(\tau,p,X)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{S}^N$ が存在するならば, それを u の (t,x) における弱微分と考えることにしよう. このような弱微分の集合 $P^{1,2,\pm}u(t,x)$ を使って定義 4.2 と同値な粘性解の定義を与える.

注意 4.3. (1) $P^{1,2,\pm}u(t,x)$ は一価ではなく多価である. 実際, $(\tau,p,X)\in P^{1,2,+}$ ならば, 任意の $Y\in\mathbb{S}^N$, $Y\ge X$ に対して $(\tau,p,Y)\in P^{1,2,+}$ である.

(2) 上の説明から, u が $(t,x)\in Q_T$ で $C^{1,2}$ ならば, 任意の $(t,x)\in Q_T$ に対して $P^{1,2,+}u(t,x)\cap P^{1,2,-}u(t,x)\neq\emptyset$ である. しかし, $P^{1,2,+}u(t,x)\cap P^{1,2,-}u(t,x)\neq\emptyset$ ならば, u は (t,x) で t, x に関して 1 階微分可能であるが, x に関して 2 階微分可能とは限らない. これに関することは Koike [42, 1.1.3] に簡単な解説がある.

次の命題が成り立つ.

命題 4.2. u を Q_T 上で定義された有界な実数値関数とする.

(1) u が *(4.1)* の粘性劣解であることと, 以下の事柄は同値である: 任意の $(t,x)\in Q_T$, $(\tau,p,X)\in P^{1,2,+}u(t,x)$ に対して

$$\tau+F_*(p,X)\le 0 \tag{4.10}$$

を満たす.

(2) u が *(4.1)* の粘性優解であることと, 以下の事柄は同値である: 任意の $(t,x)\in Q_T$, $(\tau,p,X)\in P^{1,2,-}u(t,x)$ に対して

$$\tau+F^*(p,X)\ge 0 \tag{4.11}$$

を満たす.

証明. (1) の同値性のみを示す. 証明は Ishii [32], Giga[25, Proposition 2.2.3], Koike [42, 命題 2.2] 等に従う.

Step 1. (4.8) $\Longrightarrow$ (4.10) を示す. $u\in USC(Q_T)$ と仮定してよい.

$(t_0,x_0)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N)$, $(\tau,p,X)\in P^{1,2,+}u(t_0,x_0)$ を固定する. このとき十分小さな $r_0\in(0,1)$ に対して $\omega(r)$ $(r\in(0,r_0))$ に対して

$$\omega(r) := \sup\left\{\left(\frac{u(t_0+s,x_0+h)-u(t_0,x_0)-\tau s-\langle p,h\rangle-\langle Xh,h\rangle/2}{|s|+|h|^2}\right)^+ \;\middle|\; \begin{array}{c} 0<|s|+|h|^2<r \\ (t_0+s,x_0+h)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N \end{array}\right\} \tag{4.12}$$

と定義する. ここで $a^+ = \max\{a, 0\}$ $(a \in \mathbb{R})$ である. このとき, ω は $(0, r_0)$ において非負, 単調非減少で $\lim_{r\to+0} \omega(r) = 0$ を満たす. よって ω を

$$\omega(0) = 0,\ \omega(r) = \omega(r_0) \quad \text{for } r \in [r_0, +\infty)$$

と拡張しておく. 更に $\omega(r)$ を **6** 節に述べられている方法と同様の修正を行うことで,

$$\omega \in C([0, +\infty)),\ \omega(0) = 0,\ \omega(r) \geq 0 \quad \text{for } r \in [0, +\infty),$$

と仮定してよい. 更に $\omega(r) + r$ に置き換えることによって ω は $[0, +\infty)$ で狭義単調増加としてよい.

Step 2. 上の ω を基にして, $u - \varphi$ が (t_0, x_0) で極大値を取るような φ を構成する.

(4.12) より $0 < |s| + |h|^2 < r$ の場合

$$u(t_0 + s, x_0 + h) - u(t_0, x_0) - \tau s - \langle p, h\rangle - \frac{1}{2}\langle Xh, h\rangle \leq (|s| + |h|^2)\omega(|s| + |h|^2)$$

が成り立つ. ここで

$$\begin{aligned}
&(|s| + |h|^2)\omega(|s| + |h|^2) \leq 2|h|^2\omega(2|h|^2) \quad \text{if } |h|^2 \geq |s|,\\
&(|s| + |h|^2)\omega(|s| + |h|^2) \leq 2|s|\omega(2|s|) \quad \text{if } |h|^2 \leq |s|
\end{aligned}$$

が言える. よって

$$u(t_0 + s, x_0 + h) - u(t_0, x_0) - \tau s - \langle p, h\rangle - \frac{1}{2}\langle Xh, h\rangle \leq 2|s|\omega(2|s|) + 2|h|^2\omega(2|h|^2)$$

を得る. $\omega_1(r) := 2\omega(2r)$ とし, $\psi_i = \psi_i(r)$ $(i = 1, 2)$ を

$$\psi_1(r) := \int_r^{2r} \omega_1(s)ds,\ \psi_2(r) := \int_r^{2r} \psi_1(s)ds \quad \text{for } r \in [0, +\infty)$$

と定義する. $\omega \in C([0, +\infty))$ と狭義単調増加性より

$$\begin{aligned}
&\psi_1 \in C^1([0, +\infty)),\ \psi_2 \in C^2([0, +\infty)),\\
&\psi_1(0) = \psi_1'(0) = 0,\ \psi_1(r) > r\omega(r) \quad \text{for } r \in (0, +\infty),\\
&\psi_2(0) = \psi_2'(0) = \psi_2''(0) = 0,\ \psi_2(r) > r\psi_1(r) > r^2\omega(r^2) \quad \text{for } r \in (0, r_0),\ r_0 \in (0, 1)
\end{aligned}$$

となる. そこで

$$\begin{aligned}
&\varphi(t, x) := u(t_0, x_0) + \tau(t - t_0) + \langle p, x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle X(x - x_0), x - x_0\rangle + \widehat{\psi_1}(t) + \widehat{\psi_2}(x),\\
&\widehat{\psi_1}(t) := \psi(2(t - t_0)),\ \widehat{\psi_2}(x) := \psi_2(2|x - x_0|)
\end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}
&u(t_0, x_0) - \varphi(t_0, x_0) = 0,\\
&u(t, x) - \varphi(t, x) \leq (|t - t_0| + |x - x_0|^2)\omega(|t - t_0| + |x - x_0|^2) - \widehat{\psi_1}(t) - \widehat{\psi_2}(x)\\
&\qquad \leq 2|t - t_0|\omega(2|t - t_0|) + 2|x - x_0|^2\omega(2|x - x_0|^2) - \psi_1(2(t - t_0)) - \psi_2(2|x - x_0|) < 0\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{as } (t, x) \to (t_0, x_0),\ (t, x) \neq (t_0, x_0).
\end{aligned}$$

故に $u-\varphi$ は (t_0,x_0) で極大値を取る. 更に $\widehat{\psi}_{1,t}(t_0)=0,\ D\widehat{\psi}_2(x_0)=0,\ D^2\widehat{\psi}_2(x_0)=O$ なので

$$\varphi_t(t_0,x_0)=\tau,\ D\varphi(t_0,x_0)=p,\ D^2\varphi(t_0,x_0)=X$$

である. この φ を適当な方法 (例えば, 命題 4.1 の証明を参照) で $\varphi\in C^{1,2}(Q_T)$ を満たすように拡張すると, (4.8) から (4.10) が導ける.

Step 3. (4.10) $\Longrightarrow$ (4.8) を示す.

任意の $\varphi\in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $u-\varphi$ が $(t_0,x_0)\in Q_T$ で極大値を取るとする. すると. Taylor の定理より $(s,h)\to(0,0)$ のとき

$$u(t_0+s,x_0+h)\le u(t_0,x_0)+\varphi_t(t_0,x_0)s+\langle D\varphi(t_0,x_0),h\rangle+\frac{1}{2}\langle D^2\varphi(t_0,x_0)h,h\rangle+o(|s|+|h|^2)$$

となり, $(\varphi_t(t_0,x_0),D\varphi(t_0,x_0),D^2\varphi(t_0,x_0))\in P^{1,2,+}u(t_0,x_0)$ がわかる. よって, (4.10) から (4.8) が成り立つことが示される. □

$P^{1,2,\pm}u(t,x)$ は空集合になることもあり得るが, $P^{1,2,\pm}u(t,x)\ne\emptyset$ となる (t,x) は Q_T にどの程度あるのだろうか？あまりに少ないと粘性解が弱解の概念として適切ではなくなる可能性もある. この点については次の命題が成り立つ.

命題 4.3. $u\in USC(Q_T)$ (*resp.,* $u\in LSC(Q_T)$) は有界とする. このとき, $\{(t,x)\in Q_T\mid P^{1,2,+}u(t,x)\ne\emptyset\}$ (*resp.,* $\{(t,x)\in Q_T\mid P^{1,2,-}u(t,x)\ne\emptyset\}$) は Q_T で稠密である.

証明. $u\in USC(Q_T)$ かつ有界の場合のみを証明する.

$(t_0,x_0)\in Q_T$ を任意にとり, 固定する. $n\in\mathbb{N}$ に対して

$$u_n(t,x):=u(t,x)-\frac{n}{2}\{(t-t_0)^2+|x-x_n|^2\}\quad\text{for }(t,x)\in Q_T$$

とする. $u\in USC(Q_T)$ かつ有界であることから, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して u_n は最大値を取り, その点を (t_n,x_n) とおく. $u_n(t_0,x_0)\le u_n(t_n,x_n)$ より

$$n\{(t-t_0)^2+|x-x_n|^2\}\le 4\sup_{[0,T)\times\mathbb{R}^N}|u(t,x)|.$$

よって $(t_n,x_n)\longrightarrow(t_0,x_0)$ $(n\to+\infty)$ を得る. 更に $(n(t_n-t_0),n(x_n-x_0),nI)\in P^{1,2,+}u(t_n,x_n)$ である. 従って, この命題の結論が示される. □

命題 4.3 によって $P^{1,2,\pm}u(t,x)\ne\emptyset$ となる (t,x) はかなりたくさんあることがわかる.

半連続関数に対する最大値原理や (4.1) に対する比較定理を扱うために, 次の記号と命題を用意する. $(t,x)\in(0,T)\times\mathbb{R}^N$ に対して

$$\overline{P^{1,2,+}}u(t,x):=\left\{\begin{array}{l|c}(\tau,p,X) & \exists\{(t_n,x_n,\tau_n,p_n,X_n)\}_{n=1}^{+\infty}\subset(0,T)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{S}^N\\ \in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{S}^N & \text{such that }(\tau_n,p_n,X_n)\in P^{1,2,+}u(t_n,x_n)\text{ and}\\ & (t_n,x_n,u(t_n,x_n),\tau_n,p_n,X_n)\longrightarrow(t,x,u(t,x),\tau,p,X)\\ & \text{as }n\to+\infty\end{array}\right\},$$

$$\overline{P^{1,2,-}}u(t,x):=\left\{\begin{array}{l|c}(\tau,p,X) & \exists\{(t_n,x_n,\tau_n,p_n,X_n)\}_{n=1}^{+\infty}\subset(0,T)\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{S}^N\\ \in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{S}^N & \text{such that }(\tau_n,p_n,X_n)\in\mathcal{P}^{1,2,-}u(t_n,x_n)\text{ and}\\ & (t_n,x_n,u(t_n,x_n),\tau_n,p_n,X_n)\longrightarrow(t,x,u(t,x),\tau,p,X)\\ & \text{as }n\to+\infty\end{array}\right\}$$

と定義する. また, 後で使うため $J^{2,\pm}_{O}u(z)$ ($z \in O \subset \mathbb{R}^M$, $M \in \mathbb{N}$) も定義しておく.

$$J^{2,+}_{O}u(z) := \left\{ \begin{array}{l|c} (\widehat{p}, \widehat{X}) & u(z+h) \le u(z) + \langle \widehat{p}, h \rangle + \frac{1}{2}\langle \widehat{X}h, h \rangle + o(|h|^2) \\ \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{S}^M & \text{as } \mathbb{R}^M \ni h \to 0 \end{array} \right\},$$

$$J^{2,-}_{O}u(z) := \left\{ \begin{array}{l|c} (\widehat{p}, \widehat{X}) & u(z+h) \ge u(z) + \langle \widehat{p}, h \rangle + \frac{1}{2}\langle \widehat{X}h, h \rangle + o(|h|^2) \\ \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{S}^M & \text{as } \mathbb{R}^M \ni h \to 0 \end{array} \right\},$$

$$\overline{J^{2,+}_{O}}u(z) := \left\{ \begin{array}{l|c} & \exists \{(z_n, \widehat{p}_n, \widehat{X}_n)\}_{n=1}^{+\infty} \subset X \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{S}^M \\ (\widehat{p}, \widehat{X}) & \text{such that } (\widehat{p}_n, \widehat{X}_n) \in J^{2,+}_{O}u(z_n) \text{ and} \\ \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{S}^M & (z_n, u(z_n), \widehat{p}_n, \widehat{X}_n) \longrightarrow (z, u(z), \widehat{p}, \widehat{X}) \\ & \text{as } n \to +\infty \end{array} \right\},$$

$$\overline{J^{2,-}_{O}}u(z) := \left\{ \begin{array}{l|c} & \exists \{(z_n, \widehat{p}_n, \widehat{X}_n)\}_{n=1}^{+\infty} \subset X \times \mathbb{R}^M \times \mathbb{S}^M \\ (\widehat{p}, \widehat{X}) & \text{such that } (\widehat{p}_n, \widehat{X}_n) \in J^{2,-}_{O}u(z_n) \text{ and} \\ \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{S}^M & (z_n, u(z_n), \widehat{p}_n, \widehat{X}_n) \longrightarrow (z, u(z), \widehat{p}, \widehat{X}) \\ & \text{as } n \to +\infty \end{array} \right\}.$$

命題 4.4. u を $\widehat{Q}_T$ 上で定義された有界な実数値関数とする.

(1) u が (*4.1*) の粘性劣解であることと, 以下の事柄は同値である: 任意の $(t, x) \in Q_T$, $(\tau, p, X) \in \overline{P^{1,2,+}}u(t, x)$ に対して (*4.10*) が成り立つ.

(2) u が (*4.1*) の粘性優解であることと, 以下の事柄は同値である: 任意の $(t, x) \in Q_T$, $(\tau, p, X) \in \overline{P^{1,2,-}}u(t, x)$ に対して (*4.11*) が成り立つ.

証明. (1) のみを示す. 命題 4.2 (1) との同値性を証明すればよい. ここでも $u \in USC(Q_T)$ としておく.

命題 4.2 (1) の主張が成り立つとする. 任意の $(t, x) \in Q_T$, $(\tau, p, X) \in \overline{P^{1,2,+}}u(t, x)$ に対して $\{(t_n, x_n, \tau_n, p_n, X_n)\}_{n=1}^{+\infty}$ が存在して

$$\begin{aligned} &(t_n, x_n, u(t_n, x_n), \tau_n, p_n, X_n) \longrightarrow (t, x, u(t, x), \tau, p, X) \text{ as } n \to +\infty, \\ &(\tau_n, p_n, X_n) \in P^{1,2,+}u(t_n, x_n) \quad \text{for all } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

を満たす. 命題 4.2 (1) より, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\tau_n + F_*(p_n, X_n) \le 0.$$

$n \to +\infty$ とすると, $F_* \in LSC(\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N)$ より, 命題 4.4 (1) の主張を得る.

命題 4.4 (1) の主張が成り立つならば, $P^{1,2,+}u(t, x) \subset \overline{P^{1,2,+}}u(t, x)$ より, 命題 4.2 (1) の主張は明らかに成り立つ. □

(4.1) の初期値問題に対する粘性解の一意存在については次の定理が知られている.

定理 4.1 (cf. Ishii–Souganidis [35]). *u, v* は $\widehat{Q}_T$ で定義されている有界な実数値関数とする. 更に, *u, v* はそれぞれ (*4.1*) の粘性劣解, 粘性優解とし,

$$\lim_{r\to 0}\sup\{u^*(t,x)-v_*(s,y)\mid 0\le t,s\le r,\ x,y\in\mathbb{R}^N,\ |x-y|\le r\}\le 0 \tag{4.13}$$

を満たすとする. このとき,

$$\lim_{r\to 0}\sup\{u^*(t,x)-v_*(s,y)\mid (t,x),(s,y)\in\widehat{Q}_T,\ |t-s|\le r,\ |x-y|\le r\}\le 0 \tag{4.14}$$

が成り立つ.

定理 4.2 (cf. Ishii–Souganidis [35]). $u_0\in BUC(\mathbb{R}^N)$ とする. このとき, $u(0,x)=u_0(x)$ $(x\in\mathbb{R}^N)$ を満たす (*4.1*) の粘性解 $u\in BUC(\widehat{Q}_T)$ が唯一つ存在する.

注意 4.4. (1) Q_T で定義された放物型偏微分方程式の初期値問題に対する比較定理とは, 粗く言うと次のようになる: $u=u(t,x)$ を劣解, $v=v(t,x)$ を優解とする. このとき, $u(0,\cdot)\le v(0,\cdot)$ in $\mathbb{R}^N$ ならば, $u\le v$ in $\widehat{Q}_T$ である. しかし, $\mathbb{R}^N$ は非有界領域なので, 比較定理の成立に関しては, たとえ古典解であっても初期条件や解自身においていくつかの条件が仮定されるのが普通である (cf. Friedman [23, Chapter 1, Section. 9], John [38, Chapter 7, Section 1], Evans [19, Chapter 2, Section 2.3]).

(2) 条件 (4.13) は $u^*(0,\cdot)\le v_*(0,\cdot)$ in $\mathbb{R}^N$ を含んでいる. また (4.14) は $u^*\le v_*$ in $\widehat{Q}_T$ を含んでいる.

(3) 定理 4.1 で (4.13) の代わりに u^*, v_* は $\widehat{Q}_T$ 上で有界, $u^*(0,\cdot)\le v_*(0,\cdot)$ in $\mathbb{R}^N$, かつ $u^*(0,\cdot)$ or $v_*(0,\cdot)\in BUC(\mathbb{R}^N)$ を仮定すると,

$$\lim_{r\to 0}\sup\{u^*(t,x)-v_*(t,y)\mid t\in[0,T),\ x,y\in\mathbb{R}^N,\ |x-y|\le r\}\le 0$$

を得る. これも $u^*\le v_*$ in $\widehat{Q}_T$ を含んでいる. このとき, 定理 4.2 の主張は (4.1) の粘性解 u は $u\in C(\widehat{Q}_T)$ かつ, 各 $t\in[0,T)$ に対して $u(t,\cdot)\in BUC(\mathbb{R}^N)$ と変わる. (cf. Chen–Giga–Goto [10], Giga–Goto–Ishii–Sato [26])

Giga–Goto–Ishii–Sato [26], Ishii–Souganidis [35] に基づいて定理 4.1 を証明する. そのために, 粘性劣解 u, 粘性優解 v を $t=T$ まで延長する. $t=T$ において $u^*(T,\cdot), v_*(T,\cdot)$ を

$$\begin{aligned} u^*(T,x) &:= \lim_{r\to 0}\sup\{u^*(s,y)\mid T-r\le s<T,\ y\in\mathbb{R}^N,\ |y-x|\le r\},\\ v_*(T,x) &:= \lim_{r\to 0}\inf\{v_*(s,y)\mid T-r\le s<T,\ y\in\mathbb{R}^N,\ |y-x|\le r\}, \end{aligned} \tag{4.15}$$

と定義する. このとき, u^*, v_* は $\overline{Q}_T$ 上で有界で, それぞれ上半連続, 下半連続である. 更に拡張された関数 u^*, v_* は次の意味で (4.1) の粘性劣解, 粘性優解である.

命題 4.5. $\varphi\in C^{1,2}((0,T]\times\mathbb{R}^N)$ を任意に取る.

(1) $u^*-\varphi$ が $(t_0,x_0)\in(0,T]\times\mathbb{R}^N$ で $(0,T]\times\mathbb{R}^N$ における極大値を取るならば,

$$\varphi_t+F_*(D\varphi,D^2\varphi)\le 0\quad at\ (t_0,x_0).$$

(2) $v_* - \varphi$ が $(t_0, x_0) \in (0,T] \times \mathbb{R}^N$ で $(0,T] \times \mathbb{R}^N$ における極小値を取るならば,

$$\varphi_t + F^*(D\varphi, D^2\varphi) \geq 0 \quad at\ (t_0, x_0).$$

注意 4.5. $\varphi \in C^{1,2}((0,T] \times \mathbb{R}^N)$ とは, ある $\delta_1 > 0$ が存在して, φ が $(0, T+\delta_1) \times \mathbb{R}^N$ で $C^{1,2}$ 級となるように拡張できることを意味する.

命題 4.5 の証明. (1) のみを証明する. $u^* - \varphi$ が (t_0, x_0) で極大値を取るとする. $t_0 < T$ ならば, 証明することはないので, $t_0 = T$ とする. 命題 4.1 の証明と同様にして, ある $\delta > 0$ に対して

$$u^*(T, x_0) = \varphi(T, x_0),\ u^*(t,x) - \varphi(t,x) \leq -\{(t-T)^2 + |x - x_0|^4\}$$
$$\text{for all } (t,x) \in [T-\delta, T] \times \overline{B_N(x_0, \delta)}$$

が成り立つ. $u^*(T, \cdot)$ の定義 (4.15) より $\{(s_k, y_k)\}_{k=1}^{+\infty} \subset Q_T$ が存在して

$$(s_k, y_k, u(s_k, y_k)) \longrightarrow (T, x_0, u^*(T, x_0)) \quad (k \to +\infty) \tag{4.16}$$

となる.

任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して $(t_n, x_n) \in [T-\delta, T] \times \overline{B_N(x_0, \delta)}$ を $u^* - \varphi - 1/\{n(T-t)\}$ の $[T-\delta, T] \times \overline{B_N(x_0, \delta)}$ における最大値とする. このとき, $t_n < T$ $(n \in \mathbb{N})$ である. 必要ならば部分列を取ることによって

$$(t_n, x_n) \longrightarrow (t_1, x_1) \in [T-\delta, T] \times \overline{B(x_0, \delta)} \quad (n \to +\infty)$$

となる. 各 $(t,x) \in [T-\delta, T) \times \overline{B_N(x_0, \delta)}$ に対して

$$\begin{aligned}
u(t,x) - \varphi(t,x) &= \lim_{n\to+\infty} \left\{ u(t,x) - \varphi(t,x) - \frac{1}{n(T-t)} \right\} \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \left\{ u(t_n,x_n) - \varphi(t_n,x_n) - \frac{1}{n(T-t_n)} \right\} \\
&\leq \liminf_{n\to+\infty} \{u^*(t_n,x_n) - \varphi(t_n,x_n)\} \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \{u^*(t_n,x_n) - \varphi(t_n,x_n)\} \leq u^*(t_1,x_1) - \varphi(t_1,x_1) \\
&\leq -\{(t_1 - T)^2 + |x_1 - x_0|^4\}.
\end{aligned}$$

ここで $(t,x) = (s_k, y_k)$ として $k \to +\infty$ とすると (4.16) より

$$\begin{aligned}
0 &= u^*(T,x_0) - \varphi(T,x_0) \leq \liminf_{n\to+\infty} \{u^*(t_n,x_n) - \varphi(t_n,x_n)\} \\
&\leq \limsup_{n\to+\infty} \{u^*(t_n,x_n) - \varphi(t_n,x_n)\} \leq -\{(t_1 - T)^2 + |x_1 - x_0|^4\} \leq 0
\end{aligned}$$

が言える. よって, $t_1 = T$, $x_1 = x_0$ かつ

$$\lim_{n\to+\infty} \{u^*(t_n,x_n) - \varphi(t_n,x_n)\} = u^*(T,x_0) - \varphi(T,x_0)$$

となる. 更に $u^*(t_n, x_n) \longrightarrow u^*(T, x_0)$ $(n \to +\infty)$ も得られる.

u は Q_T における (4.1) の粘性劣解であることより

$$\begin{aligned}&\varphi_t(t_n, x_n) + F_*(D\varphi(t_n, x_n), D^2\varphi(t_n, x_n))\\&\leq \varphi_t(t_n, x_n) + \frac{1}{n(T - x_n)^2} + F_*(D\varphi(t_n, x_n), D^2\varphi(t_n, x_n)) \leq 0\end{aligned}$$

となる. $n \to +\infty$ とすると (1) の結論を得る. □

更に, 半連続関数に対する最大値原理について述べておく.

定理 4.3. $u \in USC(Q_T)$, $v \in LSC(Q_T)$, $\varphi \in C^2(Q_T \times Q_T)$ に対して $u(z_1) - v(z_2) - \varphi(z)$ $(z = (z_1, z_2))$ が $\overline{z} := (\overline{z}_1, \overline{z}_2) \in Q_T \times Q_T$ で極大値を取るとする. このとき, 任意の $\lambda > 0$ に対して $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathbb{S}^{N+1}$ が存在して

$$\begin{aligned}&(D_{z_1}\varphi(\overline{z}), \overline{X}) \in \overline{J^{2,+}}u(\overline{z}_1),\ (D_{z_2}\varphi(\overline{z}), \overline{Y}) \in \overline{J^{2,-}}v(\overline{z}_2),\\&-\left(\frac{1}{\lambda} + \|A\|\right) \leq \begin{pmatrix}\overline{X} & O\\ O & -\overline{Y}\end{pmatrix} \leq A + \lambda A^2.\end{aligned}$$

但し,

$$A := \begin{pmatrix}D^2_{z_1z_1}\varphi(\overline{z}_1, \overline{z}_2) & D^2_{z_1z_2}\varphi(\overline{z}_1, \overline{z}_2)\\ D^2_{z_2z_2}\varphi(\overline{z}_1, \overline{z}_2) & D^2_{z_2z_2}\varphi(\overline{z}_1, \overline{z}_2)\end{pmatrix},\ \|A\| := \sup_{z \in \mathbb{R}^M, \|z\|=1} |\langle Az, z\rangle|.$$

注意 4.6. (1) 定理 4.3 は比較定理 4.1 の証明に適用しやすい形で述べた. 一般化した形では Crandall–Ishii–Lions [12], Giga [25], Koike [41], [42] 等に書かれており, 証明も与えられている. それはかなり面倒なので, このノートには書かない.

(2) 定理 4.3 の証明では $\overline{J^{2,\pm}}u(z)$ の定義に現れるような極限操作を行っている. もし, $J^{2,\pm}u(z)$ が閉集合ならば何の問題もないが, $J^{2,\pm}u(z)$ は閉集合とは限らない (cf. Crandall–Ishii–Lions [12, Example 2.1] を参照). そのため, 先に述べた極限操作に関して閉じた集合を考える必要があるので $\overline{J^{2,\pm}}u(z)$ を導入している.

(3) この定理の原型は Ishii [31] によって得られた. その後, Crandall–Ishii [11] によって半連続関数に対する最大値原理と呼ばれるものになった.

定理 4.3 より以下の系が得られる. これは定理 4.1 の証明に有用である.

系 4.1 (Ohnuma–Sato [46])**.** u を Q_T で定義された実数値関数とする. $(t, x) \in Q_T$ に対して $(\tau, p, X) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$, $l \in \mathbb{R}^N$, $a \in \mathbb{R}$ が

$$\left(\begin{pmatrix}\tau\\ p\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}{}^t l & a\\ X & l\end{pmatrix}\right) \in \overline{J^{2,\pm}_O}u(t, x),\ O := (0, T) \times \mathbb{R}^N \tag{4.17}$$

を満たせば $(\tau, p, X) \in \overline{P^{1,2,\pm}}u(t, x)$ となる.

注意 4.7. 定理 4.3 の主張に現れる $\overline{X}, \overline{Y} \in \mathbb{S}^{N+1}$ はそれぞれ

$$\overline{X} = \begin{pmatrix}{}^t l & a\\ X & l\end{pmatrix},\ \overline{Y} = \begin{pmatrix}{}^t m & b\\ Y & m\end{pmatrix},\ X, Y \in \mathbb{S}^N,\ l, m \in \mathbb{R}^N, a, b \in \mathbb{R}$$

の形に表せる.

系 4.1 の証明. (4.17) が $\overline{J_O^{2,+}}u(t,x)$ の場合に成り立っているとする. すると, $\exists\{(t_n, x_n, \tau_n, p_n, X_n, l_n, a_n)\}_{n=1}^{+\infty} \subset Q_T \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}$ が存在して

$$\left(\begin{pmatrix}\tau_n\\ p_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a_n & l_n\\ {}^t l_n & X_n\end{pmatrix}\right) \in J_O^{2,+}u(t_n, x_n),$$

$$(t_n, x_n, u(t_n, x_n), \tau_n, p_n, X_n, l_n, a_n) \longrightarrow (t, x, u(t,x), \tau, p, X, l, a) \quad \text{as } n \to +\infty. \tag{4.18}$$

従って, $(s,h) \to (0,0)$ のとき

$$u(t_n + s, x_n + h) \;\leq\; u(t_n, x_n) + \tau_n s + \langle p_n, h\rangle + \frac{1}{2}\left\{a_n s^2 + 2s\langle l_n, h\rangle + \langle X_n h, h\rangle\right\} + o(|s|^2 + |h|^2)$$

を得る. すると $(a_n, l_n) \longrightarrow (a, l)$ as $n \to +\infty$ より

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n s^2| \leq Cs^2,\ |s\langle l_n, h\rangle| \leq |s||l_n||h| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} |l_n| \left(\frac{2}{3}|s|^{3/2} + \frac{1}{3}|h|^3\right) \leq C|s|^{3/2} + |h|^3)$$

が言える. ここで $C > 0$ は $n \in \mathbb{N}$ に依らない定数で, 2 番目の不等式では Young の不等式を使った. よって, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $(s,h) \to (0,0)$ のとき

$$u(t_n + s, x_n + h) \;\leq\; u(t_n, x_n) + \tau_n s + \langle p_n, h\rangle + \frac{1}{2}\langle X_n h, h\rangle + o(|s| + |h|^2)$$

となり $(\tau_n, p_n, X_n) \in \mathcal{P}^{1,2,+}u(t_n, x_n)$ が示される. これと (4.18) より $(\tau, p, X) \in \overline{P^{1,2,+}}u(t,x)$ を得る. □

定理 4.1 の証明. 命題 4.5 と Giga–Goto–Ishii–Sato [26], Ishii–Souganidis [35] に基づく. 命題 4.5 を考慮して $u \in USC(\overline{Q}_T)$, かつ (4.1) の粘性劣解, $v \in LSC(\overline{Q}_T)$, かつ (4.1) の粘性優解と仮定しておく. また,

$$M := \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^N} |u(t,x)| + \sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^N} |v(t,x)|$$

と定義する.

(4.14) が成り立たないとして矛盾を導く. 即ち,

$$\lim_{r\to 0} \sup\{u(t,x) - v(s,y) \mid (t,x), (s,y) \in Q_T,\ |t-s| \leq r,\ |x-y| \leq r\} =: 5\theta > 0$$

を仮定する. このとき $\varepsilon_0 \in (0,1)$ が存在して, 任意の $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ に対して

$$\begin{aligned}&\lim_{r\to 0} \sup\{u(t,x) - v(s,y) - \varepsilon(t+s) \mid (t,x), (s,y) \in Q_T,\ |t-s| \leq r,\ |x-y| \leq r\}\\ &\quad \geq 4\theta\end{aligned} \tag{4.19}$$

を満たす.

Step 1. $\alpha, \delta > 0$ に対して, 関数 $\Phi = \Phi(t,x,s,y)$, $\Psi = \Psi(t,x,s,y)$ を

$$\begin{aligned}\Phi(t,x,s,y) &:= u(t,x) - v(s,y) - \frac{\alpha}{4}\{(t-s)^4 + |x-y|^4\} - \varepsilon(t+s),\\ \Psi(t,x,s,y) &:= \Phi(t,x,s,y) + \delta(|x|^2 + |y|^2),\\ &\qquad\qquad \text{for } (t,x,s,y) \in (\overline{Q}_T)^2\end{aligned}$$

とおく. Ψ に対する最大点の存在を示す.

(4.19) より $r_0 > 0$ が存在して, 任意の $\alpha \gg 1/r_0^4$ に対して $(t_0, x_0, s_0, y_0) \in (\overline{Q}_T)^2$ が

$$\Phi(t_0, x_0, s_0, y_0) \geq 3\theta,\ |t_0 - s_0|^4 < 2\theta/\alpha,\ |x_0 - y_0|^4 < 2\theta/\alpha$$

を満たすように取れる. よって, $\delta_0 > 0$ を小さく取ることによって, 任意の $\delta \in (0, \delta_0)$ に対して

$$\sup_{(t,x,s,y)\in([0,T]\times\mathbb{R}^N)^2} \Psi(t, x, s, y) \geq 2\theta$$

となる. また (4.13) より, 小さな $r_1 \in (0, r_0)$ が取れて

$$\begin{aligned}(4.20)\quad & \sup\{\Psi(t, x, s, y) \mid 0 \leq s, t \leq r,\ x, y \in \mathbb{R}^N,\ |x - y| \leq r\} \\ & \leq \sup\{u(t, x) - v(s, y) \mid 0 \leq s, t \leq r,\ x, y \in \mathbb{R}^N,\ |x - y| \leq r\} \leq \theta \quad \text{for all } r \in (0, r_1).\end{aligned}$$

$\delta(|x|^2 + |y|^2) \geq M + 2T$ を満たす $x, y \in \mathbb{R}^N$ に対して, $\Psi(t, x, s, y) \leq 0$ なので, $\alpha \gg \alpha_0 := 1/(r_0 \wedge r_1)^4$, $\delta \in (0, \delta_0)$ に対して $\Psi(t, x, s, y)$ はある $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{s}, \bar{y}) \in (\overline{Q}_T)^2$ で最大値を取り, $\Psi(\bar{t}, \bar{x}, \bar{s}, \bar{y}) \geq 3\theta$ となる. 但し, $a \wedge b := \min\{a, b\}$ である.

Step 2. $(\bar{t}, \bar{x}, \bar{s}, \bar{y})$ の挙動を見る. $\Psi(\bar{t}, \bar{x}, \bar{s}, \bar{y}) \geq 3\theta$ より

$$\alpha\{(\bar{t} - \bar{s})^4 + |\bar{x} - \bar{y}|^4) + \delta(|\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2\} \leq M$$

なので,

$$(4.21)\qquad |\bar{t} - \bar{s}| + |\bar{x} - \bar{y}| \leq 2\left(\frac{4M}{\alpha}\right)^{1/4} \quad \text{for all } \delta \in (0, \delta_0),\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0),$$

$$(4.22)\qquad \delta(|\bar{x}| + |\bar{y}|) \longrightarrow 0 \quad \text{as } \delta \to 0\ (\alpha \gg \alpha_0,\ \varepsilon \in (0, \varepsilon_0) \text{ に関して一様}),$$

である. 更に (4.20) より $\bar{t}, \bar{s} > 0$ である.

Step 3. (4.1) を使って矛盾を導く.

半連続関数に対する最大値原理 (定理 4.3) と系 4.1 より, $X_\delta, Y_\delta \in \mathbb{S}^N$ が存在して $p := \bar{x} - \bar{y}$ として

$$(4.23)\qquad \begin{aligned} & (\varepsilon + \alpha(\bar{t} - \bar{s})^3, \alpha|p|^2 p + 2\delta\bar{x}, X_\delta) \in \overline{P^{1,2,+}}u(\bar{t}, \bar{x}), \\ & (-\varepsilon + \alpha(\bar{t} - \bar{s})^3, \alpha|p|^2 p - 2\delta\bar{y}, Y_\delta) \in \overline{P^{1,2,-}}v(\bar{s}, \bar{y}), \\ & -(1 + \|A\|)\begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} X_\delta & O \\ O & -Y_\delta \end{pmatrix} \leq A + \frac{1}{\alpha}A^2 \\ & A := \alpha|p|^2\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + 2\alpha\begin{pmatrix} p\otimes p & -p\otimes p \\ -p\otimes p & p\otimes p \end{pmatrix} + 2\delta\begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} \\ & \quad \leq 3\alpha|p|^2\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + 2\delta\begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

となる. ここで

$$\|A\| := \sup_{\substack{\xi\in\mathbb{R}^{2N},\\ |\xi|\le 1}} |\langle A\xi,\xi\rangle| \le 12\alpha|p|^2 + 2\delta,$$

$$A^2 \le (18\alpha^2|p|^4 + 12\alpha\delta|p|^2)\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + 4\delta^2\begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix},$$

が確かめられるので, (4.23) は

$$-\mu\begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} X_\delta & O \\ O & -Y_\delta \end{pmatrix} \le \nu\begin{pmatrix} I & -I \\ -I & I \end{pmatrix} + \omega\begin{pmatrix} I & O \\ O & I \end{pmatrix}, \tag{4.24}$$

$$\mu := \left(1 + 6\alpha|p|^2 + 2\delta\right),\ \nu := (18\alpha|p|^2 + 12\delta + 3\alpha)|p|^2,\ \omega := 4\alpha^{-1}\delta^2 + 2\delta,$$

と変形できる. u, v はそれぞれ (4.1) の粘性劣解, 粘性優解であることより,

$$\varepsilon + \alpha(\bar{t} - \bar{s})^3 + F_*(\alpha|p|^2 p + 2\delta\bar{x}, X_\delta) \le 0,\ -\varepsilon + \alpha(\bar{t} - \bar{s})^3 + F^*(\alpha|p|^2 p - 2\delta\bar{y}, Y_\delta) \ge 0,$$

を得る. 辺々引くと

$$2\varepsilon \le F^*(\alpha|p|^2 p + 2\delta\bar{x}, Y_\delta) - F_*(\alpha|p|^2 p - 2\delta\bar{y}, X_\delta). \tag{4.25}$$

(4.21), (4.22) に注意して $\delta \to 0$ として矛盾を導きたいが, そのために場合分けをする.

Case 1. $p \longrightarrow 0$ $(\delta \to 0)$ のとき.

(4.24) より, $\{X_\delta\}_{\delta\in(0,\delta_0)}, \{Y_\delta\}_{\delta\in(0,\delta_0)}$ は $\delta \in (0, \delta_0)$ に関して有界なので, 必要ならば部分列を取ることによって $X_\delta \longrightarrow X_0 \in \mathbb{S}^N$, $Y_\delta \longrightarrow Y_0 \in \mathbb{S}^N$ $(\delta \to 0)$ となる. すると, (4.24) において $\delta \to 0$ とすると

$$\begin{pmatrix} X_0 & O \\ O & -Y_0 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} O & O \\ O & O \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

となり, $X_0 \le O$, $Y_0 \ge O$ を得る. 従って (4.25) において $\delta \to 0$ とすると

$$2\varepsilon \le F^*(0, Y_0) - F_*(0, X_0) \le F^*(0, O) - F_*(0, O) = 0$$

となり, 矛盾を得る. ここで 2 番目の不等式は F^*, F_* が退化楕円型であることから従い, 最後の等式は (4.6) による.

Case 2. $p \longrightarrow p_0 (\neq 0)$ $(\delta \to 0)$ のとき.

上の議論より $X_0 \le Y_0$ である. 故に (4.25) において $\delta \to 0$ とすると (4.3) より

$$2\varepsilon \le F(\alpha|p_0|^2 p_0, Y_0) - F(\alpha|p_0|^2 p_0, X_0) \le F(\alpha|p_0|^2 p_0, X_0) - F(\alpha|p_0|^2 p_0, X_0) = 0$$

となり, 矛盾を得る.

従って (4.14) が証明された. □

定理 4.2 を証明する前に次の命題を示しておく.

命題 4.6. $\mathcal{S}(\neq \emptyset)$ を *(4.1)* の粘性劣解の族とし, $u(t,x) := \sup\{v(t,x) \mid v \in \mathcal{S}\}$ と定義する. u は Q_T で有界と仮定する. すると以下が成り立つ.

(1) $u \in \mathcal{S}$.

(2) $v \in \mathcal{S}$ が *(4.1)* の粘性優解でないならば, $w \in \mathcal{S}$, $(s,y) \in Q_T$ が存在して, $v(s,y) < w(s,y)$ となる.

注意 4.8. 命題 4.6 の証明と同様にして以下の事柄が証明できる: $\mathcal{S}(\neq \emptyset)$ を (4.1) の粘性優解の族とし, $u(t,x) := \inf\{v(t,x) \mid v \in \mathcal{S}\}$ と定義する. u は Q_T で有界と仮定する. すると以下が成り立つ.

(1) $u \in \mathcal{S}$.

(2) $v \in \mathcal{S}$ が (4.1) の粘性劣解でないならば, $w \in \mathcal{S}$, Q_T が存在して, $v(s,y) > w(s,y)$ となる.

命題 4.6 の証明. (1) 任意の $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $u^* - \varphi$ が $(t_0, x_0) \in Q_T$ で極大値を取ったとする. 命題 4.1 の証明と同様に φ を修正することによって $u^* - \varphi$ は (t_0, x_0) で $Q((t_0,x_0), r_0)$ $(\exists r_0 > 0)$ における狭義最大値を取り,

$$u^*(t,x) - \varphi(t,x) \leq -\{(t-t_0)^2 + |x-x_0|^4\} \quad \text{for all } (t,x) \in \overline{Q((t_0,x_0),r_0)} \tag{4.27}$$

を満たすとしてよい. 上半連続包の定義より, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $(t_n, x_n) \in \overline{Q((t_0,x_0),r_0)}$ が存在して $(t_n, x_n, u(t_n,x_n)) \longrightarrow (t_0, x_0, u^*(t_0,x_0))$ $(n \to +\infty)$ となる. また, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $u_n \in \mathcal{S}$ が存在して $u_n(t_n,x_n) > u(t_n,x_n) - 1/n$ を満たす. 更に, $u_n^* - \varphi$ は $(s_n, y_n) \in \overline{Q((t_0,x_0),r_0)}$ で $\overline{Q((t_0,x_0),\delta)}$ における最大値を取る. このとき,

$$\begin{aligned} u^*(t_0,x_0) - \varphi(t_0,x_0) - \frac{1}{n} &\leq u_n(t_n,x_n) - \varphi(t_n,x_n) \leq u_n^*(s_n,y_n) - \varphi(s_n,y_n) \\ &\leq u^*(s_n,y_n) - \varphi(s_n,y_n) \leq -\{(s_n-t_0)^2 + |y_n - x_0|^4\} \end{aligned}$$

より $n \to +\infty$ とすると

$$\begin{aligned} 0 &= u^*(t_0,x_0) - \varphi(t_0,x_0) \leq \liminf_{n\to+\infty}\{u_n^*(s_n,y_n) - \varphi(s_n,y_n)\} \\ &\leq -\liminf_{n\to+\infty}\{(s_n-t_0)^2 + |y_n-x_0|^4\} \leq 0, \\ 0 &= u^*(t_0,x_0) - \varphi(t_0,x_0) \leq \limsup_{n\to+\infty}\{u_n^*(s_n,y_n) - \varphi(s_n,y_n)\} \\ &\leq -\limsup_{n\to+\infty}\{(s_n-t_0)^2 + |y_n-x_0|^4\} \leq 0. \end{aligned}$$

よって

$$(s_n, y_n, u_n^*(s_n,y_n)) \longrightarrow (t_0, x_0, u^*(t_0,x_0)) \quad (n \to +\infty)$$

を得る. $u_n \in \mathcal{S}$ より

$$\varphi_t(s_n,y_n) + F_*(D\varphi(s_n,y_n), D^2\varphi(s_n,y_n)) \leq 0.$$

$n \to +\infty$ とすると $u \in \mathcal{S}$ が言える.

(2) $v \in \mathcal{S}$ が (4.1) の粘性優解でないとする. このとき, $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ が存在し, $v_* - \varphi$ は $(t_0, x_0) \in Q_T$ で極小値を取り,

$$\varphi_t(t_0, x_0) + F^*(D\varphi(t_0, x_0), D^2\varphi(t_0, x_0)) =: -2\delta < 0 \tag{4.28}$$

となる. φ を修正することによって, ある $r_0 > 0$ が存在して

$$v_*(t_0, x_0) - \varphi(t_0, x_0) = 0 \le (t - t_0)^2 + |x - x_0|^4 \le v_*(t, x) - \varphi(t, x) \quad \text{for all } (t, x) \in Q((t_0, x_0), r_0) \tag{4.29}$$

$$\varphi_t + F^*(D\varphi, D^2\varphi) \le -\delta \quad \text{in } Q((t_0, x_0), r_0) \tag{4.30}$$

を満たすとしてよい. $\delta_1 := r_0^4/2$ とおくと $\varphi + \delta_1$ は $Q((t_0, x_0), r_0)$ において (4.1) の古典劣解である. (4.29) より $\partial Q((t_0, x_0), r_0)$ において

$$\varphi(t, x) + \delta_1 < \{(t - t_0)^2 + |x - x_0|^4\} \le v_*(t, x)$$

となり, $\varphi(t_0, x_0) + \delta_1 > v_*(t_0, x_0)$ であることに注意する.

そこで $w = w(t, x)$ を

$$w(t, x) := \begin{cases} \max\{v(t, x), \varphi(t, x) + \delta_1\} & (t, x) \in Q((t_0, x_0), r_0), \\ v(t, x) & (t, x) \notin Q((t_0, x_0), r_0) \end{cases}$$

と定義する. すると (1) より w は (4.1) の粘性劣解であり, $w \in \mathcal{S}$ となる.

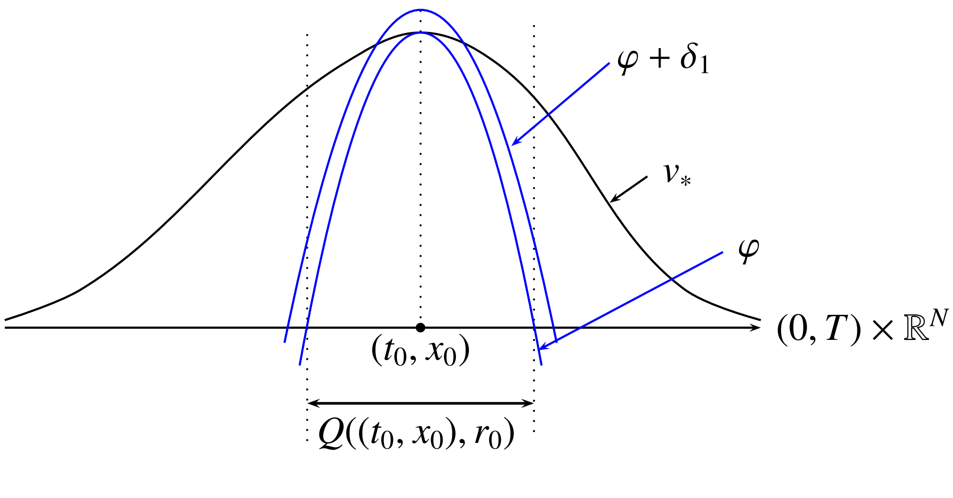

図 4.2.1: w の構成の概略

ここで (2) の主張が証明できる. 実際, $\{(s_n, y_n)\}_{n=1}^{+\infty} \subset Q((t_0, x_0), r_0)$ で $v(s_n, y_n) \longrightarrow v_*(t_0, x_0)$ $(n \to +\infty)$ を満たすものが取れる. この点列を用いて

$$\begin{aligned} \lim_{n \to +\infty} \{w(s_n, y_n) - v(s_n, y_n)\} &= \lim_{n \to +\infty} \max\{0, \varphi(s_n, y_n) + \delta_1 - v(s_n, y_n)\} \\ &= \max\{0, \delta_1\} = \delta_1 > 0 \end{aligned}$$

を得る. よって十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して $w(s_n, y_n) > v(s_n, y_n)$ となる. □

定理 4.2 の証明. Ishii–Souganidis [35] に従い, Perron の方法を用いる. そのために, 初期値 $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ を満たす粘性劣解, 粘性優解を構成する.

Step 1. 関数 $f \in C^2([0,+\infty))$ を次のように定義する:

$$f(r) := \begin{cases} r^4 & (r \in [0,1)), \\ \text{nondecreasing} & (r \in [1,2)), \\ \dfrac{3}{2} & (r \in [2,+\infty)). \end{cases}$$

このとき, $f' \geq 0$ in $[0,+\infty)$ かつ

$$\sup_{r\geq 0} f'(r) < +\infty, \ \sup_{p\in\mathbb{R}^N} \frac{f'(|p|)}{|p|} < +\infty,$$

に注意する.

Step 2. $\varepsilon \in (0,1)$ を固定する. Step 1 で導入した f を用いて (4.1) の粘性劣解, 粘性優解を構成する.

$u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ より, 定数 $A_\varepsilon > 0$ が存在して,

$$|u_0(x) - u_0(y)| \leq \varepsilon + A_\varepsilon f(|x-y|) \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^N$$

が成り立つ. そこで, $\underline{u} = \underline{u}(t,x;\varepsilon,y)$, $\overline{u} = \overline{u}(t,x;\varepsilon,y)$ を

$$\begin{aligned} \underline{u}(t,x;\varepsilon,y) &:= -B_\varepsilon t + u_0(y) - \varepsilon - A_\varepsilon f(|x-y|), \\ \overline{u}(t,x;\varepsilon,y) &:= B_\varepsilon t + u_0(y) + \varepsilon + A_\varepsilon f(|x-y|) \end{aligned}$$

とおく. 但し, $B_\varepsilon > 0$ は後で決める定数とする. ここで (4.7) を使うと $p := x - y$ として

$$\begin{aligned} &\underline{u}_t + F_*(D\underline{u}, D^2\underline{u}) \\ &\quad = -B_\varepsilon + F_*\left(-A_\varepsilon \frac{f'(|p|)}{|p|}p, -A_\varepsilon \frac{f'(|p|)}{|p|}\left(I - \frac{p\otimes p}{|p|^2}\right) - A_\varepsilon f''(|p|)\frac{p}{|p|}\otimes\frac{p}{|p|}\right) \\ &\quad = -B_\varepsilon - A_\varepsilon \frac{f'(|p|)}{|p|} F_*(p, I), \\ &\overline{u}_t + F_*(D\overline{u}, D^2\overline{u}) = B_\varepsilon + A_\varepsilon \frac{f'(|p|)}{|p|} F^*(p, I). \end{aligned}$$

このとき

$$B_\varepsilon := A_\varepsilon \sup_{p\in\mathbb{R}^N} \left| \frac{f'(|p|)}{|p|} \{F_*(p,I) \vee F^*(p,I)\} \right|$$

とおくと $\underline{u}$, $\overline{u}$ はそれぞれ (4.1) の古典劣解, 古典優解となる. 更に, 任意の $\varepsilon \in (0,1)$, $t \in [0,T)$, $x, y \in \mathbb{R}^N$ に対して $\underline{u}(t,x;\varepsilon,y) \leq u_0(x) \leq \overline{u}(t,x;\varepsilon,y)$ を満たす. ここで

$$\underline{U}(t,x) := \sup_{\varepsilon>0, y\in\mathbb{R}^N} \underline{u}(t,x;\varepsilon,y), \ \overline{U}(t,x) := \inf_{\varepsilon>0, y\in\mathbb{R}^N} \overline{u}(t,x;\varepsilon,y)$$

と定義する. すると, これらは命題 4.2, 注意 4.8 より, それぞれ (4.1) の粘性劣解, 粘性優解となり,

$$
\begin{aligned}
(4.31) \qquad -B_1T - \|u_0\|_{BUC(\mathbb{R}^N)} - 1 - \frac{3A_1}{2} &\le \underline{U}^*(t,x) \le u_0(x) \le \overline{U}_*(t,x) \\
&\le B_1T + \|u_0\|_{BUC(\mathbb{R}^N)} + 1 + \frac{3A_1}{2} \quad \text{for } (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^N
\end{aligned}
$$

を満たす. また, 任意の $\varepsilon \in (0,1)$, $y \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$
(4.32) \qquad -B_\varepsilon t + u_0(y) - \varepsilon \le \underline{U}(t,y) \le u_0(y),\ u_0(y) \le \overline{U}(t,y) \le B_\varepsilon t + u_0(y) + \varepsilon
$$

となるので, $(t,y) \to (0,x)$, $\varepsilon \to 0$ とすると

$$
(4.33) \qquad \underline{U}_*(0,x) = u_0(x) = \overline{U}^*(0,x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^N
$$

を得る.

Step 2. 集合 $\mathcal{S}$ を

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{S} := \{v : [0,T) \times \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R} \mid v \text{ は (4.1) の粘性劣解}, \ \underline{U}^* \le v \le \overline{U}_* \text{ in } [0,T) \times \mathbb{R}^N\}, \\
&u(t,x) := \sup\{v(t,x) \mid v \in \mathcal{S}\}
\end{aligned}
$$

と定義する. $\mathcal{S} \neq \emptyset$ に注意する. 任意の $v \in \mathcal{S}$ に対して $\underline{U}_*$ の定義と (4.32) より

$$
(4.34) \qquad v^*(t,x) - \overline{U}_*(s,y) \le \overline{U}^*(t,x) - \overline{U}_*(s,y) \le B_\varepsilon t + \varepsilon + A_\varepsilon f(|x-y|)
$$

となるので

$$
\lim_{r \to 0} \sup\{v^*(t,x) - \overline{U}_*(s,y) \mid 0 \le t, s < r,\ x, y \in \mathbb{R}^N,\ |x-y| < r\} \le 0.
$$

更に, 命題 4.2 (1) より, $u^* \le \overline{U}_*$ in $\widehat{Q}_T$ なので, $u \in \mathcal{S}$ となる.

Step 3. u は (4.1) の粘性優解であることを示す.

u が (4.1) の粘性優解でないと仮定する. すると, 命題 4.2 (2) の証明と同様に, $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$, $r_0 > 0$ が存在し, $u_* - \varphi$ は $(t_0,x_0) \in Q_T$ で極小値を取り, $v = u$ として (4.28) - (4.30) が成り立つ. また, $\varphi(t_0.x_0) = u_*(t_0,x_0) \le \overline{U}_*(t_0,x_0)$ であるが, $\overline{U}_*(t_0,x_0) > \varphi(t_0,x_0)$ が成り立つ. 何故ならば, もし $\overline{U}_*(t_0,x_0) = \varphi(t_0,x_0)$ とすると,

$$
\varphi \le v_* \le \overline{U}_* \quad \text{in } Q((t_0,x_0),r_0)
$$

となるため, $\overline{U}_* - \varphi$ は (t_0,x_0) で極小値を取る. $\overline{U}$ は (4.1) の粘性優解であるから,

$$
\varphi_t(t_0,x_0) + F_*(D\varphi(t_0,x_0), D^2\varphi(t_0,x_0)) \ge 0
$$

を得る. しかし, これは (4.28) に反する. よって $\overline{U}_*(t_0,x_0) > \varphi(t_0,x_0)$ が成り立つ. そこで, $\tau > 0$ を $\overline{U}_*(t_0,x_0) > \varphi(t_0,x_0) + \tau$ を満たすように小さく取り, 更に $r_1 \in (0,r_0)$ が存在して

$\overline{U}_* > \varphi + \tau$ in $Q((t_0, x_0), r_1)$ が成り立つ. 必要ならば, τ を $\min\{\tau, r_1^4/2\}$ に置き換えることにより, (4.29) より $\partial Q((t_0, x_1), r_1)$ において

$$\varphi(t, x) + \tau < -\{(t - t_0)^2 + |x - x_0|^4\} \leq v_*(t, x)$$

となり, $\varphi(t_0, x_0) + \tau > v_*(t_0, x_0)$ であることに注意する.

そこで $w = w(t, x)$ を

$$w(t, x) := \begin{cases} \max\{u(t, x), \varphi(t, x) + \tau\} & (t, x) \in Q((t_0, x_0), r_1), \\ u(t, x) & (t, x) \notin Q((t_0, x_0), r_1) \end{cases}$$

と定義する. すると, w は (4.1) の粘性劣解であり, $w \in \mathbb{S}$ となる.

$\{(s_n, y_n)\}_{n=1}^{+\infty} \subset Q((t_0, x_0), r_1)$ で $v(s_n, y_n) \longrightarrow v_*(t_0, x_0)$ $(n \to +\infty)$ を満たすものが取れる. この点列を用いて

$$\begin{aligned} \lim_{n\to+\infty} \{w(s_n, y_n) - v(s_n, y_n)\} &= \lim_{n\to+\infty} \max\{0, \varphi(s_n, y_n) + \delta_1 - v(s_n, y_n)\} \\ &= \max\{0, \delta_1\} = \delta_1 > 0 \end{aligned}$$

を得る. よって十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して $w(s_n, y_n) > u(s_n, y_n)$ となる. これは u の定義に反する. 従って, u は (4.1) の粘性優解である.

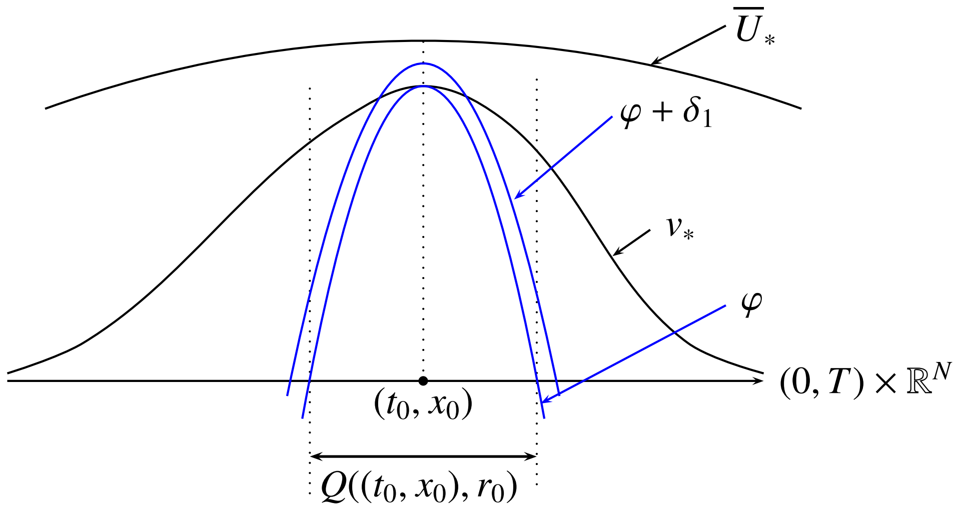

図 4.2.2: w の構成の概略

(4.31) より u は $\widehat{Q}_T$ で有界であり, (4.1) の粘性解である. 更に $\mathbb{S}$ の定義と (4.34) の 2 番目の不等式より

$$\begin{aligned} &\lim_{r\to0} \sup\{u^*(t, x) - u_*(s, y) \mid 0 \leq t, s < r,\ x, y \in \mathbb{R}^N,\ |x - y| < r\} \\ &\quad = \lim_{r\to0} \sup\{\overline{U}^*(t, x) - \underline{U}_*(s, y) \mid 0 \leq t, s < r,\ x, y \in \mathbb{R}^N,\ |x - y| < r\} \\ &\quad \leq 0 \end{aligned}$$

である. また (4.33) とこの不等式より $u^*(0,x) = u_*(0,x) = u_0(x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ となる. 従って, 定理 4.1 より u は $u \in BUC(\widehat{Q}_T)$ で $u(0,x) = u_0(x)$ を満たす (4.1) の唯一つの粘性解である. □

次に粘性解の安定性について述べる. $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0} \subset C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N)$ が任意の $(p,X) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ に対して

$$\underline{F}(p,X) \le \lim_{r\to 0} \inf\{F_\varepsilon(q,Y) \mid (q,Y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N,\ |q-p| < r, \|Y-X\| < r, 0 < \varepsilon < r\}, \tag{4.35}$$

$$\overline{F}(p,X) \ge \lim_{r\to 0} \sup\{F_\varepsilon(q,Y) \mid (q,Y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N,\ |q-p| < r, \|Y-X\| < r, 0 < \varepsilon < r\}, \tag{4.36}$$

を満たすとする. ここで, $\underline{F} \in LSC(\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N)$, $\overline{F} \in USC(\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N)$ とする. このとき, 次の安定性定理が成り立つ.

定理 4.4. 任意の $(p,X) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ に対して *(4.35), (4.36)* が成り立つとする. 各 $\varepsilon > 0$ に対して $u^\varepsilon = u^\varepsilon(t,x)$ を

$$u_t + F_\varepsilon(Du, D^2u) = 0 \quad in\ (0,T) \times \mathbb{R}^N \tag{4.37}$$

の粘性劣解とし, $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は $\widehat{Q}_T$ で一様有界とする. $\overline{u}$ を

$$\overline{u}(t,x) := \lim_{r\to 0} \sup\{u^\varepsilon(s,y) \mid (s,y) \in \widehat{Q}_T, |s-t| < r, |y-x| < r, 0 < \varepsilon < r\}, \tag{4.38}$$

と定義する. このとき $\overline{u}$ は,

$$u_t + \underline{F}(Du, D^2u) = 0 \quad in\ Q_T, \tag{4.39}$$

の粘性劣解である.

同様に u^ε を *(4.37)* の粘性優解とし, $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ は $\widehat{Q}_T$ で一様有界とする. $\underline{u}$ を

$$\underline{u}(t,x) := \lim_{r\to 0} \inf\{u^\varepsilon(s,y) \mid (s,y) \in \widehat{Q}_T, |s-t| < r, |y-x| < r, 0 < \varepsilon < r\}, \tag{4.40}$$

と定義する. このとき $\underline{u}$ は,

$$u_t + \overline{F}(Du, D^2u) = 0 \quad in\ Q_T, \tag{4.41}$$

の粘性優解である.

もう少し条件を課すと以下のような結論が得られ, 解の安定性を少しわかりやすく示している.

系 4.2. $\underline{F} = \overline{F} = F$ *in* $\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ を仮定する. $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ に対して u^ε を $u^\varepsilon(0,x) = u_0(x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ を満たす *(4.37)* の粘性解とする. また, $\overline{u}$, $\underline{u}$ に対して $\overline{u}(0,x) = \underline{u}(0,x) = u_0(x)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ と *(4.13)* が成り立つとする. このとき, $\overline{u} = \underline{u}(=: u) \in BUC(\widehat{Q}_T)$ となり, u は *(4.1)* の粘性解である. 更に

$$u^\varepsilon \longrightarrow u \quad (\varepsilon \to 0,\ \widehat{Q}_T \text{ 上で広義一様}) \tag{4.42}$$

が成り立つ.

$F \in C(\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N)$ で $\underline{F} = F = \overline{F}$ in $\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ ならば, (4.35), (4.36) は $\{F_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ が F に $\mathbb{R}^N \times \mathbb{S}^N$ 上で広義一様収束することを意味する. この系より, 粘性解は (広義) 一様収束に関して安定であることが言える.

定理 4.4 の証明. $\{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ の一様有界性より, $\overline{u}, \underline{u}$ はともに $\widehat{Q_T}$ で有界である. また, 補題 4.1 の証明と同様にして $\overline{u} \in USC(\widehat{Q_T})$, $\underline{u} \in LSC(\widehat{Q_T})$ が示せる.

$\overline{u}$ が (4.39) の粘性劣解であることを示す. $\underline{u}$ が (4.41) の粘性優解であることの証明も同様である. 任意の $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $\overline{u} - \varphi$ が $(t_0, x_0) \in Q_T$ で極大値を取ったとする. φ を修正して $\overline{u}(t_0, x_0) = \varphi(t_0, x_0)$ かつ

$$\overline{u}(t,x) - \varphi(t,x) \leq -\{(t-t_0)^2 + |x-x_0|^4\} \quad \text{in } Q((t_0,x_0),r_0) \quad \text{for some } r_0 > 0$$

としてよい.

$\overline{u}$ の定義より, $\{(\varepsilon_n, s_n, y_n)\}_{n=1}^{+\infty} \subset (0,1) \times Q((t_0,x_0),r_0)$ が存在して

$$(\varepsilon_n, s_n, y_n, u^{\varepsilon_n}(s_n, y_n)) \longrightarrow (0, t_0, x_0, \overline{u}(t_0,x_0)) \quad (n \to +\infty) \tag{4.43}$$

を満たす. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $u^{\varepsilon_n *} - \varphi$ は $(t_n, x_n) \in \overline{Q((t_0,x_0),r_0)}$ で $\overline{Q((t_0,x_0),r_0)}$ における最大値を取るとする. 必要ならば部分列を取ることによって, $(t_n, x_n) \longrightarrow (t_1, x_1) \in \overline{Q((t_0,x_0),r_0)}$ $(n \to +\infty)$ としてよい. すると

$$u^{\varepsilon_n}(s_n,y_n) - \varphi(s_n,y_n) \leq u^{\varepsilon_n *}(t_n,x_n) - \varphi(t_n,x_n) \leq -\{(t_n-t_0)^2 + |x_n-x_0|^4\}$$

より $n \to +\infty$ とすると (4.43) を用いて

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \liminf_{n\to+\infty}\{u^{\varepsilon_n *}(t_n,x_n) - \varphi(t_n,x_n)\} \leq \limsup_{n\to+\infty}\{u^{\varepsilon_n *}(t_n,x_n) - \varphi(t_n,x_n)\} \\ &\leq \quad \lim_{n\to+\infty}\{-(t_n-t_0)^2 - |x_n-x_0|^4\} \leq -\{(t_1-t_0)^2 + |x_1-x_0|^4\}. \end{aligned}$$

となる. よって $(t_n, x_n, u^{\varepsilon_n *}(t_n,x_n)) \longrightarrow (t_0, x_0, \overline{u}(t_0,x_0))$ $(n \to +\infty)$ を得る.

u^{ε_n} は (4.37) の粘性劣解なので

$$\varphi_t(t_n,x_n) + F_{\varepsilon_n}(D\varphi(t_n,x_n), D^2\varphi(t_n,x_n)) \leq 0$$

が成り立つ. $n \to +\infty$ とすると (4.35) より結論が得られる. □

系 4.2 の証明. 定理 4.1, 4.4 より $u(= \overline{u} = \underline{u})$ は (4.1) に対して唯一つの粘性解である.

(4.42) を示す. 任意の $T' \in (0,T)$, 任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbb{R}^N$ を固定する.

$$\limsup_{\varepsilon\to 0} M_\varepsilon =: \delta(>0), \ M_\varepsilon := \max_{(t,x)\in[0,T']\times K} |u^\varepsilon(t,x) - u(t,x)|$$

と仮定して矛盾を導く. このとき, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset (0,1)$ が存在して

$$(\varepsilon_n, M_{\varepsilon_n}) \longrightarrow (0, \delta) \quad (n \to +\infty).$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$M_{\varepsilon_n} = |u^{\varepsilon_n}(t_n, x_n) - u(t_n, x_n)|,\ (t_n, x_n) \in [0, T'] \times K$$

とする. 必要ならば部分列を取ることにより $(t_n, x_n) \longrightarrow (t_0, x_0) \in [0, T'] \times K$ $(n \to +\infty)$ としてよい. $|u^{\varepsilon_n}(t_n, x_n) - u(t_n, x_n)| = u^{\varepsilon_n}(t_n, x_n) - u(t_n, x_n)$ のとき

$$\delta = \lim_{n\to+\infty} \{u^{\varepsilon_n}(t_n, x_n) - u(t_n, x_n)\} \le \overline{u}(t_0, x_0) - u(t_0, x_0) = 0$$

を得る. $|u^{\varepsilon_n}(t_n, x_n) - u(t_n, x_n)| = u(t_n, x_n) - u^{\varepsilon_n}(t_n, x_n)$ の場合は

$$\delta = \lim_{n\to+\infty} \{u(t_n, x_n) - u^{\varepsilon_n}(t_n, x_n)\} \le u(t_0, x_0) - \underline{u}(t_0, x_0) = 0$$

となり, いずれの場合も $\delta > 0$ に矛盾する. よって $\delta = 0$ が言えて証明が終わる. □

定理 4.4, 系 4.2 で粘性解の安定性を紹介した. 実は, F が (4.2) で与えられているとき, これらの結果を直接使うことはできない. F が (4.2) で与えられているとき, F の近似としては $\varepsilon > 0$ として

$$F_\varepsilon(p, X) := -\mathrm{tr}\left\{\left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2 + \varepsilon}\right) X\right\} \tag{4.44}$$

或いは

$$F_\varepsilon(p, X) := -\varepsilon\,\mathrm{tr}\,X - \mathrm{tr}\left\{\left(I - \frac{p \otimes p}{|p|^2 + \varepsilon}\right) X\right\}$$

がよく用いられる. この場合の $\underline{F}, \overline{F}$ を求めてみる. $p \neq 0$ のときは $\underline{F}(p, X) = \overline{F}(p, X) = F(p, X)$ となるのはすぐにわかる. $p = 0$ の場合は

$$\frac{|q|}{\sqrt{|q|^2 + \varepsilon}} \le 1 \quad \text{for all } q \in \mathbb{R}^N$$

であることから, 必要ならば部分列を取ることにより,

$$\lim_{(\varepsilon,q)\to(0,0)} \frac{q}{\sqrt{|q|^2 + \varepsilon}} = \nu \in \mathbb{R}^N,\ |\nu| \le 1$$

としてよい. すると,

$$\liminf_{(\varepsilon,q,Y)\to(0,0,X)} F_\varepsilon(q, Y) \ge \inf\{-\mathrm{tr}\{(I - \nu \otimes \nu)X\} \mid \nu \in \mathbb{R}^N, |\nu| \le 1\},$$
$$\limsup_{(\varepsilon,q,Y)\to(0,0,X)} F_\varepsilon(q, Y) \le \sup\{-\mathrm{tr}\{(I - \nu \otimes \nu)X\} \mid \nu \in \mathbb{R}^N, |\nu| \le 1\},$$

が成り立つ. ここで

$$\underline{F}(0, X) = \inf\{-\mathrm{tr}\{(I - \nu \otimes \nu)X\} \mid \nu \in \mathbb{R}^N, |\nu| \le 1\},$$
$$\overline{F}(0, X) = \sup\{-\mathrm{tr}\{(I - \nu \otimes \nu)X\} \mid \nu \in \mathbb{R}^N, |\nu| \le 1\},$$

とおくと, $\underline{F}(0, X)$, $\overline{F}(0, X)$ と (4.4), (4.5) で得られている $F_*(0, X)$, $F^*(0, X)$ は $\underline{F}(0, X) \le F_*(0, X)$, $F^*(0, X) \le \overline{F}(0, X)$ となり, $X \neq O$ のとき, 等号が成り立つとは限らない. 従って, $\underline{F}, \overline{F}$ の場合に定理 4.4 と同様の結果を得るには証明の修正が必要である. この点については後で述べる.

注意 4.9. Evans–Spruck [22] では (直接用いているわけではないが) 先程の $\underline{F}, \overline{F}$ を用いて (4.1) に対する粘性解を定義し, その一意存在を証明している.

(4.7) を使うと, 方程式 (4.1) 特有の次の定理が成り立つ.

定理 4.5 (Chen–Giga–Goto [10])**.** $u : \widehat{Q}_T \longrightarrow \mathbb{R}$ を *(4.1)* の粘性劣解 (*resp,* 粘性優解) とし, $\theta \in C(\mathbb{R})$ を単調非減少とする. このとき $\theta \circ u$ も *(4.1)* の粘性劣解 (*resp,* 粘性優解) である.

注意 4.10. 粘性劣解に関する主張は $\theta \in USC(\mathbb{R})$ で, 粘性優解に関する主張は $\theta \in LSC(\mathbb{R})$ で成り立つ. 詳細は Giga [25, Chapter 4, Section 2] を参照のこと.

定理 4.5 を証明するために次の補題を用意する.

補題 4.2. $\theta \in C(\mathbb{R})$ は単調非減少とする. このとき, 滑らかで狭義単調増加な関数列 $\{\theta\}_{n=1}^{+\infty}$ が存在し,

$$\theta_n \longrightarrow \theta \quad (n \to +\infty,\ \mathbb{R}\ 上で一様).$$

証明. Chen–Giga–Goto [10], Giga [25] に従って証明する. $n \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{Z}$ に対して

$$a_j^{(n)} := \inf\{t \in \mathbb{R} \mid \theta(r) \geq j/n\}$$

とおく. θ の非減少性より

$$a_j^{(n)} \leq a_{j+1}^{(n)} \quad \text{for all } j \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N}. \tag{4.45}$$

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $\{a_j^{(n)}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ は集積点を持たない. 何故ならば, もし $\{a_j^{(n)}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ が集積点を持てば, (4.45) より

$$a_j^{(n)} \longrightarrow \exists a_\infty^{(n)} \in \mathbb{R} \quad (j \to +\infty)$$

となる. $a_j^{(n)}$ の定義と $\theta \in C(\mathbb{R})$ より, $\theta(r) \longrightarrow +\infty$ $(r \to a_\infty^{(n)})$ が示される. これは $|\theta(a_\infty^{(n)})| < +\infty$ と矛盾する.

$\theta_n(r)$ を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} &\theta_n \in C(\mathbb{R}),\ \theta_n(a_j^{(n)}) := \frac{j}{n}, \\ &\theta_n(r) = (1\ 次式) \quad \text{for } r \in (a_j^{(n)}, a_{j+1}^{(n)}),\ j \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

とする. すると θ_n は非減少で

$$|\theta_n(r) - \theta(r)| \leq \frac{1}{n} \quad \text{for } r \in [a_j^{(n)}, a_{j+1}^{(n)}] \text{ and } j \in \mathbb{Z}$$

なので $\theta_n \longrightarrow \theta$ ($j \to +\infty$, $\mathbb{R}$ 上で一様収束) が成り立つ.

$\{a_j^{(n)}\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ は集積点を持たないので, 十分小さな $\delta_n > 0$ が存在して, 各 $j \in \mathbb{Z}$ に対して区間 $(a_j^{(n)} - \delta_n, a_j^{(n)} + \delta_n)$ が取れる. この区間内で近似することによって θ_n は $\mathbb{R}$ 上において C^2 関数で近似できる. それを改めて θ_n とおく. $\overline{\theta}_n(r) := \theta_n(r) + \tanh(r)/n$ とおくと, $\overline{\theta}_n$ は狭義単調増加な C^2 関数であり, $n \to +\infty$ とすると $\overline{\theta}_n$ は $\mathbb{R}$ 上で θ に一様収束する. □

定理 4.5 の証明. 粘性劣解の場合のみを示す.

Step 1. $(\theta \circ u)^* = \theta \circ u^*$ in $\widehat{Q_T}$ を示す.

$\theta \in C(\mathbb{R})$ かつ, 単調非減少性より $(\theta \circ u)^* \leq \theta \circ u^*$ in $\widehat{Q_T}$ は容易にわかる

$(t, x) \in \widehat{Q_T}$ を固定する. $\theta \in C(\mathbb{R})$ なので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ が存在して

$$|r - u^*(t, x)| < \delta \Longrightarrow |\theta(r) - \theta(u^*(t, x))| < \varepsilon$$

となる. また, $\{(t_n, x_n)\}_{n=1}^{+\infty} \subset (0, T) \times \mathbb{R}^N$ が存在して

$$(t_n, x_n) \longrightarrow (t, x) \quad (n \to +\infty),\ |u(t_n, x_n) - u^*(t, x)| < \frac{1}{n}.$$

すると, 十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} \theta\left(u(t_n, x_n) + \frac{1}{n}\right) &= \theta\left(u(t_n, x_n) + \frac{1}{n}\right) - \theta(u^*(t, x)) - \theta(u(t_n, x_n)) + \theta(u^*(t, x)) \\ &\quad +\theta(u(t_n, x_n)) \\ &\leq \theta(u(t_n, x_n)) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

となるので

$$\theta(u^*(t, x)) \leq \theta\left(u(t_n, x_n) + \frac{1}{n}\right) \leq \theta(u(t_n, x_n)) + 2\varepsilon \leq (\theta \circ u)^*(t_n, x_n) + 2\varepsilon$$

を得る. $n \to +\infty, \varepsilon \to 0$ とすると $(\theta \circ u^*)(t, x) \leq (\theta \circ u)^*(t, x)$ となる. 従って, $(\theta \circ u)^* = \theta \circ u^*$ in $\widehat{Q_T}$ が成り立つ.

Step 2. θ は $C^2(\mathbb{R})$ かつ狭義単調増加と仮定して定理 4.2 の主張を示す.

任意の $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $(\theta \circ u)^* - \varphi$ が $(t_0, x_0) \in Q_T$ で極大値を取ったとする. φ を修正して $(\theta \circ u)^* - \varphi$ は (4.27) を満たすとしてよい. $\theta' > 0$ なので, 逆関数 θ^{-1} が存在して $\theta^{-1} \in C^2(\mathbb{R})$, かつ $(\theta^{-1})' > 0$ in $\mathbb{R}$ である. このとき $u^* - \theta^{-1} \circ \varphi$ は (t_0, x_0) で極大値を取る.

$$D(\theta^{-1} \circ \varphi) = (\theta^{-1})'(\varphi)D\varphi,\ D^2(\theta^{-1} \circ \varphi) = (\theta^{-1})''(\varphi)D\varphi \otimes D\varphi + (\theta^{-1})'(\varphi)D^2\varphi$$

なので, $D\varphi(t_0, x_0) \neq 0$ のとき, F が (4.7) を満たすので (t_0, x_0) において

$$(\theta^{-1} \circ \varphi)_t + F_*(D(\theta^{-1} \circ \varphi), D^2(\theta^{-1} \circ \varphi)) = (\theta^{-1})'(\varphi)\{\varphi_t + F_*(D\varphi, D^2\varphi)\} \leq 0$$

を得る. $(\theta^{-1})' > 0$ より

$$\varphi_t + F_*(D\varphi, D^2\varphi) \leq 0 \quad \text{at } (t_0, x_0)$$

となる.

Step 3. $\theta \in C(\mathbb{R})$, かつ非減少の場合に定理 4.2 の主張を示す. 任意の $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $(\theta \circ u)^* - \varphi$ が $(t_0, x_0) \in Q_T$ で極大値を取ったとする. φ を修正して $(\theta \circ u)^* - \varphi$ は $\exists r_0 > 0$ に対して (4.27) を満たすとしてよい.

補題 4.2 より関数列 $\{\theta_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset C^2(\mathbb{R})$ が存在して,

(4.46) $$\theta_n' > 0 \quad \text{in } \mathbb{R},\ \theta_n \longrightarrow \theta \quad (n \to +\infty,\ \mathbb{R} \text{ 上で一様})$$

を満たす. $(\theta_n \circ u)^* - \varphi$ が $(t_n, x_n) \in \overline{Q((t_0, x_0), r_0)}$ において最大値を取るとする. 必要ならば部分列を取ることにより,

$$(t_n, x_n) \longrightarrow (t_1, x_1) \in \overline{Q((t_0, x_0), r_0)} \quad (n \to +\infty)$$

としてよい. (4.46), (4.27) と $(\theta_n \circ u)^*(t_0, x_0) - \varphi(t_0, x_0) \le (\theta_n \circ u)^*(t_n, x_n) - \varphi(t_n, x_n)$ より

$$\begin{aligned}
0 &= (\theta \circ u)^*(t_0, x_0) - \varphi(t_0, x_0) = \lim_{n\to+\infty} (\theta_n \circ u)^*(t_0, x_0) - \varphi(t_0, x_0) \\
&\le \liminf_{n\to+\infty} \{(\theta_n \circ u)^*(t_n, x_n) - \varphi(t_n, x_n)\} \le \limsup_{n\to+\infty} \{(\theta_n \circ u)^*(t_n, x_n) - \varphi(t_n, x_n)\} \\
&\le (\theta \circ u)^*(t_1, x_1) - \varphi(t_1, x_1) \\
&\le -\{(t_1 - t_0)^2 + |x_1 - x_0|^4\} \le 0.
\end{aligned}$$

従って $(t_1, x_1) = (t_0, x_0)$ 及び $(\theta_n \circ u)^*(t_n, x_n) \longrightarrow (\theta \circ u)^*(t_0, x_0)$ $(n \to +\infty)$ を得る. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して上の議論より

$$\varphi_t + F_*(D\varphi, D^2\varphi) \le 0 \quad \text{at } (t_n, x_n).$$

$n \to +\infty$ として結論を得る. □

(1.1) に対する広義解を定義する.

定義 4.3. *$u \in C(Q_T)$ を (4.1) の粘性解とする. $\Gamma(t) := \{u(t, \cdot) = 0\}$ とし, $\{\Gamma(t)\}_{0 \le t < T}$ を (1.1) の広義解という.*

(1.1) の広義解に対する定義可能性は以下のような形で成り立つ.

定理 4.6. *$u, v \in BUC(\widehat{Q}_T)$ を (4.1) の粘性解とする. このとき*

(4.47) $\{u(0, \cdot) > 0\} = \{v(0, \cdot) > 0\}$, $\{u(0, \cdot) = 0\} = \{v(0, \cdot) = 0\}$, $\{u(0, \cdot) < 0\} = \{v(0, \cdot) > 0\}$,

ならば, 各 $t \in [0, T)$ に対して

$$\{u(t, \cdot) > 0\} = \{v(t, \cdot) > 0\}, \tag{4.48}$$

$$\{u(t, \cdot) = 0\} = \{v(t, \cdot) = 0\}, \tag{4.49}$$

$$\{u(t, \cdot) < 0\} = \{v(t, \cdot) > 0\}. \tag{4.50}$$

この定理は $\{\Gamma(t)\}_{t \in [0,T)}$ は $\Gamma(0)$ によって決まり, $\Gamma(0) = \{u(0, \cdot) = 0\}$ を満たす $u(0, \cdot) \in BUC(\mathbb{R}^N)$ の選び方には依らないことを意味している.

定理 4.6 の証明. $M := \sup\limits_{(t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^N} (|u(t, x)| + |v(t, x)|)$ とおく.

Step 1. (4.48) を示す.

$n \in \mathbb{N}$ に対して $\theta_n \in C(\mathbb{R})$ を

$$\theta_n(r) = \min\{\max\{nr, 0\}, M\}$$

とおく. 定理 4.5 より $(\theta_n \circ u)$ は (4.1) の粘性解であり,

$$\{(\theta_n \circ u)(t,\cdot) > 0\} = \{u(t,\cdot) > 0\} \quad \text{for all } t \in [0,T).$$

ここで,

$$\underline{\theta}(t,x) := \liminf_{(s,y)\to(t,x),n\to+\infty} (\theta_n \circ u)(s,y) = \begin{cases} M & \text{if } t \in [0,T) \text{ and } x \in \{u(t,\cdot) > 0\}, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とおくと, 定理 4.4 より $\underline{\theta}$ は (4.1) の粘性優解であり,

$$\{\underline{\theta}(t,\cdot) > 0\} = \{u(t,\cdot) > 0\} \quad \text{for all } t \in [0,T).$$

を満たす. また, $v \in BUC(\widehat{Q_T})$ であり, (4.47) より $v(0,\cdot) \le \underline{\theta}(0,\cdot)$ in $\mathbb{R}^N$ も成り立つことから, Giga–Goto–Ishii–Sato [26, Theorem 2.2] より $v \le \underline{\theta}$ in $\widehat{Q_T}$ が言える. 従って, $\{v(t,\cdot) > 0\} \subset \{u(t,\cdot) > 0\}$ $(t \in [0,T))$ を得る.

上の議論で u, v を入れ替えると $\{u(t,\cdot) > 0\} \subset \{v(t,\cdot) > 0\}$ $(t \in [0,T))$ を得るので, (4.48) が示される.

Step 3. (4.50) を示す.

$\theta_n = \theta_n(r)$ を

$$\theta_n(r) := \max\{\min\{nr, 0\}, -M\} \quad \text{for } r \in \mathbb{R}$$

とし,

$$\overline{\theta}(t,x) := \limsup_{(s,y)\to(t,x),n\to+\infty} (\theta_n \circ u)(s,y) = \begin{cases} -M & \text{if } t \in [0,T) \text{ and } x \in \{u(t,\cdot) < 0\}, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと, 定理 4.4 より $\underline{\theta}$ は (4.1) の粘性劣解であり,

$$\{\overline{\theta}(t,\cdot) < 0\} = \{u(t,\cdot) < 0\} \quad \text{for all } t \in [0,T).$$

を満たす. また, $v \in BUC(\widehat{Q_T})$ であり, (4.47) より $\underline{\theta}(0,\cdot) \le v(0,\cdot)$ in $\mathbb{R}^N$ も成り立つことから, 上と同様の議論により, $\{v(t,\cdot) < 0\} \subset \{u(t,\cdot) < 0\}$ $(t \in [0,T))$ を得る. 同じ方法で $\{u(t,\cdot) < 0\} \subset \{v(t,\cdot) < 0\}$ $(t \in [0,T))$ も示されるので (4.50) がわかる.

Step 1,2 より (4.49) を得る. □

(4.1) に対する粘性解と同値な命題を述べる. これは **5** 節で使われる.

命題 4.7 (Barles–Georgelin [5]). u を Q_T で有界な関数とする.

(1) u が *(4.1)* の粘性劣解であることと次が成り立つことは同値である: 任意の $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $u^* - \varphi$ が $(t_0, x_0) \in Q_T$ で極大値を取るならば, (t_0, x_0) において

$$\begin{aligned} &\varphi_t + F_*(D\varphi, D^2\varphi) \le 0 \quad \textit{if } D\varphi \ne 0, \\ &\varphi_t \le 0 \quad \textit{if } D\varphi = 0,\ D^2\varphi = O. \end{aligned} \tag{4.51}$$

(2) u が (4.1) の粘性優解であることと次が成り立つことは同値である: 任意の $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $u^* - \varphi$ が $(t_0, x_0) \in Q_T$ で極小値を取るならば, (t_0, x_0) において

$$\begin{aligned} &\varphi_t + F_*(D\varphi, D^2\varphi) \geq 0 \quad \textit{if}\ D\varphi \neq 0, \\ &\varphi_t \geq 0 \quad \textit{if}\ D\varphi = 0,\ D^2\varphi = O. \end{aligned}$$

この命題において, $D\varphi(t_0, x_0) = 0$ ならば $D^2\varphi(t_0, x_0) = O$ の場合のみを考えればよいことに注意する.

命題 4.7 の証明. (1) のみを証明する. 簡単のため, $u \in USC(Q_T)$ とする.

Step 1. u が定義 4.2 の意味で (4.1) の粘性劣解ならば, $F_*(0, O) = 0$ に注意すると, (1) の主張が成り立つことは容易に分かる

Step 2. (1) の主張が成り立つとする. $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ に対して, $u - \varphi$ が $(t_0, x_0) \in Q_T$ で極大値を取ったとする. φ を修正することによって (4.27) を満たすとしてよい.

$D\varphi(t_0, x_0) \neq 0$ ならば, 命題 4.1 (1) より (4.8) を満たすので $D\varphi(t_0, x_0) = 0$ と仮定する. $D^2\varphi(t_0, x_0) = O$ ならば, 仮定の $\varphi_t(t_0, x_0) \leq 0$ と $F_*(0, O) = 0$ より

$$\varphi_t + F_*(D\varphi, D^2\varphi) \leq 0 \quad \text{at } (t_0, x_0)$$

を得る. よって $D^2\varphi(t_0, x_0) \neq O$ としてよい.

$\varepsilon > 0$ に対して

$$\psi(t, x, y) := u(t, x) - \varphi(t, y) - \frac{|x - y|^4}{\varepsilon} \quad \text{for } (t, x, y) \in (0, T) \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

とおく. $(t_\varepsilon, x_\varepsilon, y_\varepsilon) \in [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \times \overline{B(x_0, r_0)} \times \overline{B(x_0, r_0)}$ を $\psi(t, x, y)$ の $[t_0 - r_0, t_0 + r_0] \times \overline{B(x_0, r_0)} \times \overline{B(x_0, r_0)}$ における最大値とする. 必要ならば, 部分列を取ることによって

$$(t_\varepsilon, x_\varepsilon, y_\varepsilon) \longrightarrow (t_1, x_1, y_1) \in [t_0 - r_0, t_0 + r_0] \times \overline{B(x_0, r_0)} \times \overline{B(x_0, r_0)} \quad (\varepsilon \to 0)$$

となる. また, $0 = \psi(t_0, x_0, x_0) \leq \psi(t_\varepsilon, x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ より

$$|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^4 \leq \varepsilon \left[\sup_{t \in [t_0 - r_0, t_0 + r_0],\ x, y \in \overline{B(x_0, r_0)}} \{u(t, x) - \varphi(t, y)\} \right]$$

なので, $|x_\varepsilon - y_\varepsilon| \longrightarrow 0$ $(\varepsilon \to 0)$ を得る. 故に $x_1 = y_1$ となる. $\psi(t_0, x_0, x_0) \leq \psi(t_\varepsilon, x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ と (4.27) より

$$\begin{aligned} 0 = \psi(t_0, x_0, x_0) &\leq \liminf_{\varepsilon \to 0} \psi(t_\varepsilon, x_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq \limsup_{\varepsilon \to 0} \psi(t_\varepsilon, x_\varepsilon, y_\varepsilon) \\ &\leq u(t_1, x_1) - \varphi(t_1, x_1) \leq -\{(t_1 - t_0)^2 + |x_1 - x_0|^4\} \end{aligned}$$

が得られ, $(t_1, x_1) = (t_0, x_0)$ 及び $u(t_\varepsilon, x_\varepsilon) \longrightarrow u(t_0, x_0)$ $(\varepsilon \to 0)$ が示される.

$y \mapsto u(t_\varepsilon, x_\varepsilon) - \dfrac{|x_\varepsilon - y|^4}{\varepsilon} - \varphi(t, y)$ は y_ε で極大値を取るので

$$\begin{aligned} D\varphi(t_\varepsilon, y_\varepsilon) &= \frac{4|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2(x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon}, \\ D^2\varphi(t_\varepsilon, y_\varepsilon) &\geq -\frac{4|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^2}{\varepsilon} I - \frac{8(x_\varepsilon - y_\varepsilon) \otimes (x_\varepsilon - y_\varepsilon)}{\varepsilon} \end{aligned}$$

となる.

Case 1. $D\varphi(t_\varepsilon, y_\varepsilon) = 0$ の場合

$x_\varepsilon = y_\varepsilon$ となる. ここで $(t, x) \mapsto u(t, x) - \dfrac{|x - y_\varepsilon|^4}{\varepsilon} - \varphi(t, y_\varepsilon)$ は $(t_\varepsilon, x_\varepsilon)$ で極大値を取り, $D\left(\dfrac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^4}{\varepsilon}\right) = 0$, $D^2\left(\dfrac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^4}{\varepsilon}\right) = O$ となる. よって (4.51) より $\varphi_t(t_\varepsilon, y_\varepsilon) \leq 0$ となる. 一方, $D^2\varphi(t_\varepsilon, y_\varepsilon) \geq O$, F_* の退化楕円性と (4.6) より,

$$\varphi_t + F_*(D\varphi, D^2\varphi) \leq F_*(0, O) = 0 \quad \text{at } (t_\varepsilon, y_\varepsilon).$$

$\varepsilon \to 0$ とすると (4.8) を得る.

Case 2. $D\varphi(t_\varepsilon, y_\varepsilon) \neq 0$ の場合

$(t, x) \mapsto u(t, x) - \dfrac{|x_\varepsilon - y_\varepsilon|^4}{\varepsilon} - \varphi(t, x - (x_\varepsilon - y_\varepsilon))$ は $(t_\varepsilon, x_\varepsilon)$ で極大値を取るので,

$$\varphi_t + F_*(D\varphi, D^2\varphi) \leq 0 \quad \text{at } (t_\varepsilon, y_\varepsilon)$$

となる. $\varepsilon \to 0$ とすると (4.8) を得る. □

$\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $u^* - \varphi$ が $(t_0, x_0) \in Q_T$ で極大値を取るとき, Taylor の定理より (t_0, x_0) の近くでは $\varphi(t, x) = \varphi_1(t) + \varphi_2(x)$ としてよい. ここで, $\varphi_1 \in C^1(0, T)$, $\varphi_2 \in C^2(\mathbb{R}^N)$ で

$$\begin{aligned} &\varphi(t_0, x_0) = \varphi_1(t_0) + \varphi_2(x_0), \ \varphi_{1,t}(t_0) = \varphi(t_0, x_0), \\ &D\varphi_2(t_0, x_0) = D\varphi_2(x_0), \ D^2\varphi_2(t_0, x_0) = D^2\varphi(t_0, x_0) \end{aligned}$$

を満たすとする. このとき, $D\varphi_2(x_0) = 0$, $D^2\varphi_2(t_0, x_0) = O$ ならば, 命題 4.1 の証明を見ると, x_0 の近くで $\varphi_2(x) = \alpha|x - x_0|^4 + \varphi(t_0, x_0)$ $(\alpha > 0)$ に置き換えてよいことを示している (更に (4.1) は未知関数自身を含んでいないので, $\varphi_2(x) = \alpha|x - x_0|^4$ としてよい). この点に関して, 命題 4.1 の証明では定理 4.1 のような比較定理と同様に変数二重化の方法を用いているが, 少し直接的に考えてみる.

$\varphi_1 \in C^1(0, T)$, $\varphi_2 \in C^2(\mathbb{R}^N)$ に対して $u^* - (\varphi_1 + \varphi_2)$ が $(t_0, x_0) \in Q_T$ で極大値 0 を取り, $D\varphi_2(x_0) = 0$, $D^2\varphi_2(x_0) = O$ とする. 命題 4.1 の証明と同じ議論によって

$$u^*(t, x) - \varphi_1(t) - \varphi_2(x) \leq -\{(t - t_0)^2 + |x - x_0|^4\} \quad \text{for } (t, x) \in \overline{Q((t_0, x_0), r_0)}$$

としてよい. $D\varphi(x_0) = 0$, $D^2\phi_2(x_0) = O$ より, ある $\psi \in C^2([0, r_0])$ が存在して

$$\begin{aligned} &|\varphi_2(x) - \varphi_2(x_0)| \leq \psi(|x - x_0|) \quad \text{for } x \in \overline{B(x_0, r_0)}, \\ &\psi(0) = \psi'(0) = \psi''(0) = 0, \ \psi(r) > 0 \quad \text{for } r > 0 \end{aligned}$$

を満たす. ψ の構成に関しては命題 4.2 の証明を参照のこと. このとき,

$$\psi(|\cdot - x_0|) = 0,\ D\psi(|\cdot - x_0|) = 0,\ D^2\psi(|\cdot - x_0|) = O \quad \text{at } x_0$$

に注意する. また,

$$u^*(t,x) - \varphi_1(t) - \psi(|x-x_0|) - \varphi_2(x_0) \le u^*(t,x) - \varphi_1(t) - \varphi_2(x) \le -\{(t-t_0)^2 + |x-x_0|^4\}$$
$$\text{for } (t,x) \in \overline{Q((t_0,x_0),r_0)}.$$

もし $\displaystyle\limsup_{x\to x_0} \frac{\psi(|x-x_0|)}{|x-x_0|^4} < +\infty$ ならば, $\psi(|x-x_0|)$ を $\alpha|x-x_0|^4$ $(\exists\alpha \ge 1)$ に置き換えても構わない. 実際, 十分大きな $\alpha > 1$ に対して

$$u^*(t,x) - \varphi_1(t) - \alpha|x-x_0|^4 - \varphi_2(x_0) \le u^*(t,x) - \varphi_1(t) - \varphi_2(x) \le -\{(t-t_0)^2 + |x-x_0|^4\}$$
$$\text{for } (t,x) \in \overline{Q((t_0,x_0),r_0)}$$

となるので, 最左辺は (t_0,x_0) で $\overline{Q((t_0,x_0),r_0)}$ における狭義最大値を取る.

$\displaystyle\limsup_{x\to x_0} \frac{\psi(|x-x_0|)}{|x-x_0|^4} = +\infty$ の場合は $\displaystyle\limsup_{x\to x_0} \frac{\psi(|x-x_0|)}{|x-x_0|^2} = 0$ より, ある $\omega(r) \ge 0$ for $r \in (0,r_0)$, $\omega(0) = 0$ が存在して

$$\psi(|x-x_0|) \le \omega(|x-x_0|)|x-x_0|^2 \quad \text{for all } x \in B_N(x_0,r_0).$$

ここで **6** 節で議論されるような修正をすることにより, $\omega(r)$ は $r \in [0,+\infty)$ に関して単調非減少, 連続, 劣線形性を満たすとしてよい. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $K_\varepsilon > 0$ を

$$K_\varepsilon \ge \frac{1}{\varepsilon},\ \psi(|x-x_0|) \le K_\varepsilon|x-x_0|^4 + \varepsilon \quad \text{for all } x \in B_N(x_0,r_0). \tag{4.52}$$

を満たすように取る.

関数 $\Psi = \Psi(t,x)$ を

$$\Psi(t,x) = u^*(t,x) - \varphi_1(t) - K_\varepsilon|x-x_0|^4 - \varphi_2(x_0) \tag{4.53}$$

とおく. $(t_\varepsilon,x_\varepsilon) \in \overline{Q((t_0,x_0),r_0)}$ を

$$\Psi(t_\varepsilon,x_\varepsilon) = \max_{(t,x)\in\overline{Q((t_0,x_0),r_0)}} \Psi(t,x)$$

を満たすとする. このとき $\Psi(t_0,x_0) \le \Psi(t_\varepsilon,x_\varepsilon)$ より

$$\begin{aligned} K_\varepsilon|x_\varepsilon - x_0|^4 &\le u^*(t_\varepsilon,x_\varepsilon) - \varphi_1(t_\varepsilon) - u^*(t_0,x_0) + \varphi_1(t_0) \\ &\le u^*(t_0,x_0) - \varphi_1(t_0) - \varphi_2(x_0) + \varphi_2(x_\varepsilon) - (t_\varepsilon - t_0)^2 - |x_\varepsilon - x_0|^4 \\ &\quad -u^*(t_0,x_0) + \varphi_1(t_0) \\ &\le \varphi_2(x_\varepsilon) - \varphi_2(t_0) - (t_\varepsilon - t_0)^2 - |x_\varepsilon - x_0|^4 \\ &\le \omega(|x-x_0|)|x-x_0|^2 - |x_\varepsilon - x_0|^4 - (t_\varepsilon - t_0)^2. \end{aligned} \tag{4.54}$$

よって (4.52) より
$$|x_\varepsilon - x_0|^2 \le \varepsilon\omega(|x - x_0|) \le \varepsilon\omega(r_0).$$
が得られ, $|x_\varepsilon - x_0| \le C\sqrt{\varepsilon}$ となる. これを (4.54) の最右辺に使うと

$$|t_\varepsilon - t_0| \le C\sqrt{\varepsilon\omega(C\sqrt{\varepsilon})},\ K_\varepsilon|x_\varepsilon - x_0|^2 \le \omega(C\sqrt{\varepsilon}) \tag{4.55}$$

となる. 但し, $C > 0$ は $\varepsilon > 0$ に無関係な定数. u^* が (4.1) の粘性劣解であることより $p_\varepsilon := x_\varepsilon - x_0$ として

$$\varphi_{1,t}(t_\varepsilon) + 4K_\varepsilon|p_\varepsilon|^2 F_*(p_\varepsilon, I) = \varphi_{1,t}(t_\varepsilon) + F_*(4K_\varepsilon|p_\varepsilon|^2 p_\varepsilon, 4K_\varepsilon|p_\varepsilon|^2 I + 8K_\varepsilon p_\varepsilon \otimes p_\varepsilon) \le 0.$$

最初の等式は (4.7) から得られる. $\varepsilon \to 0$ とすると (4.5), (4.55) より

$$\varphi_t(t_0, x_0) = \varphi_{1,t}(t_0) \le 0$$

が. 得られ, 命題 4.1 が示される. 以上の議論より $\varphi_2(x)$ は x_0 の近くでは $\alpha|x - x_0|^4(+\varphi_2(x_0))$ $(\alpha > 0)$ と思ってよいと言える.

注意 4.11. (1) $\displaystyle\limsup_{x\to x_0}\frac{\psi(|x - x_0|)}{|x - x_0|^4} = +\infty$ の場合は $x \to x_0$ としたときの $\psi(|x - x_0|)$ の挙動が $o(|x - x_0|^2)$ より詳しくはわからない. 従って $u^*(t, x) - \varphi_1(t) - \alpha|x - x_0|^4 - \varphi_2(x_0)$ が (t_0, x_0) で極大値をとるかどうかが明確でない. しかし (4.53) のような関数を使って議論することにより, $u^*(t, x) - \varphi_1(t) - \alpha|x - x_0|^4$ が (t_0, x_0) で極大値を取るとした場合と実質的に同じ状況になることがわかる.

(2) $\varphi_2(x)$ を $\alpha|x - x_0|^4$ に置き換えてよい事実は **5** 節の定理 5.1 の証明に用いられる.

系 4.1 の証明の後で, F が (4.2) で与えられているとき, 定理 4.4, 系 4.2 を直接使うことはできないと述べた. F_ε が (4.44) で与えられているとき, 定理 4.4 の主張が (従って, 系 4.2 の主張も) が成り立つことを命題 4.1 を用いて証明する.

F_ε が (4.44) で与えられた場合の定理 4.4 の証明. 粘性劣解の場合にのみ証明する. u は Q_T で有界, かつ上半連続としてよい.

各 $\varepsilon > 0$ に対して u_ε を (4.44) の連続な粘性解とし, $\overline{u}$ を (4.38) で定義された関数とする. 任意の $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $\overline{u} - \varphi$ は $(t_0, x_0) \in Q_T$ で極大値を取ったとする. φ を修正することによって $r_0 > 0, \varphi_1 \in C^1(0, T), \varphi_2 \in C^2(\mathbb{R}^N)$ が存在して

$$\begin{aligned}
&\varphi(t, x) = \varphi_1(t) + \varphi_2(x) \quad \text{for } (t, x) \in \overline{Q((t_0, x_0), r_0)},\\
&\overline{u}(t_0, x_0) - \{\varphi_1(t_0) + \varphi_2(x_0)\} = 0,\\
&\overline{u}(t, x) - \{\varphi_1(t) + \varphi_2(x)\} \le -\{(t - t_0)^2 + |x - x_0|^4\} \quad \text{for } (t, x) \in \overline{Q((t_0, x_0), r_0)},
\end{aligned}$$

を満たすとしてよい.

$D\varphi_2(x_0) \neq 0$ の場合は, 定理 4.4 の証明と同様に議論すればよいので, $D\varphi_2(x_0) = 0$ と仮定する. 命題 4.1 より $D^2\varphi_2(x_0) = O$ も仮定してよい. 定理 4.4 の証明と同様にして, $\{\varepsilon_n\}_{n=1}^{+\infty}$, $\{(t_n, x_n)\}_{n=1}^{+\infty} \subset \overline{Q((t_0, x_0), r_0)}$, が存在して

$$u_{\varepsilon_n}(t_n, x_n) - \{\varphi_1(t_n) + \varphi_2(x_n)\} = \max_{\overline{Q((t_0,x_0),r_0)}}\{u_{\varepsilon_n} - (\varphi_1 + \varphi_2)\},$$
$$(\varepsilon_n, t_n, x_n, u_{\varepsilon_n}(t_n, x_n)) \longrightarrow (0, t_0, x_0, \overline{u}(t_0, x_0)) \quad (n \to +\infty),$$

を満たす. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して u_{ε_n} は (4.44) の粘性劣解なので,

$$\varphi_{1,t}(t_n) + F_{\varepsilon_n}(D\varphi_2(x_n), D^2\varphi_2(x_n)) \leq 0 \tag{4.56}$$

となる. ここで,

$$\left| \frac{D\varphi_2(x_n)}{\sqrt{|D\varphi_2(x_n)|^2 + \varepsilon_n^2}} \right| \leq 1$$

であることより, (4.56) において $n \to +\infty$ とすると, $\underline{F}(0, O) = 0$ より

$$\varphi_{1,t}(t_0) = \varphi_{1,t}(t_0) + \underline{F}(D\varphi_2(x_0), D^2\varphi_2(x_0)) \leq 0$$

を得る. $\varphi(t_0, x_0) = \varphi_{1,t}(t_0)$ より証明が終わる. □

5 BMO アルゴリズムの収束

本節では BMO アルゴリズムの収束について議論する. 内容は主に Evans [18], Ishii [33], Ishii–Pires–Souganidis [34] 等に従う.

5.1 非線形作用素の導入

BMO アルゴリズムは熱方程式の初期値問題 (2.1) の解を利用して集合列 $\{C_k\}_{k=0}^{+\infty}$ を構成し, 時間刻み幅 $h > 0$ に関して極限を取るというものである. 本来ならば, この集合列 $\{C_k\}_{k=0}^{+\infty}$ を直接解析すべきであるが, それは難しいと思われる. 与えられたコンパクト集合 $C_0 \subset \mathbb{R}^N$ に対して (2.2) で定義された集合 C_1 を対応させる作用素を $\mathcal{H}$ とおく. つまり $C_1 := \mathcal{H}C_0$ とする. このとき, $C_k = \mathcal{H}C_{k-1} = \mathcal{H}^k C_0 := \mathcal{H}[\mathcal{H}^{k-1}C_0]$ となり, $\mathcal{H}$ は $\mathbb{R}^N$ の空でないコンパクト集合全体からなる集合 $\mathcal{C}$ 上の非線形作用素となる. $\mathcal{C}$ は Hausdorff 距離に関して完備距離空間である (cf. Schneider [48, Theorem 1.8.2]) が, 線型空間ではないので, 通常の関数解析や発展方程式論が使えない. そこで Evans [18] のアイディアに従い, BMO アルゴリズムに付随する非線形作用素 S_h を導入し, 集合列 $\{C_k\}_{k=0}^{+\infty}$, 或いは $\mathcal{H}$ の解析を S_h の解析に切り替える. この点について説明する.

$h > 0$ とする. $g \in C(\mathbb{R}^N)$ に対して, 作用素 S_h を

$$[S_h g](x) := \sup\{\lambda \in \mathbb{R} \mid v(h, x; \{g \geq \lambda\}) \geq 0\} \tag{5.1}$$

と定義する. ここで $v(\cdot,\cdot;\{g \geq \lambda\})$ は $C_0 = \{g \geq \lambda\}$ としたときの (2.1) の解である.

上の非線形作用素 S_h は Evans [18] によって初めて導入された. これは等高面の方法からのアイディアであるが, 基本的な考え方は, 例えば, 画像処理における数学的モルフォロジーに見られる (cf. Matheron [44]). それを Cao [8] に従い, BMO アルゴリズムの場合に説明してみる. $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ を以下を満たす $\mathbb{R}^N$ の部分集合の族とする.

$$\bigcap_{\mu\in\mathbb{R}} X_\mu = \emptyset \text{ and } \bigcup_{\mu\in\mathbb{R}} X_\mu = \mathbb{R}^N, \tag{5.2}$$

$$X_\mu \subset X_\nu \quad \text{if } \mu > \nu, \tag{5.3}$$

$$\bigcap_{\nu<\mu} X_\nu = X_\mu \quad \text{for all } \mu \in \mathbb{R}. \tag{5.4}$$

この $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ に対して, 関数 $u = u(x)$ を

$$u(x) := \sup\{\mu \in \mathbb{R} \mid x \in X_\mu\} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^N \tag{5.5}$$

と定義する.

補題 5.1. $X_\mu = \{u \geq \mu\}$.

証明. $x \in X_\mu$ とすると, u の定義より $u(x) \geq \mu$ となり, $X_\mu \subset \{u \geq \mu\}$. (5.4) より $x \in X_\mu$ ならば, $x \in X_\nu$ $(\forall \nu < \mu)$ なので, $x \notin X_\mu$ とすると $u(x) < \mu$ となる. 故に $\{u \geq \mu\} \subset X_\mu$ が言えて, 証明が終わる. □

補題 5.1 より

$$u(x) = \sup\{\mu \in \mathbb{R} \mid x \in \{u \geq \mu\}\} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^N$$

となる. これを

$$[S\,u](x) := \sup\{\mu \in \mathbb{R} \mid x \in \{u \geq \mu\}\} \quad \text{for } x \in \mathbb{R}^N$$

と書いてみると, (5.5) より作用素 S は恒等作用素であるが, この式は BMO アルゴリズムから作用素 S_h の定義の仕方を示唆しているように見える. 集合族 $\{\{v(h,\cdot;\{g \geq \lambda\}) \geq 0\}\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ は (5.2) - (5.4) を満たすので, 上式の $\{u \geq \mu\}$ を $\{v(h,\cdot;\{g \geq \lambda\}) \geq 0\}$ に置き換えることで BMO アルゴリズムから作用素 S_h を定義していると考えられる.

注意 5.1. 数学的モルフォロジーとは画像中の図形の特徴を抽出するために集合演算, 束論等を用いて図形を変形する理論のことである. 元々は鉱山等に分布する鉱物の幾何的特性を評価する方法として考案された. 最近は画像処理における文字抽出等に応用されている. 詳細は, 例えば, Serra [49] 等を参照.

5.2 作用素 S_h の性質

この小節では (5.1) で定義した作用素 S_h の性質について述べる. まず, 次の命題が成り立つ.

命題 5.1. $C_0(\neq\emptyset)\subset\mathbb{R}^N$ をコンパクト集合とし, $\{C_k\}_{k=0}^{+\infty}$ を *BMO* アルゴリズムで定義されるコンパクト集合列とする. $g\in C(\mathbb{R}^N)$ を

$$C_0=\{g\geq 0\},\ \partial C_0=\{g=0\},\ \mathbb{R}^N\backslash C_0=\{g<0\}$$

を満たすとする. このとき, $C_1=\{S_h g\geq 0\}$ が成り立つ. 更に, $k\in\mathbb{N}$ に対して $C_k=\{S^k g\geq 0\}$ となる. 但し, $S_h^k g:=S_h(S_h^{k-1}g)$ $(k\in\mathbb{N})$ とする.

証明. g の取り方より $C_1=\{v(h,\cdot;\{g\geq 0\})\geq 0\}$ である. S_h の定義より, $v(h,x;\{g\geq 0\})\geq 0$ ならば $[S_h g](x)\geq 0$ なので, $C_1\subset\{S_h g\geq 0\}$ となる.

$v(h,x;\{g\geq 0\})<0$ とする. $v(\cdot,\cdot;\{g\geq 0\})$ は初期値問題 (2.1) の解なので

$$\int_{C_0}E(t,y-x)dy<\int_{\mathbb{R}^N\backslash C_0}E(t,y-x)dy$$

となる. 任意の $\lambda\in[0,+\infty)$ に対して $\{g\geq\lambda\}\subset C_0$ なので, 上の不等式より

$$\int_{\{g\geq\lambda\}}E(t,y-x)dy<\int_{\{g<\lambda\}}E(t,y-x)dy$$

従って $[S_h g](x)<0$ となり, $\{S_h g\geq 0\}\subset C_1$ が示される. 故に $C_1=\{S_h g\geq 0\}$ を得る.

上で示したことより, $C_2=\{v(h,\cdot;\{S_h g\geq 0\})\geq 0\}$ となり, 上と同様の議論によって $C_2=\{S_h^2 g\geq 0\}$ が言える. 以下, 数学的帰納法によって $C_k=\{S_h^k g\geq 0\}$ $(k\in\mathbb{N})$ が証明できる. □

S_h の性質をいくつかの命題に分けて述べる.

命題 5.2 (Ishii [33])**.** $g_1,g_2,g\in C(\mathbb{R}^N)$ とする.

(1) $g_1\leq g_2$ *on* $\mathbb{R}^N$ ならば $S_h g_1\leq S_h g_2$ *on* $\mathbb{R}^N$.

(2) 任意の定数 $c\in\mathbb{R}$ に対して $S_h(g+c)=S_h g+c$ *on* $\mathbb{R}^N$.

(3) 任意の定数 $c\in\mathbb{R}$ に対して $S_h c=c$ *on* $\mathbb{R}^N$.

証明. (1) $g_1\leq g_2$ on $\mathbb{R}^N$ ならば, $\{g_1\geq\lambda\}\subset\{g_2\geq\lambda\}$ なので, 熱方程式に対する最大値原理より $v(\cdot,\cdot;\{g_1\geq\lambda\})\leq v(\cdot,\cdot;\{g_2\geq\lambda\})$ on $[0,h]\times\mathbb{R}^N$ が成り立つ. 従って $S_h g_1\leq S_h g_2$ on $\mathbb{R}^N$ を得る.

(2) S_h の定義より

$$\begin{aligned}[S_h(g+c)](x) &= \sup\{\lambda\mid v(h,x;\{g+c\geq\lambda\})\}\\ &= \sup\{\lambda+c\mid v(h,x;\{g\geq\lambda\})\}\quad(\lambda\text{ を }\lambda+c\text{ に置き換える})\\ &= [S_h g](x)+c.\end{aligned}$$

(3) $g=0$ on $\mathbb{R}^N$ とおくと, $S_h g=0$ on $\mathbb{R}^N$ は明らか. 従って, (2) において $g=0$ on $\mathbb{R}^N$ とおけばよい. □

命題 5.1, 5.2 (2) より, 任意の $g \in C(\mathbb{R}^N)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\{S_h^k g \geq \lambda\} = \{v(h, \cdot; \{S_h^{k-1} g \geq \lambda\}) \geq 0\}$$

が得られる.

命題 5.2 より次の系が得られる.

系 5.1 (Ishii [33])**.** $g_1, g_2, g \in BUC(\mathbb{R}^N)$ とする. このとき

(1) $\|S_h g\| \leq \|g\|$.

(2) $\|S_h g_1 - S_h g_2\| \leq \|g_1 - g_2\|$.

(3) $|S_h g(x) - S_h g(y)| \leq \omega_g(|x-y|)$ *for all* $x, y \in \mathbb{R}^N$. ここで, ω_g は g の連続度である.

注意 5.2. (1) 系 5.1 より S_h は $BUC(\mathbb{R}^N)$ から $BUC(\mathbb{R}^N)$ への非拡大作用素 (non-expansive operator) であることがわかる.

(2) 系 5.1 (2) に関しては $g_1, g_2 \in C(\mathbb{R}^N)$ で $\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |g_1(x) - g_2(x)| < +\infty$ ならば,

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |[S_h g_1](x) - [S_h g_2](x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |g_1(x) - g_2(x)|$$

として成立する.

系 5.1 の証明. (1) 命題 5.1 (1), (3) より

$$|[S_h g](x)| \leq S_h \|g\| = \|g\| \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^N.$$

これより, $\|S_h g\| \leq \|g\|$ を得る.

(2) 命題 5.1 (1), (2) より

$$[S_h g_1](x) \leq [S_h(g_2 + \|g_1 - g_2\|)](x) = [S_h g_2](x) + \|g_1 - g_2\| \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^N.$$

これより, $\|S_h g_1 - S_h g_2\| \leq \|g_1 - g_2\|$ が示される.

(3) $y \in \mathbb{R}^N$ を固定する. このとき, $|g(x+y) - g(x)| \leq \omega_g(|y|)$ $(x \in \mathbb{R}^N)$ より, 命題 5.1 (1) を使って

$$[S_h g(\cdot + y)](x) \leq [S_h(g + \omega_g(|y|))](x) = [S_h g](x) + \omega_g(|y|)$$

となる. 一方,

$$\int_{\{z \mid g(z+y) \geq \lambda\}} E(t, z-x) dz = \int_{\{z \mid g(z) \geq \lambda\}} E(t, z-(x+y)) dz$$

より, $[S_h g(\cdot + y)](x) = [S_h g](x+y)$ となる. 従って,

$$[S_h g](x+y) \leq [S_h g](x) + \omega_g(|y|)$$

を得る. 同様にして $[S_h g](x+y) \geq [S_h g](x) - \omega_g(|y|)$ も得られるので,

$$|[S_h g](x+y) - [S_h g](x)| \leq \omega_g(|y|)$$

が示される. ここで y を $y - x$ に置き換えると, 結論の不等式を得る. □

次の命題は命題 5.2 (2), (3) の一般化である.

命題 5.3 (Ishii [33]). $g \in C(\mathbb{R}^N)$, $h > 0$ とする. 任意の非減少関数 $\theta \in C(\mathbb{R})$ に対して

$$S_h(\theta \circ g) = \theta \circ (S_h g) \quad on\ \mathbb{R}^N.$$

証明. $\theta \in C(\mathbb{R})$ が狭義単調増加ならば, $\{g \geq \lambda\} = \{\theta \circ g \geq \theta(\lambda)\}$ なので, 命題 5.3 の主張は成り立つ. よって, θ は単調非減少とする.

補題 4.2 より狭義単調増加な関数列 $\{\theta_k\}_{k=1}^{+\infty} \subset C(\mathbb{R})$ が存在して, $\theta_k \longrightarrow \theta$ ($k \to +\infty$, $\mathbb{R}$ 上一様収束) を満たす. このとき $\theta_k \circ [S_h g] = S_h(\theta_k \circ g)$ in $\mathbb{R}^N$ となる. $\{\theta_k\}_{k=1}^{+\infty}$ の選び方より

$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\theta_k \circ g(x) - \theta \circ g(x)| = \lim_{k\to+\infty} \sup_{r\in\mathbb{R}} |\theta_k(r) - \theta(r)| = 0,$$
$$\lim_{k\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\theta_k \circ S_h g(x) - \theta \circ S_h g(x)| = \lim_{k\to+\infty} \sup_{r\in\mathbb{R}} |\theta_k(r) - \theta(r)| = 0$$

となり, これらと注意 5.2 (2) より

$$\begin{aligned}
\sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\theta \circ S_h g(x) - S_h(\theta \circ g)(x)| &\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |\theta \circ S_h g(x) - \theta_k \circ S_h g(x)| \\
&\quad + \sup_{x\in\mathbb{R}^N} |[S_h(\theta_k \circ g)](x) - [S_h(\theta \circ g)](x)| \\
&\leq 2 \sup_{r\in\mathbb{R}} |\theta_k(r) - \theta(r)|.
\end{aligned}$$

$k \to +\infty$ とすると $\theta \circ S_h g = S_h(\theta \circ g)$ in $\mathbb{R}^N$ が得られる. □

5.3 BMO アルゴリズムの収束の証明

この小節では BMO アルゴリズムの収束を証明する. BMO アルゴリズムの収束は Mascarenhas [43] によって最初に与えられた. その後, Evans [18] によって等高面の方法, 粘性解理論, Brezis–Pazy の非線形半群の生成定理等を応用した証明が与えられた. Barles–Georgelin [5] による比較的簡単な収束の証明が与えられた後, Ishii [33], Ishii–Pires–Souganidis [34] では熱方程式の基本解を一般化した場合を考察し, 粘性解の安定性 (定理 4.4) に基づく証明が与えられた.

ここでは Ishii [33], Ishii–Pires–Souganidis [34], Eto–Ishii–Giga [17] に沿った形で BMO アルゴリズムの収束を証明する. 基本的には半群理論における Chernoff の公式, 或いは Trotter–Kato の公式と呼ばれている収束定理や粘性解に対する安定性の応用である.

まず **5.2** 節で導入した作用素 S_h の生成作用素を計算する.

定理 5.1. 任意の $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $z \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon > 0$ に対して $D\varphi(z) \neq 0$ とする. このとき, $\delta > 0$ が存在して, 任意の $x \in B(z, \delta)$, $h \in (0, \delta)$ に対して

$$[S_h\varphi](x) - \varphi(x) \leq \{-F(D\varphi(z), D^2\varphi(z)) + \varepsilon\}h,$$
$$[S_h\varphi](x) - \varphi(x) \geq \{-F(D\varphi(z), D^2\varphi(z)) - \varepsilon\}h,$$

が成り立つ.

この定理より S_h の生成作用素は (4.2) で定義された $-F$ であることが分かる. 証明の方針としては **3** 節で為された形式的な計算を数学的に厳密に, かつ精密に行うというものである.

定理 5.1 の証明. 任意の $\varphi \in C^2(\mathbb{R}^N)$, $z \in \mathbb{R}^N$, $\varepsilon > 0$ を取る. $z = 0$ としてよい. $a_\varepsilon := 3N\varepsilon - F(D\varphi(0), D^2\varphi(0))$ とおく. ここで, ある $\delta_1 > 0$ が存在して, 任意の $x \in B(0,\delta_1)$, $h \in (0,\delta_1)$ に対して

$$v(h, x; \{\varphi \geq \varphi(x) + a_\varepsilon h\}) < 0$$

を証明する.

Step 1. 小さな $\delta_2 > 0$ を取り, 任意の $x \in B(0,\delta_2)$ に対して集合 $\{\varphi(x - \sqrt{h}U^*(x)\cdot) \geq \varphi(x) + a_\varepsilon h\}$ を適当な 2 次関数を用いて評価する.

$\delta_{2,1} > 0$ を $D\varphi \neq 0$ on $\overline{B(0,\delta_{2,1})}$ となるように固定し, $\{U(x)\}_{x\in B(0,\delta_{2,1})} \subset O(N)$ を

$$U(\cdot) \in C(B(0,\delta_{2,1}), O(N)),\ U(x)\overline{D\varphi(x)} = e_N = (0,0,\ldots,0,1),\ \overline{p} := \frac{p}{|p|}$$

となるように選ぶ. このとき, $v(\cdot,\cdot;\{\varphi \geq \varphi(x) + a_\varepsilon h\})$ は $C_0 = \{\varphi \geq \varphi(x) + a_\varepsilon h\}$ としたときの初期値問題 (2.1) の解なので

$$v(h, x; \{\varphi \geq \varphi(x) + a_\varepsilon h\}) = \int_{\mathbb{R}^N} E(h, z - x)\chi_{\{\varphi\geq\varphi(x)+a_\varepsilon h\}}(z)dz - \int_{\mathbb{R}^N} E(h, z - x)\chi_{\{\varphi<\varphi(x)+a_\varepsilon h\}}(z)dz.$$

$\dfrac{x - z}{\sqrt{h}} = U^*(x)y$ (行列 A に対して A^* は A の転置行列) とおくと,

$$\begin{aligned}
&v(h, x; \{\varphi \geq \varphi(x) + ah\})\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} E(y)\chi_{\{\varphi(x-\sqrt{h}U^*(x)\cdot)\geq\varphi(x)+a_\varepsilon h\}}(x - \sqrt{h}U^*(x)y)dy\\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^N} E(z)\chi_{\{\varphi(x-\sqrt{h}U^*(x)\cdot)<\varphi(x)+a_\varepsilon h\}}(x - \sqrt{h}U^*(x)y)dy.
\end{aligned}$$

必要ならば, $\delta_{2,1} > 0$ を小さく取り直すことによって,

$$a_\varepsilon - \varepsilon = (3N - 1)\varepsilon - F(D\varphi, D^2\varphi) > -F(D\varphi, D^2\varphi) \quad \text{in } B(0,\delta_{2,1})$$

としてよい. Taylor の定理より $\gamma > 0$, $\delta_{2,2} \in (0,\delta_{2,1})$ が存在して, 任意の $h > 0$, $y \in \mathbb{R}^N$, $x \in B(0,\delta_{2,2})$ に対して $\sqrt{h}|y| \leq \gamma$ ならば

$$\begin{aligned}
(5.6)\quad \varphi(x - \sqrt{h}U^*(x)y) &\leq \varphi(x) - \sqrt{h}\langle D\varphi(x), U^*(x)y\rangle + \frac{h}{2}\langle U(x)D^2\varphi(x)U^*(x)y, y\rangle\\
&\quad +\varepsilon h|y|^2\\
&= \varphi(x) - \sqrt{h}|D\varphi(x)|y_N + \frac{h}{2}\langle U(x)(D^2\varphi(x) + 2\varepsilon I)U^*(x)y, y\rangle.
\end{aligned}$$

$y = (y', y_N)$, P は (i,i) 成分が 1, (i,j) 成分が 0 となる $N \times (N-1)$ 行列 $(i = 1, 2, \ldots, N-1$, $j = 1, 2, \ldots, N$, $j \neq i)$ として,

$$\begin{aligned}
&\langle U(x)(D^2\varphi(x) + 2\varepsilon I)U^*(x)y, y\rangle \\
&\quad = \langle U(x)(D^2\varphi(x) + 2\varepsilon I)U^*(x)(Py' + \overline{y}_N), (Py' + \overline{y}_N)\rangle \\
&\quad = \langle U(x)(D^2\varphi(x) + 2\varepsilon I)U^*(x)Py', Py'\rangle + 2\langle U(x)(D^2\varphi(x) + 2\varepsilon I)U^*(x)\overline{y}_N, Py'\rangle \\
&\qquad + \langle U(x)(D^2\varphi(x) + 2\varepsilon I)U^*(x)\overline{y}_N, \overline{y}_N\rangle = *
\end{aligned}$$

となる. ここで $\overline{y}_N$ は第 N 成分が y_N, 第 i 成分が 0 $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ であるベクトルである. 上の式で最右辺第 2 項には $y_i y_N$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ の項が含まれるが,

$$|y_1 y_N| \leq \varepsilon y_i^2 + C_\varepsilon y_N^2 \quad (C_\varepsilon > 0 \text{ は } \varepsilon > 0 \text{ に依る定数})$$

を用いると,

$$\begin{aligned}
* &\leq \langle U(x)(D^2\varphi(x) + 2\varepsilon I)U^*(x)Py', Py'\rangle + \varepsilon|y'|^2 + C_\varepsilon y_N^2 \\
&= \langle U(x)(D^2\varphi(x) + 3\varepsilon I)U^*(x)Py', Py'\rangle + C_\varepsilon y_N^2
\end{aligned}$$

となる. よって,

$$\begin{aligned}
\varphi(x - \sqrt{h}U^*(x)y) &\leq \varphi(x) - \sqrt{h}\langle D\varphi(x), U^*(x)y\rangle + \frac{h}{2}\langle U(x)D^2\varphi(x)U^*(x)y, y\rangle + \varepsilon h|y|^2 \\
&\leq \varphi(x) - \sqrt{h}|D\varphi(x)|y_N + C_\varepsilon y_N^2 + \frac{h}{2}\langle P^*U(x)(D^2\varphi(x) + 3\varepsilon I)U^*(x)Py', y'\rangle.
\end{aligned}$$

を得る.

必要ならば $\gamma, \delta_{2,2} > 0$ を小さく取り直すことにより, 任意の $x \in B(0, \delta_{2,2})$, $y \in B(0, \gamma/\sqrt{h})$ に対して $\varphi(x - \sqrt{h}U^*(x)y) \geq \varphi(x) + a_\varepsilon h$ ならば,

$$\begin{aligned}
y_N &\leq \frac{\sqrt{h}}{|D\varphi(x)| - C_\varepsilon\sqrt{h}y_N}\left(-a_\varepsilon + \frac{1}{2}\langle P^*U(x)(D^2\varphi(x) + 3\varepsilon I)U^*(x)Py', y'\rangle\right) \\
&\leq \frac{\sqrt{h}}{|D\varphi(0)|}\left(-a_\varepsilon + \varepsilon + \frac{1}{2}\langle P^*U(x)(D^2\varphi(x) + 3\varepsilon I)U^*(x)Py', y'\rangle\right).
\end{aligned}$$

ここで

$$\widehat{a_\varepsilon} := \frac{a_\varepsilon - \varepsilon}{|D\varphi(0)|},\ A_\varepsilon := \frac{1}{|D\varphi(0)|}P^*U(x)(D^2\varphi(x) + 3\varepsilon I)U^*(x)P \in \mathbb{S}^{N-1} \tag{5.7}$$

とおく. このとき, $y \in B_N(0, \gamma/\sqrt{t})$ が $\varphi(x - \sqrt{h}U^*(x)y) \geq \varphi(x) + a_\varepsilon h$ を満たせば,

$$y_N \leq \sqrt{h}\left(-\widehat{a_\varepsilon} + \frac{1}{2}\langle A_\varepsilon y', y'\rangle\right) =: \sqrt{h}g(y'),$$

即ち, 任意の $x \in B_N(0, \delta_{2,2})$ に対して

$$\{\varphi(x - \sqrt{h}U^*(x)y) \geq \varphi(x) + a_\varepsilon h\} \cap B_N(0, \gamma/\sqrt{h}) \subset \{y_N \leq \sqrt{h}g(y')\} \cap B_N(0, \gamma/\sqrt{h}).$$

Step 2. $T(\sqrt{h}) := B_{N-1}(0, R(\sqrt{h})) \times \mathbb{R}$ として

$$v(h, x; \{\varphi \geq \varphi(x) + a_\varepsilon h\}) \leq 2\left(\int_{\{y_N \leq \sqrt{h}g(y')\} \cap B_N(0, R(\sqrt{h}))} E(y)dy - \int_{T(\sqrt{h}) \cap \{y_N \leq 0\}} E(y)dy\right) + Ce^{-1/(8h^{2/5})} \tag{5.8}$$

を導く.

任意の $x \in B_N(0, \delta_{2,2})$ に対して

$$\begin{aligned} & v(h, x; \{\varphi \geq \varphi(x) + a_\varepsilon h\}) \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^N} E(y)\chi_{\{\varphi(x-\sqrt{h}U^*(x)\cdot) \geq \varphi(x)+a_\varepsilon h\}}(x - \sqrt{h}U^*(x)y)dy \\ & \quad - \int_{\mathbb{R}^N} E(y)\chi_{\{\varphi(x-\sqrt{h}U^*(x)\cdot) < \varphi(x)+a_\varepsilon h\}}(x - \sqrt{h}U^*(x)y)dy \\ & \leq 2\left(\int_{\{\varphi(x-\sqrt{h}U^*(x)\cdot) \geq \varphi(x)+a_\varepsilon h\} \cap B_N(0,\gamma/\sqrt{h})} + \int_{B_N(0,\gamma/\sqrt{h})^c}\right)E(y)dy - 1. \end{aligned} \tag{5.9}$$

$|S^{N-1}|$ を $\mathbb{R}^N$ における単位球面 S^{N-1} の体積とすると

$$\int_{B_N(0,R(\sqrt{h}))^c} E(z)dz = \frac{|S^{N-1}|}{(4\pi)^{N/2}} \int_{R(\sqrt{h})}^{+\infty} e^{-r^2/4} r^{N-1} dr \leq C \int_{R(\sqrt{h})}^{+\infty} e^{-r^2/8} r dr = Ce^{-R(\sqrt{h})^2/8}$$

となる. 但し, $C > 0$ は $h > 0$ に依らない定数であり, 各行で異なる. ここで, $R(\sqrt{h}) := h^{-1/5}$ とすると, $R(\sqrt{h}) \longrightarrow +\infty$ $(h \to 0)$ である. 更に, ある $\tau > 0$ が存在して, 任意の $h \in (0, \tau)$ に対して $R(\sqrt{h}) \leq \gamma/\sqrt{h}$ が成り立つ. すると, この $R(\sqrt{h})$ に対して (5.6) 以降の議論が使える. Step 1 の最後に得た包含関係, (5.9) と

$$\frac{1}{2} = \int_{\{z_N \leq 0\}} E(z)dz \geq \int_{T(\sqrt{h}) \cap \{z_N \leq 0\}} E(z)dz \tag{5.10}$$

より (5.8) を得る.

Step 3. (5.8) の右辺第 1 項を評価する.

まず

$$\begin{aligned} J &:= \int_{\{z_N \geq \sqrt{h}g(z')\} \cap B_N(0,R(\sqrt{h}))} E(z)dz - \int_{T(\sqrt{h}) \cap \{z_N \leq 0\}} E(z)dz \\ &\leq \frac{1}{(4\pi)^{N/2}} \int_{B_{N-1}(0,R(\sqrt{h}))} \int_0^{\sqrt{h}g(z')} e^{-(|z'|^2+r^2)/4} drdz' \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{N/2}} \int_0^{\sqrt{h}} \int_{B_{N-1}(0,R(\sqrt{h}))} e^{-(|z'|^2+(rg(z'))^2)/4} g(z')drdz' = *. \end{aligned} \tag{5.11}$$

ここで Taylor の定理より, $\theta \in (0, 1)$ が存在して

$$\begin{aligned} * &= \frac{\sqrt{h}}{(4\pi)^{N/2}} \int_{B_{N-1}(0,R(\sqrt{h}))} e^{-|z'|^2/4} g(z')dz' \\ & \quad + \frac{h}{2(4\pi)^{N/2}} \int_{B_{N-1}(0,R(\sqrt{h}))} \frac{\theta\sqrt{h}}{2} e^{-(|z'|^2+(\theta\sqrt{h}g(z'))^2)/4} \{g(z')\}^3 dz' \end{aligned} \tag{5.12}$$

となる. ここで右辺第 2 項は $x \in B_N(0, \delta_{2,2})$ に対して一様であり,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{h}{2(4\pi)^{N/2}} \int_{B_{N-1}(0,R(\sqrt{h}))} \frac{\theta\sqrt{h}}{2} e^{-(|z'|^2+(\theta\sqrt{h}g(z'))^2)/4} \{g(z')\}^3 dz' \right| \\
&\quad \le \frac{h^{3/2}}{4(4\pi)^{N/2}} \int_{B_{N-1}(0,R(\sqrt{h}))} e^{-|z'|^2/4} |g(z')|^3 dz' \le C_\varepsilon h^{3/2}.
\end{aligned}$$

更に

$$\begin{aligned}
\int_{B_{N-1}(0,R(\sqrt{h}))} e^{-|z'|^2/4} g(z') dz' &\le \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|z'|^2/4} g(z') dz' + \int_{B_{N-1}(0,R(\sqrt{h}))} e^{-|z'|^2/4} |g(z')| dz' \\
&\le \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|z'|^2/4} g(z') dz' e + C_\varepsilon e^{-1/(8h^{2/5})}
\end{aligned}$$

が成り立つ. 故に

$$J \le \frac{\sqrt{h}}{(4\pi)^{N/2}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|z'|^2/4} g(z') dz' + C_\varepsilon h^{3/2}.$$

ところで, A_ε の定義 (5.7) より A_ε は対称行列なので, A_ε の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{N-1}$ は全て実数である. 故に直交行列 Q が存在して

$$Q^* A_\varepsilon Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & \text{\huge 0} & \\ & & \ddots & & \\ & & & \ddots & \\ & \text{\huge 0} & & & \lambda_{N-1} \end{pmatrix} =: X$$

となるので, $y' := Q^* z'$ として

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|z'|^2/4} g(z') dz' &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|Qy'|^2/4} (-\widehat{a_\varepsilon}) dy' + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|z'|^2/4} \langle QX^*Qz', z' \rangle dz' \\
&= -\widehat{a_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|Qy'|^2/4} dy' + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|Qy'|^2/4} \langle Xy', y' \rangle dy' \\
&= -\widehat{a_\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|Qy'|^2/4} dy' + \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|y'|^2/4} \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i y_i^2 dy' = **.
\end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|y'|^2/4} dy' = |S^{N-2}| \int_0^{+\infty} e^{-r^2/4} r^{N-2} dr, \\
&\int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|y'|^2/4} y_i^2 dy' = \frac{1}{N-1} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|y'|^2/4} |y'|^2 dy' = 2|S^{N-2}| \int_0^{+\infty} e^{-r^2/4} r^{N-2} dr
\end{aligned}$$

であることより,

$$** = |S^{N-2}| \int_0^{+\infty} e^{-r^2/4} r^{N-2} dr \left(-\widehat{a_\varepsilon} + \sum_{i=1}^{N-1} \lambda_i \right) = |S^{N-2}| \int_0^{+\infty} e^{-r^2/4} r^{N-2} dr (-\widehat{a_\varepsilon} + \operatorname{tr} A_\varepsilon).$$

$\mathrm{tr}\,A_\varepsilon$ に関して

$$PP^* = \begin{bmatrix} 1 & & & \text{\Large 0} \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\Large 0} & & & 0 \end{bmatrix} = I - e_N \otimes e_N$$

を使うと

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,A_\varepsilon &= \frac{1}{|D\varphi(0)|}\mathrm{tr}\{P^* U(0)(D^2\varphi(0) + 3\varepsilon I)U^*(0)P\} \\
&= \frac{1}{|D\varphi(0)|}\mathrm{tr}\{PP^* U(0)(D^2\varphi(0) + 3\varepsilon I)U^*(0)\} \\
&= \frac{1}{|D\varphi(0)|}\mathrm{tr}\{(I - e_N \otimes e_N)U(0)(D^2\varphi(0) + 3\varepsilon I)U^*(0)\} \\
&= \frac{1}{|D\varphi(0)|}\mathrm{tr}\{(I - e_N \otimes e_N)U(0)D^2\varphi(0)U^*(0)\} + \frac{3\varepsilon(N-1)}{|D\varphi(0)|} \\
&= \frac{1}{|D\varphi(0)|}\mathrm{tr}\left\{\left(I - \frac{U(0)D\varphi(0) \otimes U(0)D\varphi(0)}{|D\varphi(0)|^2}\right)U(0)D^2\varphi(0)U^*(0)\right\} + \frac{3\varepsilon(N-1)}{|D\varphi(0)|}
\end{aligned}$$

を得る. ここで, $e_N = U(0)\left(\dfrac{D\varphi(0)}{|U(0)D\varphi(0)|}\right)$ であることを用いた. 上式の最右辺について

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}[\{(U(0)D\varphi(0)) \otimes (U(0)D\varphi(0))\}U(0)D^2\varphi(0)U^*(0)] \\
&\quad = \langle U(0)D^2\varphi(0)U^*(0)U(0)D\varphi(0), U(0)D\varphi(0)\rangle = \langle D^2\varphi(0)D\varphi(0), D\varphi(0)\rangle \\
&\quad = \mathrm{tr}\{D\varphi(0) \otimes D\varphi(0)D^2\varphi(0)\}
\end{aligned}$$

となるので

$$\begin{aligned}
\mathrm{tr}\,A_\varepsilon &= \frac{1}{|D\varphi(0)|}\mathrm{tr}\left\{\left(I - \frac{D\varphi(0) \otimes D\varphi(0)}{|D\varphi(0)|^2}\right)D^2\varphi(0)\right\} + \frac{3\varepsilon(N-1)}{|D\varphi(0)|} \\
&= \frac{1}{|D\varphi(0)|}\{F(D\varphi(0), D^2\varphi(0)) + 3\varepsilon(N-1)\}.
\end{aligned}$$

従って

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{N-1}} e^{-|z'|^2/4} g(z')dz' &\leq |S^{N-2}|\int_0^{+\infty} e^{-r^2/4} r^{N-2} dr \left[-\widehat{a_\varepsilon} + \frac{1}{|D\varphi(0)|}\{F(D\varphi(0), D^2\varphi(0)) + 3\varepsilon(N-1)\}\right] \\
&= -\frac{2\varepsilon S_{N-1}}{D\varphi(0)|}\int_0^{+\infty} e^{-r^2/4} r^{N-2} dr
\end{aligned}$$

となり

$$J \leq -K\sqrt{h}\varepsilon + C_\varepsilon h^{3/2}$$

を得る. ここで $K > 0$ は $\varepsilon, h > 0$ とは無関係な定数. 結局

$$(5.8)\text{ の右辺第 1 項} \leq 2\sqrt{h}(-K\varepsilon + C_\varepsilon h).$$

Step 4. 定理 5.1 の結論を示す.

Step 1 - 3 の結果より $h_0 > 0$ を十分小さくとれば, 任意の $h \in (0, h_0)$, $x \in B_N(0, \delta_{2,2})$ に対して

$$v(h, x; \{\varphi \geq \varphi(x) + ah\}) \leq \sqrt{h}(-K\varepsilon + C_\varepsilon h) < 0$$

よって ε を $\varepsilon/3N$ に置き換え, $\delta \in (0, \min\{h_0, \delta_{2,2}\})$ とすると

$$[S_h\varphi](x) - \varphi(x) \leq \{-F(D\varphi(0), D^2\varphi(0)) + \varepsilon\}h \quad \text{for all } x \in B_N(0, \delta),\ h \in (0, \delta)$$

が示された. □

Ishii [33], Ishii–Pires–Souganidis [34] では $E(x)$ をより一般の非負関数 $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ を用いて, 定理 5.1 と同様の結果を得ている. $E(x)$ を一般化した際、定理 5.1 を証明するには (5.11) で定義した J と (5.9) に現れる $\displaystyle\int_{B_N(0,\gamma/\sqrt{t})^c} E(z)dz$ の評価がポイントである. 詳細は [33], [34] を見てほしいが, 大まかに言って $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ が次の条件を満たせばよい. まず任意の $p \in S^{N-1}$, $i, j = 1, 2, \ldots, N-1$ に対して

$$\int_{p^\perp} (1 + |x|^2) f(x) d\mathcal{H}^{N-1} < +\infty,\ p^\perp := \{\langle \cdot, p \rangle = 0\}$$

$$p \mapsto \int_{p^\perp} f(x) d\mathcal{H}^{N-1},\ p \mapsto \int_{p^\perp} x_i x_j f(x) d\mathcal{H}^{N-1} \text{ は } S^{N-1} \text{ 上で連続}$$

を満たせば, 定理 5.1 の証明の Step 3 の計算が厳密に行える. また, この条件の下で J の主要項は (5.12) の右辺第 1 項で $-K\varepsilon\sqrt{h}$ と評価できる. 従って, 定理 5.1 の結果を得るには $\displaystyle\int_{B_N(0,\gamma/\sqrt{t})^c} E(z)dz$ と (5.12) の右辺第 2 項が $o(\sqrt{h})$ であることが要求される. 前者に関しては

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^2 f(x) dx < +\infty$$

を仮定すれば, 以下を満たす $\{R(\sqrt{h})\}_{0<h<1}$ が構成できる.

$$\lim_{h\to 0} R(\sqrt{h}) = +\infty,\ \lim_{h\to 0} \sqrt{h}\{R(\sqrt{h})\}^2 = 0,\ \int_{B_N(0,\gamma/\sqrt{t})^c} f(x)dx = o(\sqrt{h}) \quad (h \to 0).$$

後者に関しては (5.12) の右辺第 2 項は Taylor 展開の剰余項であることより, 上で構成した $\{R(\sqrt{h})\}_{0<h<1}$, 及び $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ に関する任意の 2 次形式 $g(x')$ に対して

$$\sup_{0<r<\sqrt{h}} \left| \int_{B_{N-1}(0,R(\sqrt{h}))} f(x', rg(x'))g(x')drdx' - \int_{B_{N-1}(0,R(\sqrt{h}))} f(x', 0)g(x')dx' \right|$$
$$\longrightarrow 0 \quad (h \to 0,\ \text{ある意味一様収束})$$

を満たせばよい. これらの条件を満たすような f は, 例えば, $\mathbb{R}^N$ 上で有界かつ連続で $f(x) = O(|x|^{-N-2-\alpha})$ ($|x| \to +\infty$, $\alpha > 0$) であればよい.

$t = 0$ における連続性を評価するために, 次の補題を用意する.

補題 5.2 (Ishii [33])**.** $\varphi(x) = |x|^2$ とする. ある定数 $C > 0$ が存在して, 全ての $h > 0$, $x \in \mathbb{R}^N$ に対して

$$[S_h\varphi](x) \leq \varphi(x) + Ch, \ \ [S_h(-\varphi)](x) \geq -\varphi(x) - Ch.$$

証明. 1 番目の不等式のみを証明する.

S_h の定義より, 任意の $g \in BUC(\mathbb{R}^N)$ に対して

$$[S_h(\alpha g)] = \alpha[S_h g] \quad \text{for all } \alpha > 0, \tag{5.13}$$

$$[S_h g](\alpha x) = [S_{h/\alpha^2} g(\alpha\cdot)](x) \quad \text{for all } \alpha > 0, \ x \in \mathbb{R}^N. \tag{5.14}$$

$D\varphi(x) = 2x$, $D^2\varphi(x) = 2I$ なので $x \neq 0$ のとき

$$F(D\varphi, D^2\varphi) = F(D\varphi, D^2\varphi) = 2(N-1).$$

$C_1 > 0$ を $C_1 > 2(N-1)$ を満たすとする. 定理 5.1 より, ある $\delta > 0$ が存在して

$$[S_h\varphi](x) \leq \varphi(x) + C_1 h \quad \text{for all } x \in S^{N-1}, \ h \in (0, \delta).$$

Case 1. $0 < h < \delta|x|^2$ の場合

これと (5.13), (5.14) より

$$\begin{aligned}
[S_h\varphi](x) &= [S_h\varphi]\left(|x|\frac{x}{|x|}\right) = [S_{h/|x|^2}\varphi(|x|\cdot)]\left(\frac{x}{|x|}\right) \\
&= [S_{h/|x|^2}|x|^2\varphi]\left(\frac{x}{|x|}\right) = |x|^2[S_{h/|x|^2}\varphi]\left(\frac{x}{|x|}\right) \\
&\leq |x|^2\left(\varphi\left(\frac{x}{|x|}\right) + C_1\frac{h}{|x|^2}\right)| = \varphi(x) + C_1 h
\end{aligned}$$

Case 2. $h > \delta|x|^2$ の場合.

十分大きな $R > 0$ を

$$\int_{|y|>R} E(z)dy < \int_{|y|\leq R} E(z)dy$$

を満たすように取る. このとき $|y| \leq R$ ならば

$$\begin{aligned}
|x - \sqrt{h}y|^2 - |x|^2 &\leq |x - \sqrt{h}y|^2 \leq |x|^2 + 2\sqrt{h}|x||y| + h|y|^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{\delta} + 2\frac{R}{\sqrt{\delta}} + R^2\right)h = \left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} + R\right)^2 h
\end{aligned}$$

$C_2 > (1/\sqrt{\delta} + R)^2$ とする. この不等式より $\varphi(x - \sqrt{h}y) \geq \varphi(x) + C_2 h$ ならば, $|y| \geq R$ である. よって

$$\begin{aligned}
v(h, x; \{\varphi \geq \varphi(x) + C_2 h\}) &= \int_{\{\varphi(x-\sqrt{h}y)\geq\varphi(x)+C_2 h\}} E(y)dy - \int_{\{\varphi(x-\sqrt{h}y)\geq\varphi(x)+C_2 h\}} E(y)dy \\
&\leq \int_{\{|y|\geq R\}} E(y)dy - \int_{\{|y|\leq R\}} E(y)dy < 0.
\end{aligned}$$

従って $[S_h\varphi](x) \leq \varphi(x) + C_2 h$. □

$u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ とする. $h > 0$ に対して $u^h = u^h(t,x)$ を

$$u^h(t,x) := [S_h^k u_0](x) \quad \text{for } t \in [kh, (k+1)h) \text{ and } x \in \mathbb{R}^N \tag{5.15}$$

とおく. 系 5.1 (1) より $\displaystyle\sup_{\substack{(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^N\\ h>0}} |u^h(t,x)| \le \|u_0\|$ が容易に分かる. 更に, 次の命題が成り立つ.

命題 5.4 (Ishii [33])**.** *$\omega \in C([0,+\infty))$, $\omega(0) = 0$ を満たす ω が存在して, 以下が成り立つ.*

$$|u^h(t,x) - u_0(x)| \le \omega(t) \quad \textit{for all } (t,x) \in \widehat{Q}_T \textit{ and } h > 0.$$

証明. $\varepsilon > 0$ を固定する. $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ より, 定数 $C_\varepsilon > 0$ が存在して

$$|u_0(x) - u_0(y)| \le C_\varepsilon |x-y|^2 + \varepsilon \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

明らかに

$$u^h(t,x) = u_0(x) \le u_0(y) + C_\varepsilon |x-y|^2 + \varepsilon \quad \text{for all } (t,x) \in [0,h) \times \mathbb{R}^N$$

が成り立つ. 補題 5.2 と系 5.1 の証明より

$$[S_h|\cdot - y|^2](x) = [S_h|\cdot|^2](x-y) \le |x-y|^2 + Ch \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^N$$

が言えるので

$$u^h(t,x) = [S_h u_0](x) \le u_0(y) + C_\varepsilon |x-y|^2 + C_\varepsilon Ch + \varepsilon \quad \text{for all } (t,x) \in [h,2h) \times \mathbb{R}^N.$$

以下, 帰納的に

$$\begin{aligned} u^h(t,x) = [S_h u_0](x) \le u_0(y) + C_\varepsilon |x-y|^2 + C_\varepsilon Ckh + \varepsilon \\ \text{for all } (t,x) \in [kh,(k+1)h) \times \mathbb{R}^N \text{ and } k = 0,1,2\ldots \end{aligned}$$

が言える. この不等式で $y = x$ とおくと

$$u^h(t,x) \le u_0(x) + C_\varepsilon Ckh + \varepsilon \le u_0(x) + C_\varepsilon Ct + \varepsilon \quad \text{for all } (t,x) \in [kh,(k+1)h) \times \mathbb{R}^N.$$

同様にして

$$u^h(t,x) \ge u_0(x) - C_\varepsilon C(k-1)h - \varepsilon \ge u_0(x) - C_\varepsilon Ct - \varepsilon \quad \text{for all } (t,x) \in [kh,(k+1)h) \times \mathbb{R}^N.$$

$\omega(t) := \inf_{\varepsilon>0}(C_\varepsilon Ct + \varepsilon)$ とおくと, ω は $[0 + \infty)$ で凹なので Rademacher の定理 (cf. Evans–Gariepy [20, Section 3.1.2.]) より局所 Lipschitz 連続である. 更に $\omega(0) = 0$ を満たすので, 補題の主張が示された. □

BMO アルゴリズムの収束に関して, $u^h (= S_h^k u_0)$ の収束は以下のように述べられる.

定理 5.2. $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ とする. $h>0$ に対して u^h を *(5.15)* で定義する. 更に $u=u(t,x)$ を $u(0,x)=u_0(x)$ $(x\in\mathbb{R}^N)$ を満たす *(4.1)* の一意な粘性解とする. このとき,

$$u^h \longrightarrow u \quad (h\to 0,\ [0,T)\times\mathbb{R}^N \text{ 上で広義一様})$$

を得る.

証明. Eto–Giga–Ishii [17] に沿って証明する.
$(t,x)\in\widehat{Q}_T$ に対して $\overline{u}=\overline{u}(t,x)$, $\underline{u}=\underline{u}(t,x)$ を

$$\begin{aligned}\overline{u}(t,x) &= \lim_{r\to0}\sup\{u^h(s,y)\mid (s,y)\in\widehat{Q}_T,\ |s-t|<r,\ |y-x|<r,\ 0<h<r\},\\ \underline{u}(t,x) &= \lim_{r\to0}\inf\{u^h(s,y)\mid (s,y)\in\widehat{Q}_T,\ |s-t|<r,\ |y-x|<r,\ 0<h<r\}\end{aligned}$$

と定義する. 補題 4.1 の証明と同様にして $\overline{u}\in USC(\widehat{Q}_T)$, $\underline{u}\in LSC(\widehat{Q}_T)$ であり, 命題 5.4 より $\overline{u}(0,x)=\underline{u}(0,x)=u_0(x)$ $(x\in\mathbb{R}^N)$ が言える.

Step 1. $\overline{u}$ が (4.1) の粘性劣解であることを示す. $\underline{u}$ が (4.1) の粘性優解であることも同様にして示される.

任意の $\varphi\in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $\overline{u}-\varphi$ が $(t_0,x_0)\in Q_T$ で最大値を取るとする. Taylor の定理を使った後, 適当な修正をするとある $\varphi_1\in C^1(0,T)$, $\varphi_2\in C^2(\mathbb{R}^N)$ が取れて,

$$\varphi(t,x)=\varphi_1(t)+\varphi_2(x), \tag{5.16}$$

$$\overline{u}(t_0,x_0)=\varphi(t_0,x_0)=\varphi_1(t_0)+\varphi_2(x_0),$$

$$\overline{u}(t,x)-\varphi(t,x)<\overline{u}(t_0,x_0)-\varphi(t_0,x_0)\quad \text{for all } (t,x)(\neq(t_0,x_0))\in\widehat{Q}_T, \tag{5.17}$$

$$\varphi_t(t_0,x_0)=\varphi_{1,t}(t_0),\ D\varphi(t_0,x_0)=D\varphi_2(x_0),\ D^2\varphi(t_0,x_0)=D^2\varphi_2(x_0), \tag{5.18}$$

を満たす. また, $\{(h_k,s_k,y_k)\}_{k=1}^{+\infty}\subset(0,1)\times Q_T$ が取れて,

$$(h_k,s_k,y_k,u^{h_k}(s_k,y_k))\longrightarrow(0,t_0,x_0,\overline{u}(t_0,x_0))\quad(k\to+\infty)$$

を満たす. 各 $k\in\mathbb{N}$ に対して $(t_k,x_k)\in\overline{Q((t_0,x_0),r_0)}$ を

$$u^{h_k}(t_k,x_k)-\varphi(t_k,x_k)=\max_{\overline{Q((t_0,x_0),r_0)}}(u^{h_k}-\varphi)$$

を満たすとする. このとき, (5.17) に注意して, 定理 4.4 の証明と同様の計算を行うと

$$(t_k,x_k,u^{h_k}(t_k,x_k))\longrightarrow(t_0,x_0,\overline{u}(t_0,x_0))\quad(k\to+\infty).$$

$D\varphi_2(x_0)\neq0$ とする. 十分大きな $k\in\mathbb{N}$ に対して $D\varphi_2(x_k)\neq0$ となる. このとき,

$$u^{h_k}(t_k-h_k,x)-\varphi_1(t_k-h_k)-\varphi_2(x)\le u^{h_k}(t_k,x_k)-\varphi_1(t_k)-\varphi_2(x_k)\quad\text{for all } x\in\mathbb{R}^N$$

なので, 両辺に S_{h_k} を作用させると $[S_{h_k}u^{h_k}(t_k-h_k,\cdot)](x)=u^{h_k}(t_k,x)$ より

$$\varphi_1(t_k)-\varphi_1(t_k-h)\le[S_{h_k}\varphi](x)-\varphi_2(x_k). \tag{5.19}$$

$D\varphi_2(x_0) \neq 0$ より, 十分大きな $k \in \mathbb{N}$ に対して $D\varphi_2(x_k) \neq 0$ なので, 上の不等式において $x = x_k$ として定理 5.1 を適用する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して十分大きな任意の $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$\varphi_1(t_k) - \varphi_1(t_k - h_k) \leq \{-F(D\varphi_2(x_k), D^2\varphi_2(x_k)) + \varepsilon\}h_k.$$

両辺を h_k で割って $k \to +\infty$, $\varepsilon \to 0$ とすると (5.16) より

$$\varphi_t(t_0, x_0) + F(D\varphi(t_0, x_0), D\varphi(t_0, x_0)) \leq 0.$$

$D\varphi_2(t_0, x_0) = 0$ とする. 命題 4.1 より $D^2\varphi_2(t_0, x_0) = O$ としてよい. 更に命題 4.1 の証明の後に述べたことより $\varphi_2(x) = \alpha|x - x_0|^4$ $(\exists\alpha > 0)$ としてよい. (5.6) に命題 5.3 と補題 5.2 を使うと

$$\begin{aligned}\varphi_1(t_k) - \varphi_1(t_k - h_k) &\leq [S_{h_k}\varphi_2](x) - \varphi_2(x_k) \leq \alpha([S_{h_k}|\cdot - x_0|^2](x))^2 - \varphi_2(x_k) \\ &\leq \varphi_2(x) - \varphi_2(x_k) + \alpha(2Ch_k|x - x_0|^2 + C^2h_k^2)\end{aligned}$$

を得る. $x = x_k$ とした後, 両辺を h_k で割って $k \to +\infty$ とすると $\varphi_t(t_0, x_0) = \varphi_1(t_0) \leq 0$ となる.

以上のことより, $\overline{u}$ は (4.1) の粘性劣解である. $\underline{u}$ が (4.1) の粘性優解であることも同様にして示される.

Step 2. $\overline{u} = \underline{u}(=: u) \in BUC(\widehat{Q}_T)$ であり, u は $u(0, \cdot) = u_0$ on $\mathbb{R}^N$ を満たす (4.1) に対する一意な粘性解であることを示す.

命題 5.4 より $\overline{u}(0, \cdot) = \underline{u}(0, \cdot) = u_0$ in $\mathbb{R}^N$ が言える. 更に, 命題 5.4 より

$$\overline{u}(t, x) \leq \omega(t) + u_0(x),\ \ \underline{u}(s, y) \geq -\omega(s) + u_0(y) \quad \text{for all } (t, x), (s, y) \in \widehat{Q}_T.$$

故に

$$\overline{u}(t, x) - \underline{u}(s, y) \leq \omega(t) + \omega(s) + u_0(x) - u_0(y) \leq \omega(t) + \omega(s) + \omega_0(|x - y|)$$

となり (ω_0 は u_0 の連続度),

$$\lim_{r\to0} \sup\{\overline{u}(t, x) - \underline{u}(s, y) \mid 0 \leq t, s < r,\ x, y \in \mathbb{R}^N,\ |x - y| < r\} \leq 0.$$

よって, 定理 4.1 が使えて $\overline{u} = \underline{u}(= u) \in BUC(\widehat{Q}_T)$, $u(0, \cdot) = u_0$ on $\mathbb{R}^N$ が示される. この $u \in BUC(\widehat{Q}_T)$ は $u(0, \cdot) = u_0$ on $\mathbb{R}^N$ を満たす (4.1) の一意な粘性解であることが証明された.

Step 3. 系 4.1 の証明と同様にして, $h \to 0$ とするとき, u^h が u に $[0, T) \times \mathbb{R}^N$ 上で広義一様収束することが示される. □

5.4 BMO アルゴリズムで構成される集合列の収束

本小節では定理 5.2 から BMO アルゴリズムで構成される集合列 $\{C_k\}_{k=0}^{+\infty}$ の収束を証明する. $C_0 \subset \mathbb{R}^N$ をコンパクトとし, $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^N)$ を

$$u_0(x)\begin{cases} > 0 & (x \in \operatorname{int} C_0), \\ = 0 & (x \in \partial C_0), \\ < 0 & (x \in \mathbb{R}^N \setminus C_0) \end{cases}$$

を満たすように選ぶ. $u \in BUC(\widehat{Q}_T)$ を $u(0,\cdot) = u_0$ on $\mathbb{R}^N$ を満たす (4.1) の粘性解, $C(t) := \{u(t,\cdot) \geq 0\}$ $(t \in [0,T))$ とおく. $\{C_k\}_{k=0}^{[T/h]}$ を BMO アルゴリズムで構成されるコンパクト集合列とし, $C^h(t)$ を

$$C^h(t) := C_k \quad \text{for } t \in [kh,(k+1)h),\ k = 0,1,2,\ldots,[T/h]$$

と定義する. 命題 5.1 より $C^h(t) = \{S_h^k u_0 \geq 0\} = \{u^h(t,\cdot) \geq 0\}$ $(t \in [kh,(k+1)h),\ k = 0,1,2,\ldots,[T/h],\ h > 0)$ であることに注意する.

まず, $\{C^h(t)\}_{t\in[0,T)}$ の $h > 0$ に関する一様有界性を示す.

命題 5.5 (cf. Barles–Georgelin [5])**.** $R > 0$ が存在して $C^h(t) \subset \overline{B_N(0,R)}$ $(t \in [0,T),\ h > 0)$ が成り立つ.

証明. C_0 はコンパクトなので, $C_0 \subset B_N(0,R)$ を満たす $R > 0$ を取れる. 任意の $z \in \partial B_N(0,R)$ に対して, $D(z) := \{\langle \cdot - z, z\rangle \leq 0\}$ とおく. $v^0 = v^0(t,x)$ を $C_0 = D(z)$ としたときの (2.1) の解とする. $C_0 \subset D(z)$ なので, 最大値原理より $u^0 \leq v^0$ in $[0,h]\times\mathbb{R}^N$ を得る. 直接計算することにより, $\{v^0(h,\cdot) \geq 0\} = D(z)$ が示せるので, $C_1 \subset D(z)$ となる. 以下, 帰納的に $C_k \subset D(z)$ $(k = 2,3,\ldots,[T/h])$ を得る. 従って $C^h(t)$ の定義より $C^h(t) \subset D(z)$ となり, $z \in \partial B_N(0,R)$ の任意性より

$$C^h(t) \subset \bigcap_{z\in\partial B_N(0,R)} D(z) = \overline{B_N(0,R)} \quad \text{for all } t \in [0,T),\ h > 0.$$

□

次に (1.1) に対する広義解の有界性を示しておく.

命題 5.6. *$u \in BUC(\widehat{Q}_T)$ を $u(0,\cdot) = u_0$ in $\mathbb{R}^N$ を満たす (4.1) の粘性解, $C(t) := \{u(t,\cdot) \geq 0\}$ とおく. このとき, $C(t) \subset \overline{B_N(0,R)}$ となる. ここで, $R > 0$ は命題 5.5 で取ったものと同じ定数である.*

証明. 証明の方針は命題 5.5 と同じである. 任意の $z \in \partial B_N(0,R)$ を固定し, $D(z)$ を命題 5.5 の証明と同じように定義する.

Step 1. $v = v(t,x)$ を

$$v(t,x) := \begin{cases} \|u_0\| & (x \in \operatorname{int} D(z)), \\ 0 & (x \in \mathbb{R}^N \backslash D(z)), \end{cases}$$

とおき, この v が (4.1) の粘性劣解であることを示す.

明らかに $v \in LSC([0,T)\times\mathbb{R}^N)$, $v(0,\cdot) \geq u_0$ in $\mathbb{R}^N$ である. 任意の $\varphi \in C^{1,2}(Q_T)$ に対して $v-\varphi$ が $(t_0,x_0) \in Q_T$ で極小値を取ったとする. 命題 4.1 の証明と同様にして, $v-\varphi$ は (t_0,x_0) で狭義極小値を取るとしてよい.

Case 1. $x_0 \notin \partial D(z)$ のとき

(t_0,x_0) の近傍では v は定数なので, $\varphi_t(t_0,x_0) = 0$, $D\varphi(t_0,x_0) = 0$ である. 命題 4.1 より $D^2\varphi(t_0,x_0) = O$ としてよいが, この場合は明らかに命題 5.6 の主張を満たす.

Case 2. $x_0 \in \partial D(z)$ のとき

$D\varphi(t_0, x_0) = 0$ とする. 命題 4.1 より $D^2\varphi(t_0, x_0) = O$ と仮定してよい. v は実際は x のみの関数なので, $\varphi(t, x_0) > 0$ $(t \to t_0)$ とはならず, $t \mapsto \varphi(t, x_0)$ は $t = t_0$ で極大値 0 を取る. 従って, $\varphi_t(t_0, x_0) = 0$ が言えるので, 命題 5.6 の結論が成り立つ.

$D\varphi(t_0, x_0) \neq 0$ とする. このとき, $r_0 > 0$ が存在して $B_N(x_0, r_0) \cap \{\varphi(t_0, \cdot) = 0\}$ はなめらかな超曲面 (の一部) で

$$B_N(x_0, r_0) \cap \{\varphi(t_0, \cdot) = 0\} \subset D(z),\ (B_N(x_0, r_0) \cap \{\varphi(t_0, \cdot) = 0\}) \cap D(z) = \{x_0\}$$

を満たす. 先程と同じ理由で $\varphi_t(t_0, x_0) = 0$ である. また, x_0 における $B_N(x_0, r_0) \cap \{\varphi(t_0, \cdot) = 0\}$ の平均曲率は

$$-\mathrm{div}\left(\frac{D\varphi(t_0, x_0)}{|D\varphi(t_0, x_0)|}\right) \geq 0$$

となる. 従って

$$\varphi_t + F(D\varphi, D^2\varphi) \geq 0 \quad \text{at } (t_0, x_0)$$

を得る.

以上のことより v は (4.1) の粘性優解である.

Step 2. $C(t) \subset \overline{B_N(0, R)}$ $(t \in [0, T))$ を示す.

v と u に対して

$$\begin{aligned}
&\lim_{r\to 0} \sup\{u(t, x) - v(s, y) \mid 0 \leq t, s \leq r,\ x, y \in \mathbb{R}^N,\ |x - y| < r\},\\
&\quad \leq \lim_{r\to 0} \sup\{u_0(y) - v(0, y) + \omega(t + |x - y|) \mid 0 \leq t, s \leq r,\ x, y \in \mathbb{R}^N,\ |x - y| < r\}\\
&\quad \leq 0 \quad (\omega \text{ は } u \text{ の連続度})
\end{aligned}$$

が言えるので, 定理 4.1 より $u \leq v$ in $[0, T) \times \mathbb{R}^N$ が得られ, $C(t) \subset D(z)$ となる. $z \in \partial B_N(0, R)$ は任意なので命題 5.5 の証明と同じようにして $C(t) \subset \overline{B_N(0, R)}$ が示される. □

また, $C(t) = \overline{\{u(t, \cdot) > 0\}}$ ならば, $t \mapsto C(t)$ は次の意味で連続である.

命題 5.7. *$u \in BUC(\widehat{Q}_T)$ を $u(0, \cdot) = u_0$ in $\mathbb{R}^N$ を満たす (4.1) の粘性解, $C(t) := \{u(t, \cdot) \geq 0\}$ とおく. このとき, $C(t) = \overline{\{u(t, \cdot) > 0\}}$ ならば*

$$\lim_{s\to t} d_H(C(s), C(t)) = 0$$

が成り立つ.

上の命題で d_H は Hausdorff 距離と呼ばれるもので次のように定義される: $A, B \subset \mathbb{R}^N$ に対して

$$d_H(A, B) := \max\left\{\sup_{x\in B} \mathrm{dist}(x, A), \sup_{x\in A} \mathrm{dist}(x, B)\right\}.$$

命題 5.7 の証明. 任意の $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset [0, T)$, $t_n \longrightarrow t_0 \in [0, T)$ $(n \to +\infty)$ を取る.

Step 1. $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in C(t_0)}\mathrm{dist}(x, C(t_n)) = 0$ を示す. そのために部分列 $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}\subset\mathbb{N}$ が存在して

$$n_k \longrightarrow +\infty\ (k\to+\infty),\ \sup_{x\in C(t_0)}\mathrm{dist}(x, C(t_{n_k}))\geq 2\varepsilon_0 \quad \text{for all } k\in\mathbb{N}$$

と仮定して矛盾を導く. 簡単のため $n_k = k$ とおく.

$C(t_0), C(t_k)$ $(k\in\mathbb{N})$ はコンパクトなので, 各 $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$\sup_{x\in C(t_0)}\mathrm{dist}(x, C(t_k)) = |x_k - y_k| \geq 2\varepsilon_0 \tag{5.20}$$

を満たす $x_k\in C(t_0)$, $y_k\in C(t_k)$ が存在する. もし, $x_k\in\mathrm{int}\,C(t_0)$ ならば, $\alpha_k > 1$ を $\overline{x}_k := \alpha_k(x_k - y_k) + y_k \in \partial C(t_0)$ を満たすように取れて $|\overline{x}_n - y_n| > |x_n - y_n|$ とできるので, $x_k\in\partial C(t_0)$ と考えてよい. 同様に $y_k\in\partial C(t_k)$ としてよい. 命題 5.5 より $\{x_k\}_{k=1}^{+\infty}, \{y_k\}_{k=1}^{+\infty}\subset\overline{B_N(0,R)}$ なので, 必要ならば部分列を取ることによって

$$(x_k, y_k)\longrightarrow(x_0, y_0)\quad(k\to+\infty)$$

となる. このとき u の連続性と $C(t) = \overline{\{u(t,\cdot)>0\}}$ より $x_0, y_0\in\partial C(t_0)$ である.

(5.20) と上の収束より, 十分大きな $k\in\mathbb{N}$ に対して

$$\overline{B_N(x_0,\varepsilon_0/2)}\subset B_N(x_k,\varepsilon_0),\ \overline{B_N(x_0,\varepsilon_0/2)}\cap C(t_k) = \emptyset$$

となる. よって十分大きな $k\in\mathbb{N}$ に対して $u(t_k,\cdot)\leq 0$ on $\overline{B_N(x_0,\varepsilon_0/2)}$ が言えて, $k\to+\infty$ として

$$u(t_0,\cdot)\leq 0 \quad \text{on } \overline{B_N(x_0,\varepsilon_0/2)}$$

となる. $x_0\in\partial C(t_0)$ なので $B_N(x_0,\varepsilon_0/2)\cap\mathrm{int}\,C(t_0)\neq\emptyset$ である. 仮定より $C(t_0) = \overline{\{u(t_0,\cdot)>0\}}$ なので, $u(t_0,\cdot) > 0$ in $B_N(x_0,\varepsilon_0/2)\cap\mathrm{int}\,C(t_0)$ となり矛盾を得る. 従って Step 1 の結論が示される.

Step 2. $\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in C(t_n)}\mathrm{dist}(x, C(t_0)) = 0$ を示す. 前 Step と同様に部分列 $\{n_k\}_{k=1}^{+\infty}\subset\mathbb{N}$ が存在して

$$n_k \longrightarrow +\infty\ (k\to+\infty),\ \sup_{x\in C(t_0)}\mathrm{dist}(x, C(t_{n_k}))\geq 2\varepsilon_0 \quad \text{for all } k\in\mathbb{N}$$

と仮定して矛盾を導く. 簡単のため $n_k = k$ とおく.

$x_k\in C(t_k)$, $y_k\in C(t_0)$ を

$$\sup_{x\in C(t_k)}\mathrm{dist}(x, C(t_0)) = |x_k - y_k|\geq 2\varepsilon_0$$

を満たすとする. Step 1 と同じように $x_k\in\partial C(t_k)$, $y_k\in\partial C(t_0)$ としてよい. 更に Step 1 と同様にして

$$(x_k, y_k)\longrightarrow(x_0, y_0)\in\partial C(t_0)\times\partial C(t_0)\quad(k\to+\infty),$$

となる. 十分大きな $k\in\mathbb{N}$ に対して $|x_k - x_0| < \varepsilon_0$ を満たす. 故に

$$2\varepsilon_0\leq|x_k - y_k| = \mathrm{dist}(x_k, C(t_0))\leq|x_k - x_0| < \varepsilon_0$$

となり矛盾を得る. 従って Step 2 の結論が示される.

Step 1, 2 より, 命題 5.7 の主張が示された. □

命題 5.7 と同様にして次の命題も証明できる.

命題 5.8. $u \in BUC(\widehat{Q}_T)$ を $u(0,\cdot) = u_0$ *in* $\mathbb{R}^N$ を満たす (*4.1*) の粘性解とする. $C(t) := \{u(t,\cdot) \geq 0\}$ とおく. このとき, $C(t) = \overline{\{u(t,\cdot) > 0\}}$ ならば

$$\lim_{s\to t} d_H(\partial C(s), \partial C(t)) = 0$$

が成り立つ.

この命題の証明は省略する.

定理 5.2 では, BMO アルゴリズムによって定義される関数列の収束を得たが, これから直接に近似曲面の収束が言えるとは限らない. (1.1) の広義解への収束については次の定理が成り立つ.

定理 5.3. $u \in BUC(\widehat{Q}_T)$ を $u(0,\cdot) = u_0$ *on* $\mathbb{R}^N$ を満たす (*4.1*) の粘性解とする. $C(t) := \{u(t,\cdot) \geq 0\}$ $(t \in [0,T))$ とおく. 更に, $\{C_k\}_{k=0}^{[T/h]}$ を *BMO* アルゴリズムで構成されるコンパクト集合列, $\{u^h\}_{h>0}$ は (*5.15*) で定義される関数列とする. このとき, $C(t) = \overline{\{u(t,\cdot) > 0\}}$ $(t \in [0,T))$ を仮定すると, 任意の $T' \in (0,T)$ に対して

$$\lim_{h\to 0} \max_{t\in[0,T']} d_H(C(t), C^h(t)) = 0.$$

証明. 命題 5.5, 5.6 より $C^h(t), C(t) \subset \overline{B_N(0,R)}$ となる. R を少し大きく取り直すことによって $C^h(t), C(t) \subset B_N(0,R-1)$ としてよい.

ある $\varepsilon_0 > 0$, $\{h_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset (0,+\infty)$, $\{t_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset [0,T)$, $t_0 \in [0,T)$ が存在して

$$(h_n, t_n) \longrightarrow (0, t_0) \quad (n \to +\infty),\ d_H(C^{h_n}(t_n), C(t_n)) \geq \varepsilon_0$$

を仮定して矛盾を導く.

Case 1. $\displaystyle\sup_{x\in C^{h_n}(t_n)} \mathrm{dist}(x, C(t_n)) \geq \varepsilon_0$ の場合

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in C^{h_n}(t_n)$, $y_n \in C(t_n)$ が存在して

$$\varepsilon_0 \leq \sup_{x\in C^{h_n}(t_n)} \mathrm{dist}(x, C(t_n)) = \mathrm{dist}(x_n, C(t_n)) = |x_n - y_n| \tag{5.21}$$

を満たす. 命題 5.5 の証明と同様に $x_n \in \partial C^{h_n}(t_n)$, $y_n \in \partial C(t_n)$ としてよい. 必要ならば部分列を取ることによって

$$(x_n, y_n) \longrightarrow (x_0, y_0) \quad (n \to +\infty) \tag{5.22}$$

となる. $u^{h_n}(t_n, x_n) = 0$, $u(t_n, y_n) = 0$ なので, 定理 5.3 と u の連続性より $u(t_0, x_0) = u(t_0, y_0) = 0$ となり, $x_0, y_0 \in \partial C(t_0)$ が言える. 更に $|x_0 - y_0| \geq \varepsilon_0$ である. $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$|x_n - x_0| + |y_n - y_0| \leq \frac{1}{5}\varepsilon_0 \quad \text{for all } n > n_0.$$

命題 5.5 より, $n_1 \in \mathbb{N}$ が存在して

$$d_H(C(t_n), C(t_0)) < \frac{1}{5}\varepsilon_0 \quad \text{for all } n > n_1.$$

従って $n > \max\{n_0, n_1\}$ に対して

$$\operatorname{dist}(x_n, C(t_n)) \leq |x_n - x_0| + \operatorname{dist}(x_0, C(t_n)) < \frac{2}{5}\varepsilon_0.$$

これは (5.21) に反する.

Case 2. $\sup_{x \in C(t_n)} \operatorname{dist}(x, C^{h_n}(t_n)) \geq \varepsilon_0$ の場合

各 $n \in \mathbb{N}$ に対して $x_n \in C(t_n)$, $y_n \in C^{h_n}(t_n)$ を

$$\varepsilon_0 \leq \sup_{x \in C(t_n)} \operatorname{dist}(x, C^{h_n}(t_n)) = \operatorname{dist}(x_n, C^{h_n}(t_n)) = |x_n - y_n| \tag{5.23}$$

を満たすように取る. ここでも $x_n \in \partial C(t_n)$, $y_n \in \partial C^{h_n}(t_n)$ としてよい. 必要ならば部分列を取ることによって (5.22) が成り立つとしてよい. このとき, $x_0, y_0 \in \partial C(t_0)$ である. (5.23) より全ての $n \in \mathbb{N}$ に対して $\overline{B_N(x_n, 2\varepsilon_0/3)} \cap C(t_n) = \emptyset$ である. (5.22) より, 十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して $\overline{B_N(x_0, \varepsilon_0/2)} \subset B_N(x_n, 2\varepsilon_0/3)$ が成り立つ. すると $u^{h_n}(t_n, \cdot) \leq 0$ on $\overline{B_N(x_0, \varepsilon_0/2)}$ となり, $n \to +\infty$ とすると定理 5.2 より $u(t_0, \cdot) \leq 0$ on $\overline{B_N(x_0, \varepsilon_0/2)}$ となる.

ところで, $B_N(x_0.\varepsilon_0/2) \cap \operatorname{int} C(t_0)$ であり, 仮定 $C(t) = \overline{\{u(t, \cdot) > 0\}}$ $(t \in [0, T))$ より $u(t_0, \cdot) \leq 0$ in $B_N(x_0.\varepsilon_0/2) \cap \operatorname{int} C(t_0)$ となり矛盾を生じる.

Case 1, 2 より定理 5.3 の主張が示される. □

定理 5.3 は (広義解の意味ではあるが) 平均曲率で動く曲面で囲まれる集合とその近似曲面で囲まれる集合での収束を述べている. この定理を曲面の収束という観点で見直すと次のようになる.

定理 5.4. *$u \in BUC(\widehat{Q}_T)$ を $u(0, \cdot) = u_0$ on $\mathbb{R}^N$ を満たす (4.1) の粘性解とする. $C(t) := \{u(t, \cdot) \geq 0\}$ $(t \in [0, T))$ とおく. 更に, $\{C_k\}_{k=0}^{[T/h]}$ を BMO アルゴリズムで構成されるコンパクト集合列, $\{u^h\}_{h>0}$ は (5.15) で定義される関数列とする. このとき, $C(t) = \overline{\{u(t, \cdot) > 0\}}$ $(t \in [0, T))$ を仮定すると, 任意の $T' \in (0, T)$ に対して*

$$\lim_{h \to 0} \max_{t \in [0, T']} d_H(\partial C(t), \partial C^h(t)) = 0.$$

証明. 定理 5.3 より, 任意の $T' \in (0, T)$, $\varepsilon > 0$ に対して, ある $h_0 > 0$ が存在して

$$\sup_{t \in [0, T']} d_H(C(t), C^h(t)) < \varepsilon \quad \text{for all } h \in (0, h_0).$$

これより

$$\partial C^h(t) \backslash C(t) \subset \{\operatorname{dist}(\cdot, (C(t) \cap C^h(t))) < \varepsilon\},$$
$$\partial C(t) \backslash C^h(t) \subset \{\operatorname{dist}(\cdot, (C(t) \cap C^h(t))) < \varepsilon\}.$$

従って

$$\sup_{x\in\partial C^h(t)\cap C(t)} \operatorname{dist}(x,\partial C(t)) = \sup_{x\in\partial C^h(t)\cap C(t)} \operatorname{dist}(x,C(t)) < \varepsilon,$$
$$\sup_{x\in\partial C(t)\cap C^h(t)} \operatorname{dist}(x,\partial C^h(t)) = \sup_{x\in\partial C(t)\cap C^h(t)} \operatorname{dist}(x,C^h(t)) < \varepsilon.$$

一方,

$$\sup_{x\in C(t)} \operatorname{dist}(x,C^h(t)) = \sup_{x\in C(t)\setminus C^h(t)} \operatorname{dist}(x,C^h(t)) = \sup_{x\in\partial C(t)\setminus C^h(t)} \operatorname{dist}(x,\partial C^h(t)),$$
$$\sup_{x\in C^h(t)} \operatorname{dist}(x,C(t)) = \sup_{x\in C^h(t)\setminus C(t)} \operatorname{dist}(x,C(t)) = \sup_{x\in\partial C^h(t)\setminus C(t)} \operatorname{dist}(x,\partial C(t)),$$

に注意すると, 任意の $t\in[0,T']$, $h\in(0,h_0)$ に対して

$$\sup_{x\in\partial C(t)} \operatorname{dist}(x,\partial C^h(t)) = \sup_{x\in\partial C(t)\setminus C^h(t)} \operatorname{dist}(x,\partial C^h(t)) + \sup_{x\in\partial C(t)\cap C^h(t)} \operatorname{dist}(x,\partial C^h(t)) < 2\varepsilon,$$
$$\sup_{x\in\partial C^h(t)} \operatorname{dist}(x,\partial C(t)) = \sup_{x\in\partial C^h(t)\setminus C(t)} \operatorname{dist}(x,\partial C(t)) + \sup_{x\in\partial C^h(t)\cap C(t)} \operatorname{dist}(x,\partial C(t)) < 2\varepsilon$$

となる. 故に

$$\sup_{t\in[0,T']} d_H(\partial C(t),\partial C^h(t)) < 2\varepsilon$$

が得られ, 定理の主張が示される. □

注意 5.3. (1) 定理 5.4 は定理 5.3 の証明を修正することでも証明できる.

(2) 任意のコンパクト集合 $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^N$ に対して $d_H(C_1,C_2) \le d_H(\partial C_1,\partial C_2)$ が成り立つことから, 定理 5.4 の主張から直ちに定理 5.3 の主張が得られる.

6 Appendix

6.1 関数の連続度

この小節では関数の連続度について述べる. 関数の連続度は粘性解理論においては重要である. 実際, 連続度を用いた詳細な解析によって粘性解の比較定理を証明したり, 解の連続性を評価する. 更に, Perron の方法によって粘性解を構成する際に方程式や初期条件の連続度を利用することによって優解, 劣解を構成する等に用いられる. Devore–Lorentz [16, Chapter 2] 等に従って関数の連続度を紹介したい.

まず, 連続度の定義を与える.

定義 6.1. $\Omega\subset\mathbb{R}^N$ 上で定義された実数値関数 $f=f(x)$ に対して

$$\omega_f(r) := \sup_{\substack{|x-y|\le r,\\ x,y\in\Omega}} |f(x)-f(y)|$$

を f の連続度と言う.

注意 6.1. (1) 上の定義から明らかに

$$|f(x) - f(y)| \le \omega_f(|x-y|) \quad \text{for all } x, y \in \Omega$$

が成り立つ.

(2) ある定数 $C > 0$ が存在して $\omega_f(r) \le Cr$ $(r \in [0, +\infty))$ となるとき, f は Ω で Lipschitz 連続である. ある定数 $C > 0, \alpha \in (0, 1)$ が存在して $\omega_f(r) \le Cr^\alpha$ $(r \in [0, +\infty))$ となるとき, f は Ω で指数 α の Hölder 連続である.

(3) $\Omega = \mathbb{R}^N$ の場合は ω_f は $[0, +\infty)$ で定義される. Ω が有界の場合は $\omega_f(r) = \omega_f(\operatorname{diam}\Omega)$ $(r \ge \operatorname{diam}\Omega)$ とすることによって, ω_f は $[0, +\infty)$ で定義されている関数と考えることができる.

(4) $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を領域とし, f を Ω で定義された実数値関数とする. もし $\displaystyle\lim_{r\to+0} \frac{\omega_f(r)}{r} = 0$ ならば, f は定数関数である.

定義 6.1 より明らかに ω_f は非負, $\omega_f(0) = 0$ かつ ω_f は $[0, +\infty)$ で単調非減少である. これらのことから $\displaystyle\liminf_{r\to+0} \omega_f(r) \ge \omega_f(0) = 0$ が言える. しかし, 次の例により $\displaystyle\lim_{r\to+0} \omega_f(r) = \omega_f(0)$ は必ずしも成り立たないことが分かる.

例 6.1. $f(x) = \sin(1/x)$ $(x > 0)$ とする. 十分大きな $n \in \mathbb{N}$ に対して

$$\omega_f\left(\frac{1}{2n}\right) = \sup_{\substack{|x-y|\le 1/(2n),\\ x,y>0}} \left|\sin\frac{1}{x} - \sin\frac{1}{y}\right| \ge \left|\sin\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi - \sin\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi\right| = 2.$$

ここで, 真ん中の不等式において $x = \dfrac{1}{\left(2n + \frac{1}{2}\right)\pi}, y = \dfrac{1}{\left(2n - \frac{1}{2}\right)\pi}$ を代入した. 故に $\displaystyle\limsup_{r\to+0} \omega_f(r) \ge 2$ となる.

次の定理では, $\displaystyle\lim_{r\to+0} \omega_f(r) = \omega_f(0)$ となるための必要十分条件が与えられる.

定理 6.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ 上で定義された関数 $f = f(x)$ に対して,

$$\lim_{r\to+0} \omega_f(r) = \omega_f(0) = 0 \tag{6.1}$$

であるための必要十分条件は $f \in UC(\Omega)$ となることである. 但し, $UC(\Omega)$ は Ω で定義された一様連続な関数全体を表す.

証明. (6.1) を仮定する. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在して

$$0 \le \omega_f(r) < \varepsilon \quad \text{for all } r \in (0, 2\delta).$$

ω_f の定義より $r = \delta$ とすると

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{for all } x, y \in \Omega,\ |x-y| < \delta. \tag{6.2}$$

従って $f \in UC(\Omega)$ である.

$f \in UC(\Omega)$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して (6.2) を満たす $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ が存在する. このとき, $\omega_f(r) \le \varepsilon$ $(r \in (0,\delta))$ となり, これと ω_f の単調非減少性より, $r \to +0, \varepsilon \to 0$ とすると

$$0 \le \liminf_{r\to+0} \omega_f(r) \le \limsup_{r\to+0} \omega_f(r) \le 0.$$

これと $\omega_f(0) = 0$ より (6.1) が成り立つ. □

定理 6.1 に加えて, 連続度には次の性質がある.

定理 6.2. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を凸集合とする. f を Ω 上で定義された関数とし, その連続度 ω_f は *(6.1)* を満たすとする.

(1) 任意の $r_1, r_2 \in [0,+\infty)$ に対して $\omega_f(r_1 + r_2) \le \omega_f(r_1) + \omega_f(r_2)$ (この性質を **subadditive** (又は劣加法性) という).

(2) $\omega \in UC([0,+\infty))$.

証明. (1) $r_1, r_2 \in [0,+\infty)$ とする. Ω は凸なので, $|x - z| \le r_1 + r_2$ を満たす任意の $x, z \in \Omega$ に対して, $|x - y| \le r_1, |y - z| \le r_2$ となる $y \in \Omega$ が取れる. すると

$$|f(x) - f(z)| \le |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| \le \omega_f(r_1) + \omega_f(r_2).$$

よって

$$\omega_f(r_1 + r_2) \le \omega_f(r_1) + \omega_f(r_2).$$

(2) (1) より, 任意の $r_1, r_2 \in [0,+\infty)$ に対して

$$\begin{aligned} 0 \le \omega_f(r_1) - \omega_f(r_2) \le \omega_f(r_1 - r_2) \quad &\text{if } 0 \le r_2 \le r_1, \\ -\omega_f(r_2 - r_1) \le \omega_f(r_1) - \omega_f(r_2) \le 0 \quad &\text{if } 0 \le r_1 \le r_2. \end{aligned}$$

従って

$$|\omega_f(r_1) - \omega_f(r_2)| \le \omega_f(|r_1 - r_2|) \quad \text{for all } r_1, r_2 \in [0,+\infty)$$

$\lim_{r\to+0} \omega_f(r) = \omega(0) = 0$ より $\omega \in UC([0,+\infty))$ が得られる. □

定理 6.2 (1) から次の系が導ける.

系 6.1. $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ を凸集合とする. Ω 上で定義された関数 f に対してその連続度 ω_f は *(6.1)* を満たすとする. このとき,

$$\omega_f(\lambda r) \le (\lambda + 1)\omega_f(r) \quad \textit{for all } r,\ \lambda \in [0,+\infty).$$

証明. $r, \lambda \in [0,+\infty)$ を任意に取り, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ を $n \le \lambda < n + 1$ を満たすものとする. このとき, ω_f の単調非減少性と定理 6.2 (1) より

$$\omega_f(\lambda r) \le \omega_f((n+1)r) \le \underbrace{\omega_f(r) + \cdots + \omega_f(r)}_{(n+1)\text{ 個}} = (n+1)\omega_f(r) \le (\lambda + 1)\omega_f(r).$$

となり証明が終わる. □

今までは与えられた関数に対してその連続度を定義し, その性質をいくつか見てきた. 以下では, 定義 6.1 のように与えられた関数から定義するのではなく, 関数の連続性を表すために必要な (最小限の) 条件を満たす関数, という観点から連続度を定義する.

定義 6.2 (Crandall–Lions [13])**.** $[0, +\infty)$ 上で定義された関数 ω が連続度であるとは次の条件を満たすものを言う.

(1) $0 \leq \omega(r) < +\infty$ *for all* $r \in [0, +\infty)$ *and* $\omega(0) = 0$.

(2) $\lim_{r \to +0} \omega(r) = \omega(0)$.

(3) ω は劣加法性を満たす.

この定義で述べられた条件から, 関数 f の連続度に見合う性質を持つものを構成することができる. $\omega : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ が定義 6.2 の意味での連続度とする. 定理 6.2 (2) の証明より $\omega \in UC([0, +\infty))$ である. 更に ω_1 を

$$\omega_1(r) := \max_{s \in [0, r]} \omega(s) \tag{6.3}$$

とおくと, ω_1 は $r \in [0, +\infty)$ に関して単調非減少である. 更に次の性質が成り立つ.

命題 6.1. ω_1 を (6.3) で定義された関数とすると, $\omega_1 \in UC([0, +\infty))$ かつ劣加法性を満たす.

証明. ω_1 が劣加法性を満たすことを示す. これが示されれば定理 6.2 より $\omega_1 \in UC([0, +\infty))$ となる.

$r_1, r_2 \in [0, +\infty)$ とする. ω_1 の定義より $\omega_1(r_1 + r_2) = \omega(t)$ $(t \in [0, r_1 + r_2])$ となる. $t \leq r_1$ ならば

$$\omega_1(r_1 + r_2) = \omega(t) \leq \omega_1(r_1)$$

となるので, ω_1 は劣加法性を満たす. $t \leq r_2$ の場合も同様である. $r_1 \vee r_2 < t \leq r_1 + r_2$ $(a \vee b := \max\{a, b\})$ ならば, ω が劣加法性を満たすことより

$$\omega_1(r_1 + r_2) = \omega(t) \leq \omega(r_1) + \omega(t - r_1) \leq \omega_1(r_1) + \omega_1(r_2).$$

従って ω_1 は劣加法性を満たす. □

以下では ω は定義 6.2 (1) - (3) に加えて, $[0, +\infty)$ で単調非減少であることも仮定する.
一様連続な関数については次の性質が成り立つ.

命題 6.2. $f \in UC(\mathbb{R}^N)$ とする. このとき, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $C_\varepsilon > 0$ が存在して

$$|f(x) - f(y)| \leq C_\varepsilon |x - y| + \varepsilon \quad \textit{for all } x, y \in \mathbb{R}^N.$$

特に, ある定数 $C > 0$ が存在して $|f(x)| \leq C(|x| + 1)$ *for all* $x \in \mathbb{R}^N$.

証明. 任意の $\varepsilon > 0$ を固定する. このとき, ある $\delta > 0$ が存在して

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^N,\ |x - y| < \delta.$$

任意の $x, y \in \mathbb{R}^N$ に対して $N \in \mathbb{N}$ を $N\delta/2 \leq |x - y| < (N + 1)\delta/2$ を満たすように取る. 更に, $\{x_i\}_{i=0}^N$ を $x_0 := x$, $|x_i - x_{i-1}| = \delta/2$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ を満たすように取る. このとき, $|y - x_N| < \delta/2$ に注意する.

そこで

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq \sum_{i=1}^{N} |f(x_{i-1}) - f(x_i)| + |f(x_N - f(y)| \leq N\varepsilon + \varepsilon \\ &\leq \frac{2\varepsilon}{\delta}|x - y| + \varepsilon. \end{aligned}$$

よって $C_\varepsilon := 2\varepsilon/\delta$ と取ればよい.

特に $\varepsilon = 1, y = 0$ とおくと

$$|f(x)| \leq C|x| + 1 + |f(0)| \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}^N$$

となり, 命題の後半の主張が示される. □

命題 6.2 より以下のことが成り立つ: $\omega \in UC([0, +\infty))$, $\omega(0) = 0$ とする. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $C_\varepsilon > 0$ が存在して

$$\omega(r) \leq C_\varepsilon r + \varepsilon \quad \text{for all } r \in [0, +\infty). \tag{6.4}$$

この性質を**劣線形性**と呼ぶことにする. これを使うと次の命題が証明できる.

命題 6.3. 関数 $\omega : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ は $\omega(0) = 0$ かつ劣線形性を満たすとする. このとき, 凹で $\widetilde{\omega}(0) = 0$ を満たす $\widetilde{\omega} \in C([0, +\infty))$ が存在して $\omega(r) \leq \widetilde{\omega}(r)$ *for all* $r \geq 0$ が成り立つ.

Proof. 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $C_\varepsilon > 0$ を (6.4) を満たす定数とする. $\widetilde{\omega}$ を

$$\widetilde{\omega}(r) := \inf\{C_\varepsilon r + \varepsilon \mid \varepsilon > 0, \omega(s) \leq C_\varepsilon s + \varepsilon \text{ for all } s \in [0, +\infty)\}$$

とおく. 明らかに $\widetilde{\omega}(0) = 0$, かつ $\widetilde{\omega}$ は凹関数である. よって Rademacher の定理より $\widetilde{\omega}$ は局所 Lipschitz 連続である. 更に $\widetilde{\omega}$ の定義より, $\omega(r) \leq \widetilde{\omega}(r)$ for all $r \geq 0$ が成立する. □

連続度 ω が凹ならば次の命題が成り立つ.

命題 6.4. 関数 $\omega : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ は $\omega(0) = 0$, かつ凹とする. このとき, $\omega(r)/r$ は $(0, +\infty)$ で単調非増加である.

証明. $0 < r_1 \leq r_2$ とすると

$$\frac{r_1}{r_2}\omega(r_2) \leq \frac{r_2 - r_1}{r_2}\omega(0) + \frac{r_1}{r_2}\omega(r_2) \leq \omega(r_1).$$

最初の不等式で $\omega(0) = 0$ を, 次の不等式で ω の凹性を用いた. よって $\dfrac{\omega(r_2)}{r_2} \leq \dfrac{\omega(r_1)}{r_1}$ を得る. □

命題 6.5. 関数 $\omega : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ に対して $\omega(r)/r$ が単調非増加ならば, ω は劣加法性を満たす.

証明. $r_1, r_2 \in [0,+\infty)$ とする. $\omega(r)/r$ は単調非増加なので

$$\frac{\omega(r_1+r_2)}{r_1+r_2} \leq \frac{\omega(r_1)}{r_1},\ \frac{\omega(r_1+r_2)}{r_1+r_2} \leq \frac{\omega(r_2)}{r_2}.$$

よって

$$r_1\frac{\omega(r_1+r_2)}{r_1+r_2} + r_2\frac{\omega(r_1+r_2)}{r_1+r_2} \leq \omega(r_1)+\omega(r_2)$$

となり, この不等式の左辺は $\omega(r_1+r_2)$ なので証明が終わる. □

注意 6.2. 定義 6.2 から命題 6.1 - 6.5 において次の関係が成り立っている.

ω : 定義 6.2 の意味での連続度
$\Longrightarrow \omega \in UC([0,+\infty))$ (定理 6.2 (2) より)
$\Longrightarrow \omega$: 劣線形性を満たす ((6.4) より)
$\Longrightarrow \omega$ は凹で $\widetilde{\omega}(0)=0,\ \widetilde{\omega} \in C([0,+\infty)),\ \omega(r) \leq \widetilde{\omega}(r)\ (r \in [0,+\infty))$
を満たす $\widetilde{\omega}$ で置き換えられる (命題 6.3 より. 改めて ω とおく)
$\Longrightarrow$ 上で置き換えたω について $\dfrac{\omega(r)}{r}$ は $(0,+\infty)$ で単調非増加 (命題 6.4 より)
$\Longrightarrow \omega$: 劣加法性を満たす (命題 6.5 より)

つまり, 定義 6.2 から命題 6.1 - 6.5 は互いに同値とは言えないが, それに近い関係になっている.

注意 6.3. (1) 定義 6.2 において $\omega(r)$ が $r \in [0,+\infty)$ に関して単調非減少性を仮定しなかったのはその後に述べた修正によって単調非減少な関数に置き換えてよいからである.

(2) また, 定義 6.2 の意味での連続度において, 連続関数 (一様連続とは限らない) となるような修正では劣加法性は必要ない.

上の注意 (2) に関して少し詳しく説明する. $\omega : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ が定義 6.2 の意味での連続度とすると, 上半連続包を取ることによって $\omega \in USC([0,+\infty))$ としてよい. また, $\lim_{r\to+0}\omega(r)=\omega(0)=0$ も成り立つ. $\omega_1=\omega_1(r)$ を (6.3) で定義されたものとする. すると, $\omega \leq \omega_1$ on $[0,+\infty)$ である. また, ω_1 は $[0,+\infty)$ 上で単調非減少であり $\lim_{r\to+0}\omega_1(r)=\omega_1(0)=0$ を満たす.

補題 6.1. 上で定義された ω_1 に対して $\omega_1 \in USC([0,+\infty))$.

証明. ω_1 が $r=0$ で上半連続なのは上で述べたとおりである. $r>0$ として

$$\alpha := \lim_{\delta\to 0}\sup\{\omega_1(s) \mid s \geq 0, |s-r|<\delta\}$$

とおいて, $\alpha \leq \omega_1(r)$ を示す.

任意の $\varepsilon > 0$ を固定する. ある $\delta_0 > 0$ が存在して

$$\left|\alpha - \sup\{\omega_1(s) \mid s \geq 0, |s-r| < \delta\}\right| < \varepsilon \quad \text{for all } \delta \in (0, \delta_0).$$

各 $\delta \in (0, \delta_0)$ に対して $r_\delta \in (r-\delta, r+\delta)$ が存在して

$$\left|\sup\{\omega_1(s) \mid s \geq 0, |s-r| < \delta\} - \omega_1(r_\delta)\right| < \varepsilon.$$

よって

$$\alpha < \omega_1(r_\delta) + 2\varepsilon. \tag{6.5}$$

更に ω_1 の定義より $s_\delta \in [0, r_\delta]$ が存在して $\omega_1(r_\delta) = \omega(s_\delta)$ となる. $s_\delta \leq r$ ならば $\omega_1(r_\delta) \leq \omega_1(r)$ となるので, $r_\delta > r$ かつ $s_\delta \in (r, r_\delta)$ としてよい. $\omega \in USC([0, +\infty))$ なので, $\delta_1 \in (0, \delta_0)$ が取れて

$$\left|\sup\{\omega(s) \mid s \geq 0, |s-r| < \delta\} - \omega(r)\right| < \varepsilon \quad \text{for all } \delta \in (0, \delta_1)$$

となる. $\delta \in (0, \delta_1)$ として (6.5), $\omega_1(r_\delta) = \omega(s_\delta)$ とこの不等式を使うと

$$\alpha < \omega(s_\delta) + 2\varepsilon < \omega(r) + 3\varepsilon \leq \omega_1(r) + 3\varepsilon.$$

$\varepsilon \to 0$ とすると $\omega_1 \in USC([0, +\infty))$ を得る. □

$\omega_2 = \omega_2(r)$ を

$$\omega_2(r) := \begin{cases} \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_r^{2r} \omega_1(t)dt & (r \in (0, +\infty)), \\ 0 & (r = 0) \end{cases} \tag{6.6}$$

とおく. ω_2 については次の補題が成り立つ.

補題 6.2. *(6.6) で定義された ω_2 について以下が成り立つ.*

(1) $\omega_2 \geq \omega_1 (\geq 0)$ *on* $[0, +\infty)$.

(2) $\omega_2 \in C([0, +\infty))$ かつ, $\displaystyle\lim_{r \to +0} \omega_2(r) = \omega_2(0) = 0$.

Proof. (1) (6.6) より $r \in (0, +\infty)$ に対して,

$$\omega_2(r) \geq \frac{1}{r}\int_r^{2r} \omega_1(r)dt = \omega_1(r)$$

また, $\omega_2(0) = \omega_1(0) = 0$ より (1) の主張が証明される.

(2) $\displaystyle\lim_{r \to +0} \omega_1(r) = 0$ なので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して $r_0 > 0$ が存在して, $0 \leq \omega_1(r) < \varepsilon$ for all $r \in [0, r_0)$. すると, 任意の $r \in (0, r_0/3)$ に対して

$$\omega_2(r) < \frac{1}{r}\int_r^{2r} \varepsilon dr = \varepsilon$$

従って $\limsup_{r\to+0}\omega_2(r)\le\varepsilon$ となり, $\varepsilon\to 0$ とすると, (1) の結果も使って $\lim_{r\to 0}\omega_2(r)=0=\omega_2(0)$ が言える.

ω_2 が $(0,+\infty)$ で連続であることを示す. $r\in(0,+\infty)$ を固定する. まず $0<s\le r$ の場合は $[s,2s]\cap[r,2r]\ne\emptyset$ と仮定してよいので,

$$\begin{aligned}\omega_2(r)-\omega_2(s) &= \frac{1}{r}\int_r^{2r}\omega_1(t)dt-\frac{1}{s}\int_s^{2s}\omega_1(t)dt\\ &\le \frac{1}{r}\left(\int_r^{2r}\omega_1(t)dt-\int_s^{2s}\omega_1(t)dt\right)\\ &= \frac{1}{r}\left(\int_{2s}^{2r}\omega_2(t)dt-\int_s^{r}\omega_1(t)dt\right)\\ &\le \frac{1}{r}\int_{2s}^{2r}\omega_1(t)dt=\frac{2\omega_1(r)(r-s)}{r}\end{aligned}$$

を得る. 従って

$$\lim_{s\to r-0}|\omega_2(r)-\omega_2(s)|=0.$$

また $0<r\le s$ の場合は同様の計算によって

$$\omega_2(s)-\omega_2(r)\le\frac{2\omega_2(s)(s-r)}{s}.$$

ω_1 が上半連続であることを使って

$$\lim_{s\to r+0}|\omega_2(s)-\omega_2(r)|=0.$$

よって ω_2 は $(0,+\infty)$ で連続である.

以上のことより $\omega_2\in C([0,+\infty))$ である. □

今までは定義 6.2 (3) は使わなかったが, ここからこの条件を使う. まず, 次の命題を証明する.

命題 6.6. *ω が定義 6.2 の意味での連続度ならば, ω_1, ω_2 も定義 6.2 (3) を満たす.*

Proof. ω_1 が定義 6.2 (3) を満たすことを示す. $r,s\in[0,+\infty)$ を任意に固定する. ω_1 の定義より, $\omega_1(r+s)=\omega(t)$ $(t\in[0,r+s])$ となる. $t\le r$ ならば,

$$\omega_1(r+s)=\omega(t)\le\omega_1(r)$$

より定義 6.2 (3) を満たす. $r<t\le r+s$ ならば, ω は定義 6.2 の意味の連続度なので

$$\omega_1(r+s)=\omega(t)=\omega(r+(t-r))\le\omega(r)+\omega(t-r)\le\omega_1(r)+\omega_1(s).$$

故に ω_1 は定義 6.2 (3) を満たす.

ω_2 が定義 6.2 (3) を満たすことを示す. $r, s \in [0, +\infty)$ に対して置換積分によって

$$
\begin{aligned}
\omega_2(r+s) &= \frac{1}{r+s}\int_{r+s}^{2(r+s)} \omega_1(t)dt = \int_1^2 \omega_1((r+s)\tau)d\tau \\
&\leq \int_1^2 \{\omega_1(r\tau) + \omega_1(s\tau)\}d\tau = \frac{1}{r}\int_r^{2r} \omega_1(t)dt + \frac{1}{s}\int_s^{2s} \omega_1(t)dt \\
&= \omega_2(r) + \omega_2(s).
\end{aligned}
$$

これで命題 6.6 の証明が終わる. □

命題 6.6 と定理 6.2 の証明より, $\omega_2 \in UC([0, +\infty))$ である. よって, 注意 6.2 より凹関数 ω_3 が存在して,

$$\omega_2 \leq \omega_3 \quad \text{on } [0, +\infty),\ \omega_3(0) = 0,\ \omega_3 \in UC([0, +\infty))$$

となる. 更に ω_3 は劣加法性も満たす.

6.2 $BUC(\mathbb{R}^N)$ の完備性

この節では以下の定理を証明する.

定理 6.3. *$BUC(\mathbb{R}^N)$ を $\mathbb{R}^N$ で定義された有界, かつ一様連続な関数の集合とする. このとき, $BUC(\mathbb{R}^N)$ は*

$$\|f\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f(x)| \quad \textit{for } f \in BUC(\mathbb{R}^N) \tag{6.7}$$

をノルムとする Banach 空間である.

証明. $BUC(\mathbb{R}^N)$ が (6.7) をノルムとするノルム空間であることは容易に示される. よって, ここでは完備性のみを証明する. $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset BUC(\mathbb{R}^N)$ を Cauchy 列とする.

Step 1. $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ はある関数 f に一様収束することを示す.

任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対して $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ は $\mathbb{R}^N$ における Cauchy 列になる. よって $\mathbb{R}$ の完備性より $\{f_n(x)\}_{n=1}^{+\infty}$ は収束列になる. そこで

$$f(x) := \lim_{n \to +\infty} f_n(x)$$

と定義する. $\varepsilon \in (0, 1)$ を任意に固定する. $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty} \subset BUC(\mathbb{R}^N)$ が Cauchy 列であることより, $n_0 \in \mathbb{N}$ が存在して, 任意の $n, m > n_0$ に対して $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ が成り立つ. このとき

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\| \leq \max_{1 \leq k \leq n_0} \|f_k\| + \varepsilon$$

となるので $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ は一様に有界である. 故に, 定義より f は $\mathbb{R}^N$ 上で有界であることがわかる.

任意の $x \in \mathbb{R}^N$ に対して $f(x)$ の定義より $m_1(\geq n_0) \in \mathbb{N}$ が取れて $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon$ for all $m > m_1$ となる. 従って

$$|f_n(x) - f(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - f(x)| < 2\varepsilon$$

を得る. $|f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon$ は任意の $x \in \mathbb{R}^N$, $n > n_0$ について成り立つので

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^N} |f_n(x) - f(x)| < 2\varepsilon \quad \text{for all } n > n_0.$$

従って $\{f_n\}_{n=1}^{+\infty}$ は f に一様収束する.

Step 2. $f \in BUC(\mathbb{R}^N)$ を示す.

前 Step において f の有界性は示されているので, f が $\mathbb{R}^N$ で一様連続であることを示す. 任意の $\delta > 0$ に対して

$$\begin{aligned}
&\sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^N \\ |x-y|<\delta}} |f(x) - f(y)| \\
&\quad \leq \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^N \\ |x-y|<\delta}} |f(x) - f_n(x)| + \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^N \\ |x-y|<\delta}} |f_n(x) - f_n(y)| + \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^N \\ |x-y|<\delta}} |f_n(y) - f(y)| \\
&\quad \leq 2\|f_n - f\| + \sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^N \\ |x-y|<\delta}} |f_n(x) - f_n(y)|.
\end{aligned}$$

任意の $\varepsilon > 0$ に対して $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\|f_n - f\| < \varepsilon \quad \text{for all } n > n_0.$$

ここで $n := n_0 + 1$ とおく. このとき $\delta = \delta(\varepsilon, n_0(\varepsilon)) > 0$ を小さく取ると $f_{n_0+1} \in BUC(\mathbb{R}^N)$ より

$$\sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^N \\ |x-y|<\delta}} |f_{n_0+1}(x) - f_{n_0+1}(y)| < \varepsilon.$$

よって

$$\sup_{\substack{x,y \in \mathbb{R}^N \\ |x-y|<\delta}} |f(x) - f(y)| < 3\varepsilon$$

が得られ, f は $\mathbb{R}^N$ 上で一様連続である.

以上のことより $f \in BUC(\mathbb{R}^N)$ となり, $BUC(\mathbb{R}^N)$ の完備性が示された.

□

参考文献

[1] M. Alfaro, J. Droniou, and H. Matano. Convergence rate of the Allen - Cahn equation to generalized motion by mean curvature. *J. Evo. Equ.*, 12:267–294, 2012.

[2] S. Allen and J. Cahn. A microscopic theory for antiphase boundary motion and its application to antiphase domain coarsening. *Acta. Metal.*, 27:1084–1095, 1979.

[3] L. Alvarez, F. Guichard, P.-L. Lions, and J.-M.Morel. Axioms and fundamental equations of image processing. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 123:199–257, 1992.

[4] L. Alvarez, P.-L. Lions, and J.-M. Morel. Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion. II. *SIAM J. Numer. Anal.*, 29:845–866, 1992.

[5] G. Barles and C. Georgelin. A simple proof of convergence for an approximation scheme for computing motion by mean curvature. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32:484–500, 1995.

[6] G. Barles, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. Front propagation and phase field theory. *SIAM J. Control Optim.*, 31:439–469, 1993.

[7] J. Bence, B. Merriman, and S. Osher. Diffusion generated motion by mean curvature. in "Computational Crystal Growers Workshop", J. Taylor ed. *Selected Lectures in Math., Amer. Math. Soc., Province*, 1992.

[8] F. Cao. *Geometric Curve Evolution and Image Processing*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 2003.

[9] X. Chen. Generation and propagation of the interface for reaction-diffusion equations. *J. Differential Equations*, 96:116–141, 1992.

[10] Y.-G. Chen, Y. Giga, and S. Goto. Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations. *J. Differential Geometry*, 33:749–786, 1991.

[11] M. G. Crandall and H. Ishii. The maximum principle for semicontinuous functions. *Differential Integral Equations*, 6:1001–1014, 1990.

[12] M. G. Crandall, H. Ishii, and P.-L. Lions. User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bull. A. M. S.*, 27:1–67, 1992.

[13] M. G. Crandall and P.-L. Lions. On existence and uniqueness of solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Nonlinear Anal., T.M.A.*, 10:353–370, 1986.

[14] P. de Mottoni and M. Schatzman. Geometrical evolution of developed interfaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347:1533–1589, 1995.

[15] S. Descombes. Convergence of a splitting method of high order for reaction-diffusion systems. *Math. Comp.*, 70:1481–1501, 2000.

[16] R. A. Devore and G. G. Lorentz. *Constructive Approximations*. Springer, Berlin/Heidelberg/New York, 1993.

[17] T. Eto, Y. Giga, and K. Ishii. An area minimizing scheme for anisotropic mean curvature flow. *Proc. Japan Acad. Ser. A*, 88:7–10, 2012.

[18] L. C. Evans. Convergence of an algorithm for mean curvature motion. *Indiana Univ. Math. J.*, 42:533–557, 1993.

[19] L. C. Evans. *Partial Differential Equations, Second Edition*. American Mathematical Society, Province, Rhode Island, 2010.

[20] L. C. Evans and R. F. Gariepy. *Measure Theory and Fine Properties of Functions*. CRC Press, Florida, 1998.

[21] L. C. Evans, H. M. Soner, and P. E. Souganidis. Phase transition and generalized motion by mean curvature. *Comm. Pure Appl. Math.*, 45:1097–1123, 1992.

[22] L. C. Evans and J. Spruck. Motion of level sets by mean curvature I. *J. Differential Geometry*, 33:635–681, 1991.

[23] A. Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Printice-Hall, New Jersey, 1964.

[24] M.-H. Giga and Y. Giga. Crystalline and level set flow and convergence of a crystalline algorithm for a general anisotropic curvature flow in the plane. *Free boundary problems: theory and applications, I (Chiba, 1999), GAKUTO Internat. Ser. Math. Sci. Appl., Gakkotosho, Tokyo*, 13:64–79, 2000.

[25] Y. Giga. *Surface Evolution Equations*. Birkhäuser, Basel/Boston/Berlin, 2006.

[26] Y. Giga, S. Goto, H. Ishii, and M.-H. Sato. Comparison principle and convexity preserving properties for singular degenerate parabolic equations in unbounded domains. *Indiana Univ. Math. J.*, 40:443–470, 1991.

[27] P. M. Girao. Convergence of a crystalline algorithm for the motion of a simple closed convex curve by weighted curvature. *SIAM J. Numer. Anal.*, 32:1443–1474, 1995.

[28] P. M. Girao and R. V. Kohn. Convergence of a crystalline algorithm for the heat equation in one dimension and for the motion of a graph by weighted curvature. *Numer. Math.*, 64:41–70, 1994.

[29] H. Holden, K. H. Karlsen, K.-A. Lie, and N. H. Risebro. *Splitting Methods for Partial Differential Equations with Rough Solutions – Analysis and Matlab programs –*. European Mathematical Society, EMS Series of Lectures in Mathematics, 2010.

[30] T. Ilmanen. Convergence of the Allen-Cahn equation to Brakke's motion by mean curvature. *J. Differential Geometry*, 38:417–461, 1993.

[31] H. Ishii. On uniqueness and existence of viscosity solutions of fully nonlinear second-order elliptic PDE's. *Comm. Pure Appl. Math.*, 42:14–45, 1989.

[32] 石井 仁司. 非線形偏微分方程式の敗性解について. 岩波 数学, 46:144–157, 1994.

[33] H. Ishii. A generalization of the Bence, Merryman and Osher algorithm for motion by mean curvature. *in Curvature flows and related topics, (ed. A. Damlamian, J. Spruck, A. Visintin), Gakko Tosho, Tokyo*, 00:111–127, 1995.

[34] H. Ishii, G. E. Pires, and P. E. Souganidis. Threshold dynamics type approximation schemes for propagating fronts. *J. Math. Soc. Japan*, 50:267–308, 1999.

[35] H. Ishii and P. E. Souganidis. Generalized motion of noncompact hypersurfaces with velocity having arbitrary growth on curvature tensor. *Tohoku J. Math.*, 47:227–250, 1995.

[36] K. Ishii. Optimal rate of convergence to the motion by mean curvature with a driving force. *Adv. Differential Equations*, 12:481–514, 2007.

[37] K. Ishii and H. M. Soner. Regularity and convergence of crystalline motion. *SIAM J. Math. Anal.*, 30:19–37, 1999.

[38] F. John. *Partial Differential Equations, Fourth edition*. Springer, new York/Heidelberg/Berlin, 1982.

[39] M. Kimura. Numerical analysis of moving boundary problems using the boundary tracking method. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, 14:373–398, 1997.

[40] 木村 正人. 移動境各問題の数値解析. 岩波 数学, 52:1–15, 2000.

[41] S. Koike. *A Beginner's Guide to the Theory of Viscosity Solutions, MSJ Memoirs Vol. 13*. Mathematical Society of Japan, Tokyo, 1998.

[42] 小池 茂昭. 粘性解 比較原理を中心に. 共立出版, 共立講座 数学の輝き 8, 2016.

[43] P. Mascarenhas. Diffusion generated motion by mean curvature. Campus Report, Math. Dept., University of California, Los Angeles, 1992.

[44] G. Matheron. *Random Sets and Integral Geometry*. Jon Wiley, New York, 1975.

[45] W. W. Mullins. Two-dimensional motion of idealized grain boundaries. *J. Appl. Phys.*, 27:900–904, 1956.

[46] M. Ohnuma and K. Sato. Singular degenerate parabolic equations with applications to the p-Laplace diffusion equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 22:381–411, 1997.

[47] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applicatoins to Partial Differential Equations*. Springer, New York, 1983.

[48] R. Schneider. *Convex Bodies: the Brunn-Minkowsky Theory*. Cambridge University Press, Encyclopedia of Mathmatics and its Applications, 1993.

[49] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, Massachusetts, 1982.

[50] H. M. Soner. Ginzburg-Landau equation and motion by mean curvature I, Convergence. *J. Geometric Anal.*, 7:437–475, 1997.

[51] T. K. Ushijima and H. Yagishita. Convergence of a three-dimensional crystalline motion to gauss curvature flow. *Japan J. Industrial Appl. Math.*, 22:443–459, 2005.

[52] T. K. Ushijima and S. Yazaki. Convergence of a crystalline algorithm for the motion of a closed convex curve by a power of curvature $V = K^{\alpha}$. *SIAM J. Numer. Anal*, 37:500–522, 2000.

[53] L. Vivier. Convergence of an approximation scheme for computing motions with curvature dependent velocities. *Differential Integral Equations*, 13:1263–1288, 2000.