場の理論における埋蔵固有値の摂動問題

廣 島 文 生

1 序

量子場と相互作用する量子系のハミルトニアンのスペクトルを解析しようとすれば必然的に埋蔵固有値の摂動問題に遭遇する．ここで**埋蔵固有値**とは，連続スペクトルに埋め込まれた固有値のことである．量子場と相互作用する量子系のハミルトニアンのスペクトル解析は1996年頃より急速に発展し，現在も研究が盛んに進められている．典型的な例は量子電磁場と相互作用する電子や，中間子場と相互作用する核子などである．この論説では物理的解釈には深入りせず，純粋数学の立場に立ち数学的な部分に着目して，最近の研究成果を筆者の研究成果も含めて紹介する．

まずはことの起こりから説明しよう．水素様原子 (hydrogen-like atom) 内の電子を考える．Dirac理論では電子の状態ベクトルは $L^2(\boldsymbol{R}^3;\boldsymbol{C}^4)$ 上の Dirac 作用素

$$D_{\text{水素}} = -i\alpha\cdot\partial + \beta m - \frac{Ze^2}{|x|}$$

に支配されている．ここで $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$, β は 4×4 エルミート行列で

$$\alpha_j\alpha_k + \alpha_k\alpha_j = 2\delta_{jk}1_4, \quad \alpha_j\beta + \beta\alpha_j = 0, \quad \beta^2 = 1_4, \quad j,k=1,2,3,$$

をみたし，m は電子の質量，e は電子の電荷，Z は原子番号を表す．Dirac 作用素 $D_{\text{水素}}$ の固有値は $n\in\boldsymbol{N}$, $j=l\pm 1/2$, $l\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}$ として

$$E_{nj} = m\left\{1+Z^2e^4\left(n-\left(j+\frac{1}{2}\right)+\sqrt{\left(j+\frac{1}{2}\right)^2-Z^2e^4}\right)^{-2}\right\}^{-1/2}$$

で与えられる．これから $n=2$, $j=1/2$, $l=0$ ($2S_{1/2}$ と表す) と $n=2$, $j=1/2$, $l=1$ ($2P_{1/2}$ と表す) のときの固有状態の固有値が等しいことがわかる．しかし，1947年 Lamb–Retherford [78] が精密な実験により実際には $2S_{1/2} > 2P_{1/2}$ であることを発見した．これを**Lamb のずれ**という．この Lamb のずれは，1947年 Bethe [25] によって量子電磁場と電子の相互作用から理論的に説明された．さらに，1948年 Welton [95] は量子電磁場による電子の位置エネルギーの揺らぎとして Lamb のずれを説明した．これらの結果は量子電磁場と電子の相互作用が実際の物理的な観測にかかる効果を生み出すことを示したものであった．

もうひとつ量子場との相互作用から生み出される効果を見てみよう．例えば励起状態の電子を考える．量子力学では外部との相互作用がない限り励起状態は安定する．しかし，実際には光の自発放射によって外的な相互作用がなくても，時間がたてば励起状態の電子はエネルギーの低い固有状態へ緩和していく．この現象は**緩和現象** (relaxation to the ground state) とよばれる．この緩和現象も量子電磁場と電子の相互作用から物理的に説明できる．

我々の研究の動機付けはここに説明した Lamb のずれや緩和現象の数学的な解明にある．そこで量子場と相互作用する量子系の基本的な枠組みについて説明しよう．$\mathscr{H}$ は量子力学的粒子 (例えば電

子) の状態ベクトルのつくる Hilbert 空間，$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}$ は量子場 (例えば量子電磁場) の状態ベクトルがつくる Hilbert 空間としよう．この相互作用系の Hilbert 空間はテンソル積 Hilbert 空間

$$\mathscr{H} \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}$$

で定義される．相互作用を表すハミルトニアンは $\mathscr{H} \otimes \mathscr{F}_{\mathrm{b}}$ 上の自己共役作用素

$$H_g = H_0 + gH_{\mathrm{I}}$$

で与えられる．ここで H_0 は自由ハミルトニアン，$g \in \boldsymbol{R}$ は結合定数，H_{I} は相互作用を表す対称作用素である．例えば H_0 は $H_0 = D_{\text{水素}} \otimes 1 + 1 \otimes H_{\text{場}}$ という形をしている．$H_{\text{場}}$ は量子場の自由ハミルトニアンを表し，そのスペクトルは典型的な場合 $\sigma(H_{\text{場}}) = [0, \infty)$ である．そのため $D_{\text{水素}}$ の固有値は H_0 の埋蔵固有値になるから H_g のスペクトルを解析するとき，gH_{I} を H_0 の摂動と見なせば，必然的に埋蔵固有値の摂動問題に直面することになる．離散固有値の摂動問題は有限次元の固有値問題へ帰着できて非常によくわかっているが，埋蔵固有値の摂動に関する一般論は少ない．我々が考察している模型では，連続スペクトルの端点として埋め込まれている埋蔵固有値と，そうでない埋蔵固有値では摂動を加えたときの挙動が大きく異なる．前者は摂動を加えた後も安定的に固有値として残るが，後者は摂動を加えると同時に消えてしまい，共鳴極といわれる複素下半平面上のある有理型関数の極へ連続的に移る．さらに m 重に縮退した H_0 の埋蔵固有値は摂動を加えると一般に縮退が解けて m 個の共鳴極になる．このばらけた共鳴極の実部の差が Lamb のずれの数学的な解釈である．

歴史的背景をかいつまんで紹介する．1964 年 Nelson [88] は今日 Nelson 模型とよばれる模型に対して適当な“くりこみ”を行って，紫外切断[1] を外す極限が，ある自己共役作用素に収束することを証明した．Høegh–Krohn [76] は紫外切断の除去された Nelson 模型のスペクトル散乱理論を展開した．Glimm–Jaffe [42] は ϕ^4 模型の基底状態の存在と一意性を証明した．彼らの解析方法は現在も本質的にこの論説で紹介する模型の解析に応用されている．1973–4 年 Fröhlich [36], [35] はポーラロン型の模型のスペクトルを赤外発散の問題に着目しながら解析した．1978 年 Fröhlich–Park [37, p. 744] は open problem 4 に‘非相対論的量子電磁力学のハミルトニアンの基底状態，共鳴極を数学的に解明せよ’と挙げた．1981–3 年 Arai [2]–[5] は双極子近似された非相対論的量子電磁力学のハミルトニアンで，基底状態の存在・非存在の問題，Lamb のずれ，漸近的完全性の問題を数学的に解析した．1989 年 Spohn [91] は汎関数積分を用いてスピン-ボゾン模型の基底状態を解析した．1998–9 年 Bach–Fröhlich–Sigal [19]–[21] は非相対論的量子電磁力学のハミルトニアンの基底状態の存在を証明し，さらに**くりこみ群**という概念を導入して共鳴極の存在を証明し世界を驚かせた．独立に Arai–Hirokawa [13] は一般化されたスピン-ボゾン模型の基底状態の存在を証明した．その後，Spohn [93]，Gérard [40]，Griesemer–Lieb–Loss [43] によって飛躍的に量子場と相互作用する量子系のハミルトニアンの基底状態の解析が進んだ．さらに多くの研究者により，このような量子系のハミルトニアンのスペクトル散乱理論，共鳴現象，緩和現象，質量くりこみ理論，物質の安定性等が研究されている．これらの研究のレヴューとして，例えば，Arai [10]–[12]，Hiroshima [64], [66]–[68]，Spohn [94] を挙げておく．

謝辞：本稿に対して数多くの有益な示唆や誤植の指摘をして下さった査読者にこの場を借りて深く感謝いたします．

2 相互作用模型

2.1 ボゾン Fock 空間

場の量子論の解析で基本となるボゾン Fock 空間，生成消滅作用素，第 2 量子化などの概念について説明する．h を $\boldsymbol{C}$ 上の Hilbert 空間とする．$\boldsymbol{S}_n$ を n 次対称群として，$S_n : \otimes^n h \to \otimes^n h$ を

$$S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = n!^{-1} \sum_{\sigma \in \boldsymbol{S}_n} f_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\sigma(n)}$$

で定義する．$\otimes_s^n h = S_n(\otimes^n h)$ $(n \geq 1)$，$\otimes_s^0 h = \boldsymbol{C}$ とおく．

$$\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(h) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} [\otimes_s^n h] = \left\{ \Psi = \{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty} \;\middle|\; \|\Psi\|_{\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(h)}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\Psi^{(n)}\|_{\otimes^n h}^2 < \infty \right\}$$

を h 上の**ボゾン Fock 空間**という．ここで，$\|\cdot\|_{\mathscr{K}}$ は Hilbert 空間 $\mathscr{K}$ 上のノルムを表す．内積は $(f,g)_{\mathscr{K}}$ で表し，f について反線形，g について線形とする．$\Omega = \{1,0,0,\dots\} \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(h)$ を **Fock 真空**という．$\{\Psi^{(n)}\} \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(h)$ で，$\Psi^{(k)} = 0$，$k \geq {}^{\exists}m$，となるもの全体を $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(h)$ で表す．**生成作用素** $a^\dagger(f)$ を

$$(a^\dagger(f)\Psi)^{(n+1)} = \sqrt{n+1}\, S_{n+1}(f \otimes \Psi^{(n)}),$$

$$D(a^\dagger(f)) := \left\{ \Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}}(h) \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \|S_{n+1}(f \otimes \Psi^{(n)})\|_{\otimes^{n+1} h}^2 < \infty \right\},$$

消滅作用素を $a(f) = [a^\dagger(\bar{f})]^*$ で定義する．ここで作用素 T の定義域を $D(T)$ で表した．$a^\dagger(f), a(f)$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{fin}}(h)$ 上で**正準交換関係**

$$[a(f), a^\dagger(g)] = (\bar{f}, g)_h, \quad [a^\dagger(f), a^\dagger(g)] = 0, \quad [a(f), a(g)] = 0$$

をみたす．$\{\Omega\} \cup \{a^\dagger(f_1) \cdots a^\dagger(f_n)\Omega \mid f_j \in h,\ j = 1, \dots, n,\ n \in \boldsymbol{N}\}$ から生成される部分空間は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(h)$ で稠密である．S を h 上の自己共役作用素とする．$\Gamma(e^{itS})$ を

$$\Gamma(e^{itS}) a^\dagger(f_1) \cdots a^\dagger(f_n)\Omega = a^\dagger(e^{itS} f_1) \cdots a^\dagger(e^{itS} f_n)\Omega$$

で定義し線形に拡張すれば $\{\Gamma(e^{itS})\}_{t \in \boldsymbol{R}}$ は $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(h)$ 上の強連続な一径数ユニタリー群になる．Stone の定理より $\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(h)$ 上の自己共役作用素 $d\Gamma(S)$ で

$$\Gamma(e^{itS}) = e^{itd\Gamma(S)}, \quad t \in \boldsymbol{R},$$

となるものが存在する．$d\Gamma(S)$ を S の**第 2 量子化**とよぶ．簡単に

$$d\Gamma(S) a^\dagger(f) \cdots a^\dagger(f_n)\Omega = \sum_{j=1}^{n} a^\dagger(f_1) \cdots a^\dagger(Sf_j) \cdots a^\dagger(f_n)\Omega, \quad d\Gamma(S)\Omega = 0$$

となることがわかる．作用素 T のスペクトル (点スペクトル，真性スペクトル，リゾルベント集合) を $\sigma(T)$ $(\sigma_{\mathrm{p}}(T),\ \sigma_{\mathrm{ess}}(T),\ \rho(T))$ で表す．

$$\sigma(d\Gamma(S)) = \overline{\{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\lambda_1 + \cdots + \lambda_n \mid \lambda_j \in \sigma(S),\ j = 1, \dots, n\}}$$

となることが知られている．h 上の恒等作用素の第 2 量子化を**個数作用素**とよび N で表す：

$$(N\Psi)^{(n)} = n\Psi^{(n)}, \quad D(N) = \left\{ \Psi \in \mathscr{F}_{\mathrm{b}} \;\middle|\; \sum_{n=0}^{\infty} n^2 \|\Psi^{(n)}\|_{\otimes^n h}^2 < \infty \right\}.$$

$\mathscr{H}$ を $\boldsymbol{C}$ 上の Hilbert 空間とし A を $\mathscr{H}$ 上の自己共役作用素とする．Hilbert 空間 $\mathscr{F}=\mathscr{H}\otimes\mathscr{F}_{\rm b}(h)$ 上の自己共役作用素 $H_0=A\otimes 1+1\otimes d\Gamma(S)$ を**非結合ハミルトニアン**とよぶ．**全ハミルトニアン**を $\mathscr{F}$ 上の線形作用素

$$H_g=H_0+H_{\rm I},\quad D(H_g)=D(H_0)\cap D(H_{\rm I})$$

で定義する．ここで，$H_{\rm I}$ は対称作用素，$g\in\boldsymbol{R}$ は結合定数である．H_g は本質的に自己共役であると仮定し，その閉包も同じ記号 H_g で表す．$\inf\sigma(H_g)$ を $E(H_g)$ で表し，$\dim{\rm Ker}(H_g-E(H_g))$ を ${\rm m}(H_g)$ で表す．${\rm m}(H_g)>0$ のとき H_g の**基底状態が存在する**といい，$\varphi_{\rm g}\in{\rm Ker}(H_g-E(H_g))$ を H_g の**基底状態**という．${\rm m}(H_g)$ を基底状態の**多重度**とよぶ．

2.2 典型的な模型の例

以下 (1)–(4) で $\hat\varphi:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$, $V:\boldsymbol{R}^3\to\boldsymbol{R}$ とする．

(1) **Nelson 模型**. Nelson [88] が質量 $m>0$ の核子と質量 $\nu\geq 0$ の中間子場の相互作用を表す模型として導入した．Nelson 模型に対する Hilbert 空間は $\mathscr{F}_{\rm N}=L^2(\boldsymbol{R}^3)\otimes\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\boldsymbol{R}^3))$ である．$L^2(\boldsymbol{R}^3)$ 上の作用素 $H_{\rm p}$ を $H_{\rm p}=-(2m)^{-1}\Delta+V$ と定義する．ここで，V は掛け算作用素でポテンシャルを表す．$\omega_{\rm N}(k)=\sqrt{|k|^2+\nu^2}$ とする．$a^\sharp$ は a または $a^\dagger$ を表す．$a^\sharp(f)$ を形式的に $a^\sharp(f)=\int a^\sharp(k)f(k)dk$ と表せば，$\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\boldsymbol{R}^3))$ 上のスカラー場は

$$\phi_{\hat\varphi}(x)=\int\frac{\hat\varphi(k)}{\sqrt{2\omega_{\rm N}(k)}}(a^\dagger(k)e^{-ikx}+a(k)e^{ikx})\,dk,\quad x\in\boldsymbol{R}^3,$$

で定義される．ただし $\hat\varphi/\sqrt{2\omega_{\rm N}}\in L^2(\boldsymbol{R}^3)$ を仮定する．ここで $\mathscr{F}_{\rm N}\cong\int_{\boldsymbol{R}^3}^{\oplus}\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\boldsymbol{R}^3))\,dx$ の同一視の下 $\phi_{\hat\varphi}=\int_{\boldsymbol{R}^3}^{\oplus}\phi_{\hat\varphi}(x)\,dx$ と定めれば，全ハミルトニアンは $g\in\boldsymbol{R}$ を結合定数として次で定義される：

$$H_{\rm N}=H_{\rm p}\otimes 1+1\otimes d\Gamma(\omega_{\rm N})+g\phi_{\hat\varphi}.$$

(2) **Pauli–Fierz 模型**. 質量 m の低エネルギー電子と Coulomb ゲージで量子化された輻射場 (光子) との相互作用を表す模型である ([90])．**非相対論的量子電磁力学の模型**とよばれることもある．$L^2_{\rm ph}=L^2(\boldsymbol{R}^3\times\{1,2\})$ とおく．ここで $\{1,2\}$ は横波の光子が 2 成分からなることに対応している．Pauli–Fierz 模型に対する Hilbert 空間は $\mathscr{F}_{\rm PF}=(\boldsymbol{C}^2\otimes L^2(\boldsymbol{R}^3))\otimes\mathscr{F}_{\rm b}(L^2_{\rm ph})$ である．$\omega_{\rm PF}(k)=|k|$ とおく．$a^\sharp(f)$ を形式的に $a^\sharp(f)=\sum_{j=1,2}\int a^\sharp(k,j)f(k,j)\,dk$ と表せば，$\mathscr{F}_{\rm b}(L^2_{\rm ph})$ 上の輻射場は

$$A_{\hat\varphi}(x)=\sum_{j=1,2}\int\frac{\hat\varphi(k)}{\sqrt{2\omega_{\rm PF}(k)}}e(k,j)(a^\dagger(k,j)e^{-ikx}+a(k,j)e^{ikx})\,dk,\quad x\in\boldsymbol{R}^3,$$

で定義される．ただし $\hat\varphi/\sqrt{2\omega_{\rm PF}}\in L^2(\boldsymbol{R}^3)$ と仮定する．ここで $e(k,j)$ は $e(k,1)$, $e(k,2)$, $k/|k|$ が $\boldsymbol{R}^3$ で右手系をつくる任意のベクトルである．$L^2(\boldsymbol{R}^3)\otimes\mathscr{F}_{\rm b}(L^2_{\rm ph})\cong\int_{\boldsymbol{R}^3}^{\oplus}\mathscr{F}_{\rm b}(L^2_{\rm ph})\,dx$ の同一視の下 $A_{\hat\varphi}=\int_{\boldsymbol{R}^3}^{\oplus}A_{\hat\varphi}(x)\,dx$ と定義する．$A_{\hat\varphi}$ は $\nabla_x\cdot A_{\hat\varphi}=0$ をみたす．全ハミルトニアンは次で定義される：

$$H_{\rm PF}=\frac{1}{2m}\{\sigma\otimes(-i\nabla\otimes 1-eA_{\hat\varphi})\}^2+1\otimes V\otimes 1+1\otimes 1\otimes d\Gamma(\omega_{\rm PF}).$$

ここで $e\in\boldsymbol{R}$ は結合定数，$\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$ は反交換関係 $\{\sigma_i,\sigma_j\}=2\delta_{ij}1$ をみたす 2×2 Pauli 行列である．電子がスピンをもたないと仮定した場合，Hilbert 空間は $\mathscr{F}^0_{\rm PF}=L^2(\boldsymbol{R}^3)\otimes\mathscr{F}_{\rm b}(L^2_{\rm ph})$ で，全ハミルトニアンは

$$H_{\rm PF}^0=\frac{1}{2m}(-i\nabla\otimes 1-eA_{\hat\varphi})^2+V\otimes 1+1\otimes d\Gamma(\omega_{\rm PF})$$

で定義される．さらに $H_{\rm PF}^0$ で $A_{\hat\varphi}\to 1\otimes A_{\hat\varphi}(0)$ と置き換えたハミルトニアンを $H_{\rm PF}^0$ の**双極子近似** (dipole approximation) といい $H_{\rm PF}^{\rm dip}$ で表す．電子の個数が $N\geq 2$ の Pauli–Fierz 模型のハミルトニアン $H_{\rm PF}(N)$ は Hilbert 空間 $[(\otimes^N \boldsymbol{C}^2)\otimes\bigwedge^N L^2(\boldsymbol{R}^3)]\otimes\mathscr{F}_{\rm b}(L^2_{\rm ph})$ 上に

$$H_{\rm PF}(N)=\sum_{j=1}^N\frac{1}{2m}\{\sigma^j\otimes(-i\nabla^j\otimes 1-eA^j_{\hat\varphi})\}^2+1\otimes V\otimes 1+1\otimes 1\otimes d\Gamma(\omega_{\rm PF})$$

で定義される．ここで $\bigwedge^N L^2(\boldsymbol{R}^3)$ は $f(x_1,\ldots,x_N)$ で $x_j\in\boldsymbol{R}^3$, $j=1,\ldots,N$, について反対称な 2 乗可積分関数全体，$\sigma^j=1\otimes\cdots\otimes\overset{j}{\sigma}\otimes\cdots\otimes 1$, $-i\nabla^j$ は j 番目の電子の運動量作用素，$A^j_{\hat\varphi}=\int^\oplus_{\boldsymbol{R}^{3N}}A_{\hat\varphi}(x_j)\,dx$ である．

(3) **一般化されたスピン-ボゾン (GSB) 模型**．**スピン-ボゾン模型**の一般化として Arai–Hirokawa [13] により導入された．GSB 模型に対する Hilbert 空間は $\mathscr{F}_{\rm GSB}=\mathscr{H}\otimes\mathscr{F}_{\rm b}(L^2(\boldsymbol{R}^d))$ である．ただし，$\mathscr{H}$ は $\boldsymbol{C}$ 上の Hilbert 空間である．$\omega_{\rm GSB}(k)$ は非負関数，A は下から有界な自己共役作用素，B_j, $j=1,\ldots,J$, は $\mathscr{H}$ 上の対称作用素で $\|B_jf\|\leq a_j\|(A-E(A))^{1/2}f\|+b_j\|f\|$, $a_j<1$, をみたすと仮定する．$\phi(\lambda)=a^\dagger(\bar\lambda)+a^\dagger(\lambda)$, $\lambda\in L^2(\boldsymbol{R}^d)$, とおく．このとき，全ハミルトニアンは $\alpha\in\boldsymbol{R}$ を結合定数として次で定義される：

$$H_{\rm GSB}=\overline{A\otimes 1+1\otimes d\Gamma(\omega_{\rm GSB})+\alpha\sum_{j=1}^J B_j\otimes\phi(\lambda_j)}\,.$$

ここで $\overline{X}$ は X の閉包を表す．本論説では $d=3$, $\lambda_j=\hat\varphi/\sqrt{2\omega_{\rm GSB}}$, $j=1,\ldots,J$ と仮定する．

(4) **Dirac–Maxwell 模型**．質量 m の Dirac 粒子と質量ゼロの輻射場の相互作用を表す模型である．Dirac–Maxwell 模型に対する Hilbert 空間は $\mathscr{F}_{\rm DM}=(\boldsymbol{C}^4\otimes L^2(\boldsymbol{R}^3))\otimes\mathscr{F}_{\rm b}(L^2_{\rm ph})$ である．4×4 行列 β, α_j を

$$\beta=\begin{pmatrix}1_2&0\\0&-1_2\end{pmatrix},\quad \alpha_j=\begin{pmatrix}0&\sigma_j\\\sigma_j&0\end{pmatrix},\quad j=1,2,3,$$

で定義する．$\omega_{\rm DM}(k)=|k|$, $A_{\hat\varphi}$ を Pauli–Fierz 模型で定義した輻射場とする．このとき，全ハミルトニアンは次で定義される：

$$H_{\rm DM}=\alpha\otimes(-i\nabla\otimes 1-eA_{\hat\varphi})+m\beta\otimes 1\otimes 1+1\otimes V\otimes 1+1\otimes 1\otimes d\Gamma(\omega_{\rm DM}).$$

さらに電子を第 2 量子化して，電子の生成消滅もとりいれることによって ‘Dirac の海’ をも記述する本来の量子電磁力学の模型も解析されている．例えば Barbaroux–Dimassi–Guillot [24] を参照のこと．

2.3 自己共役性

表記を簡略化するために $-i\nabla=p$ とおく．またテンソル $\otimes$ の記号を省いて以下のようにハミルトニアンを記述する：

$$H_{\rm N}=H_{\rm p}+d\Gamma(\omega)+g\phi_{\hat\varphi},\quad H_{\rm PF}=\frac{1}{2m}\{\sigma\cdot(p-eA_{\hat\varphi})\}^2+V+d\Gamma(\omega).$$

何も言及しないとき，ポテンシャル V は $D(p^2)\subset D(V)$ で $\|Vf\|\leq a\|(2m)^{-1}p^2f\|+b\|f\|$, $0\leq a<1$, $0\leq b$, をみたすと仮定する．特に $H_{\rm p}$ は $D(p^2)$ 上で下から有界な自己共役作用素である．

形式的に定義されたこれらのハミルトニアンの自己共役性を示さなくてはならない．$\overline{\hat\varphi(k)}=\hat\varphi(k)$

とする．このとき $H_{\rm N}$ と $H_{\rm PF}$ は適当な定義域で対称作用素になる．$\hat{\varphi}, \hat{\varphi}/\sqrt{\omega} \in L^2(\boldsymbol{R}^3)$ のとき $\phi_{\hat{\varphi}}$ は $p^2 + d\Gamma(\omega)$ に対して無限小相対有界なので，Kato–Rellich の定理より $H_{\rm N}$ は $D(p^2 + d\Gamma(\omega))$ 上で下から有界な自己共役作用素であることがわかる．Pauli–Fierz 模型の場合には，

$$H_{\rm PF} = \underbrace{H_{\rm p} + d\Gamma(\omega)}_{H_0} + e\underbrace{\left(-\frac{1}{m}p \cdot A_{\hat{\varphi}} + \frac{e}{2m}A_{\hat{\varphi}} \cdot A_{\hat{\varphi}} - \frac{1}{2m}\sigma \cdot {\rm rot}_x A_{\hat{\varphi}}\right)}_{H_{\rm PF,I}}$$

とおいたとき，$H_{\rm PF,I}$ は $p^2 + d\Gamma(\omega)$ に相対有界ではあるが，無限小相対有界ではない．よって，$|e| \ll 1$ のときには Kato–Rellich の定理から $H_{\rm PF}$ の自己共役性が示される．一般の e に対する $H_{\rm PF}$ の自己共役性は 3.5 節で紹介する汎関数積分表示を応用して証明することができる．

定理 2.1 (Hiroshima [58], [61]) $\overline{\hat{\varphi}(k)} = \hat{\varphi}(k)$，$\sqrt{\omega}\,\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}$, $\hat{\varphi}/\sqrt{\omega} \in L^2(\boldsymbol{R}^3)$ とする．$V = V(x_1, \ldots, x_N)$ が $x_1, \ldots, x_N$ について対称であるとき，任意の $e \in \boldsymbol{R}$ に対して $H_{\rm PF}(N)$ は $D(\sum_{j=1}^N p_j^2 + d\Gamma(\omega))$ 上で下から有界な自己共役作用素である．

$H_{\rm GSB}$ の自己共役性は Arai–Hirokawa [13] で，$H_{\rm DM}$ のそれは Arai [7] で示されている．ただし，$H_{\rm DM}$ は下から有界ではない．$H_{\rm PF}^{\rm dip}$ の任意の e での自己共役性は Arai [2]–[4] で示されている．また Arai [9] はそれまでに知られていなかった $H_{\rm PF}$ の自己共役拡大を構成した．

2.4 発散

場の理論に現れる 2 つの発散について説明する．具体例で掲げた 4 つのハミルトニアンの例では，相互作用項に**紫外切断**または**運動量切断**とよばれるテスト関数 $\hat{\varphi}$ が導入されていた．物理的には $\hat{\varphi} \equiv 1/\sqrt{(2\pi)^3}$ であるが，ハミルトニアンを自己共役作用素として定義するためには $\hat{\varphi}/\sqrt{2\omega_\#} \in L^2(\boldsymbol{R}^3)$, $\# = {\rm N, PF, GSB, DM}$, を仮定しなければならない．$\hat{\varphi} \equiv 1/\sqrt{(2\pi)^3}$ に対するハミルトニアンは例えば次のような処方で定義される．一旦

$$\hat{\varphi}(k) = \hat{\varphi}_\Lambda(k) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}, & |k| \le \Lambda, \\ 0, & |k| > \Lambda \end{cases}$$

としてハミルトニアンを定義し，その後，なんらかの方法 (例えば，発散する作用素を引き去るなど) で $\Lambda \to \infty$ の極限をとり紫外切断を除去したハミルトニアンを定義する．しかし実際このような処方で $\hat{\varphi} \equiv 1/\sqrt{(2\pi)^3}$ に対するハミルトニアンを定義することは非常に難しい．これが**紫外発散の問題**である．慣習的見方によれば，紫外切断を除去したハミルトニアンは元の Hilbert 空間には構成されないといわれている．しかし，Nelson [88] は Nelson 模型で紫外切断を除去したハミルトニアンが元の Hilbert 空間で構成できることを示した．しかもその基底状態の存在が Ammari [1]，Hirokawa–Hiroshima–Spohn [53] で示されている．

もうひとつの発散は，場の質量が 0 (つまり $\omega_\#(k) = |k|$ のとき) に起因する発散である．これは紫外発散と対極的に場の運動量の小さいところに起因する発散である．紫外切断 $\hat{\varphi}_\Lambda$ にさらに**赤外切断** $\hat{\varphi}_{\Lambda\kappa}$ を

$$\hat{\varphi}_{\Lambda\kappa}(k) = \begin{cases} 0, & |k| < \kappa, \\ \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^3}}, & \kappa \le |k| \le \Lambda, \\ 0, & |k| > \Lambda \end{cases}$$

のように導入する．そのハミルトニアンの基底状態を φ_{g_κ} とする．このとき個数作用素の期待値が $\lim_{\kappa\to 0}(\varphi_{g_\kappa}, (1\otimes N)\varphi_{g_\kappa}) = \infty$ となること，及び $\kappa = 0$ では基底状態が存在しないことが予想されている．これは**赤外発散の問題**とよばれる．直観的には，$\kappa \to 0$ では運動量の小さな無数のボゾンが基底状態に雲のようにまとわりつき，基底状態が存在しえなくなると考えられる．しかし，Bach–Fröhlich–Sigal [21] は，$\kappa = 0$ でも $|e| \ll 1$ のとき Pauli–Fierz 模型の基底状態が存在することを証明した．さらに，Griesemer–Lieb–Loss [43] は $\kappa = 0$，任意の e に対して Pauli–Fierz 模型の基底状態の存在を示した．これらは非常に驚くべき発見であり，数理物理学におけるひとつの金字塔であると筆者は感じている．

定義 2.2 $\hat{\varphi}/\omega_\#^{3/2} \in L^2(\boldsymbol{R}^3)$ を**赤外正則条件**といい，$\hat{\varphi}/\omega_\#^{3/2} \notin L^2(\boldsymbol{R}^3)$ を**赤外特異条件**という．

物理的に $\varphi(x)$ は電荷の分布を表すので，特に $\varphi(x) \geq 0$ である．$\hat{\varphi}(0) = (2\pi)^{-3/2}\int_{\boldsymbol{R}^3}\varphi(x)\,dx$ であるから，$\hat{\varphi}(0) > 0$ となる．$\omega_\#(k) = |k|$ とする．$\hat{\varphi}$ を連続と仮定すれば $\hat{\varphi}(k)^2/\omega_\#(k)^3$ の $k = 0$ での特異性により $\hat{\varphi}$ は赤外特異条件をみたすことになる．赤外特異条件は様々な場面で解析を困難にする．赤外特異条件を回避する典型的な例として次の 2 つがある．(1) $\hat{\varphi}(k) = 0$, $|k| < {}^\exists\kappa$, (2) $\omega_\#(k) = \sqrt{|k|^2 + \nu^2}$, $\nu > 0$．前者はもちろん $\varphi(x) \geq 0$ をみたさない．後者を **massive 模型**とよび，これに対して，$\nu = 0$ のとき **massless 模型**とよぶ．

3 スペクトル解析

Nelson 模型と Pauli–Fierz 模型を比較しながら両者のスペクトルの性質について述べる．記述を簡単にするために $\omega_{\mathrm{N}}(k) = \omega_{\mathrm{PF}}(k) = \omega(k) = \sqrt{|k|^2 + \nu^2}$, $\nu \geq 0$, とおく．

3.1 埋蔵固有値

Nelson 模型を例に埋蔵固有値について説明する．$V(x) = -1/|x|$ としよう．このとき，$\sigma(H_{\mathrm{p}}) = \{E_j\}_{j=0}^\infty \cup [0,\infty)$, $E_0 \leq E_1 \leq \cdots < 0$ となる．

$$\sigma(d\Gamma(\omega)) = \{0\} \cup [\nu, \infty), \quad \sigma_{\mathrm{p}}(d\Gamma(\omega)) = \{0\}$$

であるから，非結合ハミルトニアンのスペクトルは

$$\sigma(H_{\mathrm{p}} \otimes 1 + 1 \otimes d\Gamma(\omega)) = \overline{\{\lambda_1 + \lambda_2 \mid \lambda_1 \in \sigma(H_{\mathrm{p}}),\ \lambda_2 \in \sigma(d\Gamma(\omega))\}} = [E_0 + \nu, \infty) \cup \{E_j\}_{j=0}^\infty$$

となる．ν が十分小さければ図 1 のように点スペクトル $\{E_j\}_{j=0}^\infty$ の一部は連続スペクトルに埋め込まれ，埋蔵固有値になる．

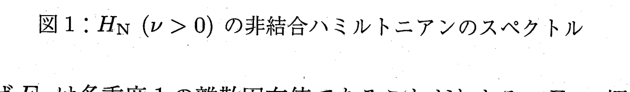

図 1：H_{N} $(\nu > 0)$ の非結合ハミルトニアンのスペクトル

さらに $\nu > 0$ とすれば E_0 は多重度 1 の離散固有値であることがわかる．E_0 の摂動について考えよう．

定義 3.1 R を $\boldsymbol{C}$ の開集合とする．$\{H_g,\ g \in R\}$ は閉作用素の族 (自己共役作用素とは限らない) で $\rho(H_g) \neq \emptyset$ とする．次の (1), (2) をみたすとき $\{H_g,\ g \in R\}$ を ***A* 型の解析族**という．(1) ある稠密な $\mathscr{D}$ が存在して $D(H_g) = \mathscr{D}$, $g \in R$, をみたす．(2) $H_g u$, $u \in \mathscr{D}$, が g について強解析的である．

命題 3.2 ([73, Theorem 15.11]) H_g を $g = 0$ の近傍で A 型の解析族とする．E を多重度 m

の H_0 の離散固有値とする．このとき H_g の離散固有値 $E^{(1)}(g),\ldots,E^{(r)}(g)$ で次をみたすものが存在する．(1) $E=E^{(k)}(0)$，$k=1,\ldots,r$．(2) $E^{(1)}(g),\ldots,E^{(r)}(g)$ の多重度の和は m．(3) 各 $E^{(k)}(g)$ に対してある $p\in\boldsymbol{N}\cup\{0\}$ が存在して $E^{(k)}(g)$ は $g^{1/p}$ の解析関数．(4) H_g が $g\in\boldsymbol{R}$ で自己共役作用素ならば $E^{(k)}(g)$ は g の解析関数．

H_{N} のスペクトルの下限を $E_0(g)$ と書く．$\nu>0$ のとき，命題 3.2 より $|g|\ll 1$ で $E_0(g)$ は離散固有値であり g について解析的であることがわかる．特に $E_0(g)$ は H_{N} の基底状態である．しかし $\nu=0$ のときは様相が一変する．このときは図 2 のように E_0 が埋蔵固有値になる．

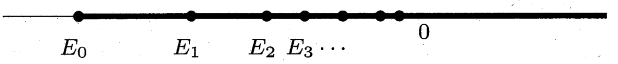

図 2：H_{N} $(\nu=0)$ の非結合ハミルトニアンのスペクトル

そのため $|g|\ll 1$ でも $E_0(g)$ が固有値として存在するのかどうかすぐにはわからない．また g に関する微分可能性も一般にはよくわからない．実際には H_{N} の埋蔵固有値について次のことが適当な条

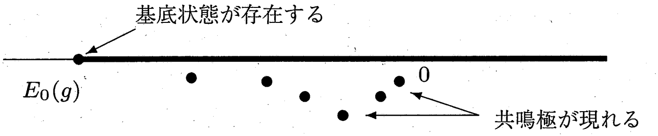

図 3：H_{N} のスペクトルと共鳴極

件下で示されている (図 3)．(1) $E_0(g)$ は任意の g で固有値である．つまり任意の g で H_{N} の基底状態が存在する．(2) $|g|\ll 1$ のとき E_j，$j\geq 1$, の実軸上の近傍に固有値は存在しない．(3) E_j，$j\geq 1$, の複素下半平面上のある近傍に共鳴極が存在する．

3.2 基底状態の存在

Massless 模型の基底状態の存在に関する結果を紹介する．$\omega_{\mathrm{N}}(k)=\omega_{\mathrm{PF}}(k)=\omega(k)=|k|$ とする．

3.2.1 結合定数が小さな場合

自己共役作用素 T に対して $\sigma_{\mathrm{gap}}(T)=\inf\sigma_{\mathrm{ess}}(T)-\inf\sigma(T)$ を T の**スペクトルギャップ**とよぶ．$\#=\mathrm{N},\mathrm{PF}$ とする．結合定数は H_{N}, H_{PF} ともに e で表し，$H_0=H_{\mathrm{p}}+d\Gamma(\omega)$，$H_\#=H_0+eH_{\mathrm{I}\#}$ とおく．はじめに**仮想質量** $\nu>0$ を導入して $H_\#$ で $\omega_\#(k)$ を $\sqrt{|k|^2+\nu^2}$ で置き換えたものを $H_{\#_\nu}$ とおく．$H_{\#_\nu}$ の基底状態 φ_{g_ν} の存在は示すことができる．例えば，格子近似による方法 [13], [20], 弱収束列の正値性を示す方法 [43]，$E(H_{\#_\nu})$ の近傍に台をもった $\chi\in C_0^\infty$ で $\chi(H_{\#_\nu})$ がコンパクト作用素であることを示す方法 [40] などがある．また $\varphi_{\mathrm{g}_\nu}\in D(1\otimes N^{1/2})$ もわかる．$\|\varphi_{\mathrm{g}_\nu}\|=1$ と正規化し $\{\nu\}$ の部分列 $\{\nu'\}$ で $\mathrm{w}-\lim_{\nu'\to 0}\varphi_{\mathrm{g}_{\nu'}}=\varphi_{\mathrm{g}}$ となるものを選ぶ．ただし，$\varphi_{\mathrm{g}}=0$ かもしれない．

補題 3.3 (Arai–Hirokawa [13]) $\varphi_{\mathrm{g}}\neq 0$ ならば φ_{g} は $H_\#$ の基底状態である．

部分列 $\{\nu'\}$ を改めて $\{\nu\}$ と書く．自己共役作用素 T に対して $\mathrm{Ker}(T-E(T))$ への射影作用素を P_T と書く．$1\otimes N+1\otimes P_{d\Gamma(\omega)}\geq 1$ なので

$$(\varphi_{\mathrm{g}_\nu},(P_{H_{\mathrm{p}}}\otimes P_{d\Gamma(\omega)})\varphi_{\mathrm{g}_\nu})\geq 1-\|(1\otimes N^{1/2})\varphi_{\mathrm{g}_\nu}\|^2-\|(P_{H_{\mathrm{p}}}^{\perp}\otimes P_{d\Gamma(\omega)})\varphi_{\mathrm{g}_\nu}\|^2$$

が従う．ほとんどいたるところの $k \in \boldsymbol{R}^3$ で定義された作用素 $T_\#(k)$ を次式で定義する：

$$(a^\dagger(\bar{f})\Psi, H_{\mathrm{I}\#}\Phi) - (H_{\mathrm{I}\#}\Psi, a(f)\Phi) = \int_{\boldsymbol{R}^3} f(k)(\Psi, T_\#(k)\Phi)\, dk, \quad \Psi, \Phi \in D(H_\#).$$

定理 3.4 (Hiroshima [65]) φ_{g} を $H_\#$ の任意の基底状態とする．このとき

$$\varphi_{\mathrm{g}} \in D(1 \otimes N^{1/2}) \Longleftrightarrow \int_{\boldsymbol{R}^3} \|(H_\# - E(H_\#) + \omega(k))^{-1} T_\#(k)\varphi_{\mathrm{g}}\|^2\, dk < \infty.$$

さらに，上の両辺のどちらかが成り立てば

$$\|(1 \otimes N^{1/2})\varphi_{\mathrm{g}}\|^2 = e^2 \int_{\boldsymbol{R}^3} \|(H_\# - E(H_\#) + \omega(k))^{-1} T_\#(k)\varphi_{\mathrm{g}}\|^2\, dk.$$

定理 3.4 の等式から $\|(1 \otimes N^{1/2})\varphi_{\mathrm{g}_\nu}\|^2 \le e^2 C_1$ が示せ，$\sigma_{\mathrm{gap}}(H_{\mathrm{p}}) > 0$ から $\|(P_{H_{\mathrm{p}}}^{\perp} \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\varphi_{\mathrm{g}_\nu}\|^2 < e^2 C_2$ が示せる．ここで C_1, C_2 は定数である．ゆえに，$|e| \ll 1$ のとき ν に関して一様に

$$(\varphi_{\mathrm{g}_\nu}, (P_{H_{\mathrm{p}}} \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\varphi_{\mathrm{g}_\nu}) > 0 \tag{1}$$

となる．ここで $P_{H_{\mathrm{p}}} \otimes P_{d\Gamma(\omega)}$ が有限次元 (finite rank) 作用素であるから (1) で $\nu \to 0$ とすれば $(\varphi_{\mathrm{g}}, (P_{H_{\mathrm{p}}} \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\varphi_{\mathrm{g}}) > 0$ がわかる．特に $\varphi_{\mathrm{g}} \neq 0$ である．

定理 3.5 スペクトルギャップが $\sigma_{\mathrm{gap}}(H_{\mathrm{p}}) > 0$ と仮定する．(1) $\hat{\varphi}/\omega^{3/2} \in L^2(\boldsymbol{R}^3)$ のとき，定数 e_0 が存在して，$|e| < e_0$ のとき H_{N} の基底状態が存在する．(2) 定数 e_* が存在して，$|e| < e_*$ のとき H_{PF} の基底状態が存在する．(3) $\varphi_{\mathrm{g}} \in D(1 \otimes N^{1/2})$.

定理 3.5 の詳しい証明は例えば Arai–Hirokawa [13]，Bach–Fröhlich–Sigal [20], [21]，Hiroshima [56], [59] を参照せよ．

注意 3.6 (1) H_{N} で $\|(1 \otimes N^{1/2})\varphi_{\mathrm{g}_\nu}\|^2 \le e^2 C_1 \cdots (*)$ となるためには赤外正則条件が必要である．(2) Bach–Fröhlich–Sigal [21] は H_{PF} に対して赤外特異条件下で $(*)$ を示した．

Hirokawa [50] は $H_{\mathrm{PF}}^{\mathrm{dip}}$ に対しても赤外特異条件下で $(*)$ が成り立つことを示した．Arai–Hirokawa [14] は $E(H_{\#_\nu})$ の ν に関する右微分可能性から，基底状態が存在するための十分条件を示した．

3.2.2 任意の結合定数への拡張

(Nelson 模型) $\phi_t := e^{-tH_{\mathrm{N}}}(f \otimes \Omega)/\|e^{-tH_{\mathrm{N}}}(f \otimes \Omega)\|_{\mathscr{F}_{\mathrm{N}}}$，$f \ge 0$，$(f \not\equiv 0)$，とする．このとき次の補題が成り立つ．

補題 3.7 $\varphi_{\mathrm{g}} = \mathrm{w} - \lim_{t\to\infty} \phi_t \neq 0$ ならば φ_{g} は H_{N} の基底状態である．

$\sigma_{\mathrm{gap}}(H_{\mathrm{p}}) > 0$ を仮定する．$E_T(\cdot)$ は自己共役作用素 T のスペクトル射影作用素とする．$R = E_{H_{\mathrm{p}}}([E(H_{\mathrm{p}}), \Sigma(H_{\mathrm{p}}) - \delta])$ とおく．ここで $\Sigma(H_{\mathrm{p}}) = \inf \sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mathrm{p}})$，$\delta > 0$ は十分小さな数である．$(\phi_t, (e^{-\tau H_{\mathrm{p}}} \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\phi_t)$ の汎関数積分表示を用いて，

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, (R \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\varphi_{\mathrm{g}}) = \liminf_{t\to\infty}(\phi_t, (R \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\phi_t) \ge e^{-\tau E(H_{\mathrm{p}}) - g^2 \ell(\tau)} - e^{-\tau(\Sigma(H_{\mathrm{p}}) - \delta)} \tag{2}$$

を示せる．ここで $\ell(\tau)$ は具体的に与えられる正の数である．特に $\Sigma(H_{\mathrm{p}}) = \infty$ のとき，任意の g で $\varphi_{\mathrm{g}} \neq 0$ となるから次の定理を得る．

定理 3.8 (Spohn [93]) $\Sigma(H_{\mathrm{p}}) = \infty$ のとき H_{N} の基底状態は任意の g で存在する．

Gérard [40] は H_{p} のリゾルベントがコンパクト作用素であるという仮定の下，定理 3.8 の関数解析的な別証明を与えた．

(Pauli–Fierz 模型) $H_{\mathrm{PF}}(N)$ のポテンシャルが $V = \sum_{j=1}^{N} v(x_j)$ と $I = \sum_{i \neq j} w(x_i - x_j)$ の和で表せるとする．$H_{\mathrm{PF}}(N)$ の 1 体ポテンシャル V を強調して $E(H_{\mathrm{PF}}(N)) = E^V(N)$ とおく．

$$E^V(N) < \min\{E^V(N') + E^0(N-N'),\ 0 \le N' < N\} \quad (\text{ただし } E^V(0)=0) \tag{3}$$

は **Binding 条件** [43] とよばれている．任意の e で Binding 条件を仮定する．このとき仮想質量 $\nu > 0$ を導入した $H_{\mathrm{PF}\nu}$ の正規化された基底状態 $\varphi_{\mathrm{g}_\nu} = \oplus_{n=0}^\infty \varphi_{\mathrm{g}_\nu}^{(n)} \in \oplus_{n=0}^\infty L^2(\boldsymbol{R}^{3N} \times \boldsymbol{R}^{3n} \times \{1,2\}^n)$ が任意の e に対して存在し，

$$\varphi_{\mathrm{g}_{\nu,j}}^{(n)} \in W^{1,p}(D), \quad \sup_\nu \|\varphi_{\mathrm{g}_{\nu,j}}^{(n)}\|_{W^{1,p}(D)} < \infty, \quad j \in \{1,2\}^n,$$

となることが示される ([83] に注意)．ここで $W^{1,p}(D)$ はある有界開集合 $D \subset \boldsymbol{R}^{3N} \times \boldsymbol{R}^{3n}$ 上の Sobolev 空間である．φ_{g_ν} の部分列で $\varphi_{\mathrm{g}} = \mathrm{w} - \lim_{\nu' \to 0} \varphi_{\mathrm{g}_{\nu'}}$ となるものを選ぶ．部分列を改めて φ_{g_ν} とおく．このとき Rellich–Kondrachov の定理から $\nu \to 0$ のとき $\varphi_{\mathrm{g}_{\nu,j}}^{(n)}$ が $\varphi_{\mathrm{g},j}^{(n)}$ に $L^q(D)$ で強収束することがわかる．ここで $1 \le q \le 3p(N+n)/\{3(N+n)-p\}$ である．適当に p をとれば $q=2$ とできる．このことと，$\varphi_{\mathrm{g}} \in D(1 \otimes N^{1/2})$，$\varphi_{\mathrm{g}} \in D(e^{|x|} \otimes 1)$ を用いて，φ_{g_ν} が $\nu \to 0$ のとき φ_{g} に強収束することが示される．特に $\varphi_{\mathrm{g}} \neq 0$ だから，補題 3.3 より φ_{g} は H_{PF} の基底状態である．

定理 3.9 (Griesemer–Lieb–Loss [43])　任意の e で Binding 条件を仮定する．このとき任意の e で $H_{\mathrm{PF}}(N)$ の基底状態が存在する．

一般に Binding 条件をチェックすることは容易ではない．$N=1$ のときは [43] でチェックされた．つまり $E^0(1) - E^V(1) > 0$ が e に関して一様に成り立つことを示した．Barbaroux–Chen–Vugalter [23] は $N=2$, $|e| \ll 1$ のとき Binding 条件をチェックした．Lieb–Loss [82] は具体的な N 体 Coulomb ポテンシャル (電子の数 N，核子の数 Z) で $N < Z+1$, $e \in \boldsymbol{R}$, で Binding 条件をチェックした．

3.2.3 Enhanced binding

基底状態の存在を示す上で $\sigma_{\mathrm{gap}}(H_{\mathrm{p}}) > 0$ は重要な仮定であった．$\sigma_{\mathrm{gap}}(H_{\mathrm{p}}) > 0$ のとき $E(H_{\mathrm{p}})$ は離散固有値であるから H_{p} は基底状態 f をもつ．よって $f \otimes \Omega$ は非結合ハミルトニアンの基底状態になる．ここで次の問題を考察する．$\sigma_{\mathrm{gap}}(H_{\mathrm{p}}) = 0$ のとき，つまり結合定数 $=0$ で基底状態が必ずしも存在しないとき，全ハミルトニアンの基底状態が存在することがあるのだろうか？ 実際 $V \le 0$ のポテンシャルが $a_3 \int_{\boldsymbol{R}^3} |mV(x)|^{3/2}\,dx < 1$ をみたすとき Lieb–Thirring 不等式 [84] より H_{p} の基底状態は存在しない．ここで a_3 は V に依らない定数である．

定理 3.10 (Hiroshima–Spohn [70])　$\hat{\varphi}/\omega^{3/2}, \hat{\varphi}/\omega^{5/2} \in L^2(\boldsymbol{R}^3)$ とする．次の条件 (1), (2) を仮定する．(1) $V \in C^1(\boldsymbol{R}^3)$，$\nabla V \in L^\infty(\boldsymbol{R}^3)$，(2) $\mu_0 \ge 1$，$r_0 > 0$ は次をみたす．任意の $\eta > \mu_0$ に対して $E((2m)^{-1}p^2 + \eta V) \le -r_0$ かつ $\inf \sigma_{\mathrm{ess}}((2m)^{-1}p^2 + \eta V) = [0, \infty)$．このとき，ある定数 $e_{**} > 0$ が存在して $|e| > e_{**}$ のとき $H_{\mathrm{PF}}^{\mathrm{dip}}$ の基底状態が存在する．

注意 3.11　定理 3.10 で $\sigma_{\mathrm{gap}}(H_{\mathrm{p}}) > 0$ と $e=0$ での $H_{\mathrm{PF}}^{\mathrm{dip}}$ の基底状態の存在は仮定していない．

この現象は **Enhanced binding** とよばれている．Enhanced binding の発見法的理解は次のようなものである．‘質量 m の電子と輻射場が相互作用すれば電子にまとわりついた光子の雲により，見かけの電子の質量は $m_{\mathrm{eff}} = m + \delta m$ になる．そのハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{p}}^{\mathrm{eff}} = (2m_{\mathrm{eff}})^{-1} p^2 + V$$

のように補正をうける．$|e| \uparrow \infty$ のとき $m_{\mathrm{eff}} \uparrow \infty$ となり $|e| \gg 1$ のとき H_{p} に基底状態が存在しなくても，$H_{\mathrm{p}}^{\mathrm{eff}}$ に基底状態が現れる．’

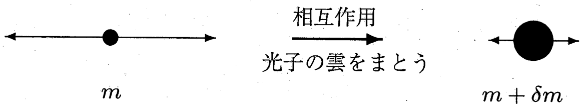

図 4：Enhanced binding

Arai–Kawano [18] は GSB 模型で Enhanced binding の存在を証明した．[18] には紫外切断に関する Enhanced binding の議論もある．Hiroshima [63] も参照のこと．双極子近似を導入しない H_{PF} の Enhanced binding は Catto–Hainzl [29]，Chen–Vougalter–Vugalter [31]，Hainzl [47]，Hainzl–Vougalter–Vugalter [48] らによって部分的に示されている．ただし，彼等は [43] の Binding 条件 $(\mathrm{N}=1)$ を $|e|\ll 1$ でチェックして H_{PF} の Enhanced binding を証明している．その結果 Enhanced binding が起きる結合定数は $e\neq 0$ だが十分小さいという仮定がつく．技術的困難はあるが $|e|\gg 1$ で基底状態は安定するだろうと筆者は予想している．この解析には新しいアイデアが必要であろう．

3.2.4 切断のない H_{N} の基底状態の存在

2 粒子系の Nelson 模型で 1 つの粒子の質量が無限大で原点に固定されているとする．$\hat{\varphi}=\hat{\varphi}_{\Lambda\kappa}$ としよう．$L^2(\boldsymbol{R}^3)\otimes\mathscr{F}_{\mathrm{b}}(L^2(\boldsymbol{R}^3))$ 上に全ハミルトニアンは

$$H_{\mathrm{N}}^{(2)}=\frac{1}{2m}p^2\otimes 1+1\otimes d\Gamma(\omega)+gZ1\otimes\phi_{\hat{\varphi}}(0)+g\phi_{\hat{\varphi}}$$

で与えられる．ここで $Z>0$ は定数である．$R_\Lambda=g^2\int_{\boldsymbol{R}^3}|\hat{\varphi}(k)|^2\big(\beta(k)+Z^2/\omega(k)\big)/(2\omega(k))\,dk$，$\beta(k)=(|k|+|k|^2/2)^{-1}$ とおけば，ユニタリー作用素 $U_{\Lambda,\kappa}$ ($U_{\Lambda,\kappa}$ は $\kappa=0$ で定義されない) が存在してリゾルベントの意味で一様に

$$\lim_{\kappa\to 0}\lim_{\Lambda\to\infty}U_{\Lambda,\kappa}^{-1}(H_{\mathrm{N}}^{(2)}+R_\Lambda)U_{\Lambda,\kappa}={}^{\exists}H_{\infty,0}$$

となることが Nelson [88] と同様に示せる．

定理 3.12 (Hirokawa–Hiroshima–Spohn [53]) $|g|\ll 1$ $(g\neq 0)$ のとき $H_{\infty,0}$ の基底状態が存在する．

(1) この定理は多くの重要な結果を内包している．まず $g=0$ で $H_{\infty,0}$ に基底状態が存在しないので Enhanced binding が起きている．また Nelson 模型は $\kappa=0$ で基底状態が存在しないことがわかっている (3.3 節を参照せよ)．$H_{\infty,0}$ は基底状態が存在するような別の表現へ移ったと考えられる．これは Arai [8]，Lőrinczi–Minlos–Spohn [86] に対応した事実である．(2) Ammari [1] は 紫外切断を外した massive Nelson 模型でスペクトルの下限が離散固有値であることを示した．

3.3 赤外発散と基底状態の非存在

赤外特異条件下で基底状態は存在しないと発見法的に考えられていた．しかし，前節で紹介したように H_{PF} には赤外特異条件下でも基底状態が存在している．そこで赤外特異条件と基底状態の非存在の関係を数学的に把握することは非常に重要な問題となる．

定理 3.13 (Arai–Hirokawa–Hiroshima [16], [17]) H_{GSB} で $\omega_{\mathrm{GSB}}(k)=|k|$，$\hat{\varphi}/\omega_{\mathrm{GSB}}{}^{3/2}\notin L^2(\boldsymbol{R}^3)$ とする．このとき次の (1) と (2) をみたす H_{GSB} の基底状態 φ_{g} は存在しない．(1) $\varphi_{\mathrm{g}}\in D(1\otimes N^{1/2})$，(2) $\sum_{j=1}^{J}(\varphi_{\mathrm{g}},(B_j\otimes 1)\varphi_{\mathrm{g}})_{\mathscr{F}_{\mathrm{GSB}}}\neq 0$.

注意 3.14 [16], [17] では一般の H_{GSB} が解析されている．さらに固有ベクトルの非存在も議論されている．

Nelson 模型では赤外正則条件下で基底状態の存在が証明されている．それでは赤外特異条件下では基底状態は存在するのだろうか．結論をいえば非存在である．これは H_{PF} の性質と大きく異なる点である．H_{N} の基底状態の非存在をはじめて証明したのは，Lőrinczi–Minlos–Spohn [85] である．

定理 3.15 (Lőrinczi–Minlos–Spohn [85]) V は 次の (1), (2) のいずれかをみたすとする．(1) $V(x)=C|x|^{2s}+o(|x|^{2s})$, $s>1$. (2) V は Kato クラスで $V(x)>C|x|^s$, $s>0$. このとき $\hat{\varphi}/\omega^{3/2}\notin L^2(\boldsymbol{R}^3)$ であれば H_{N} の基底状態は任意の g で存在しない．

(1) Lőrinczi–Minlos–Spohn [85] は汎関数積分表示を用いて定理 3.15 を証明した．H_{p} のリゾルベントがコンパクト作用素のときは Dereziński–Gérard [33] が関数解析的な手法で別証明を与えた．また，V が Coulomb ポテンシャルのときは Hirokawa [51] が証明した．さらに Hirokawa [52] は一般的な模型 (Nelson 模型，GSB 模型を含む) で赤外特異条件と基底状態の非存在の関係を明らかにした．

(2) Arai [8] は赤外特異条件のときでも**非 Fock 空間**で表現した H_{N} には基底状態が存在することを示した．Lőrinczi–Minlos–Spohn [86] は $C(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^3\times\mathscr{S}'(\boldsymbol{R}^3))$ 上に，ある Markov 過程を構成し，それが生成する自己共役作用素 $H_{\mathrm{N}}^{\mathrm{euc}}$ が Arai [8] が構成した非 Fock 空間上の H_{N} とユニタリー同値，$H_{\mathrm{N}}-E(H_{\mathrm{N}})\cong H_{\mathrm{N}}^{\mathrm{euc}}$, であることを示した．

3.4 Gibbs 測度

赤外正則条件 $\hat{\varphi}/\omega^{3/2}\in L^2(\boldsymbol{R}^3)$ を仮定しよう．$\phi_t=e^{-tH_{\mathrm{N}}}(f\otimes\Omega)/\|e^{-tH_{\mathrm{N}}}(f\otimes\Omega)\|_{\mathscr{F}_{\mathrm{N}}}$, $f\geq 0$, とする．このとき H_{N} の基底状態 φ_{g} が存在して

$$(\varphi_{\mathrm{g}},(1\otimes e^{-\beta N})\varphi_{\mathrm{g}})_{\mathscr{F}_{\mathrm{N}}}=\lim_{t\to\infty}(\phi_t,(1\otimes e^{-\beta N})\phi_t)_{\mathscr{F}_{\mathrm{N}}}$$

となることが示される．$(\phi_t,(1\otimes e^{-\beta N})\phi_t)_{\mathscr{F}_{\mathrm{N}}}$ を汎関数積分表示して $t\to\infty$ の極限操作を行えば，$C(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^3)$ 上のある確率測度 μ_{Gibbs} が存在して

$$(\varphi_{\mathrm{g}},(1\otimes e^{-\beta N})\varphi_{\mathrm{g}})_{\mathscr{F}_{\mathrm{N}}}=\int_{C(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^3)}e^{-(g^2/2)(1-e^{-\beta})F_\infty(q)}\,d\mu_{\mathrm{Gibbs}}(q) \tag{4}$$

と表せることが [26] で示された．ここで

$$F_\infty(q)=\int_{-\infty}^0 ds\int_0^\infty dt\int_{\boldsymbol{R}^3}e^{-|t-s|\omega(k)}e^{ik(q(s)-q(t))}\frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)}dk$$

は**2 重ポテンシャル**とよばれ $|F_\infty(q)|\leq\|\hat{\varphi}/\omega^{3/2}\|^2_{L^2(\boldsymbol{R}^3)}<\infty$ をみたす．μ_{Gibbs} は**無限体積 Gibbs 測度**とよばれる．$(\varphi_{\mathrm{g}},(1\otimes e^{-\beta N})\varphi_{\mathrm{g}})_{\mathscr{F}_{\mathrm{N}}}$ の β は (4) の右辺により複素平面上に解析接続できる．

定理 3.16 (Betz–Hiroshima–Lőrinczi–Minlos–Spohn [26]) $\hat{\varphi}/\omega^{3/2}\in L^2(\boldsymbol{R}^3)$ のとき任意の $\beta>0$ で $(\varphi_{\mathrm{g}},(1\otimes e^{\beta N})\varphi_{\mathrm{g}})_{\mathscr{F}_{\mathrm{N}}}<\infty$ が成り立つ．

$g=0$ のときの H_{N} の基底状態 $\varphi_{\mathrm{g}_0}=f\otimes\Omega$ (f は H_{p} の基底状態) のボゾンの個数は $(1\otimes N)\varphi_{\mathrm{g}_0}=0$ なのでゼロである．定理 3.16 は基底状態に含まれるボゾンの個数が任意の g に対しても非常に少ないことを示している．(4) から

$$(\varphi_{\mathrm{g}},(1\otimes N)^p\varphi_{\mathrm{g}})_{\mathscr{F}_{\mathrm{N}}}=\int_{C(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R}^3)}\left(\frac{g^2}{2}\right)^p(F_\infty(q))^p\,d\mu_{\mathrm{Gibbs}}(q)$$

となることがわかる．特に

$$-a+b\left\|\frac{\hat{\varphi}}{\omega^{3/2}}\right\|^2_{L^2(\boldsymbol{R}^3)}\leq(\varphi_{\mathrm{g}},(1\otimes N)\varphi_{\mathrm{g}})_{\mathscr{F}_{\mathrm{N}}}\leq\left(\frac{g^2}{2}\right)\left\|\frac{\hat{\varphi}}{\omega^{3/2}}\right\|^2_{L^2(\boldsymbol{R}^3)}$$

となる正の定数 a, b が存在することがわかる．

定理 3.17 (Betz–Hiroshima–Lőrinczi–Minlos–Spohn [26]) 次が成り立つ：

$$\lim_{\|\hat{\varphi}/\omega^{3/2}\|\to\infty}(\varphi_{\rm g},(1\otimes N)\varphi_{\rm g})_{\mathscr{F}_{\rm N}}=\infty.$$

定理 3.15 と定理 3.17 から Nelson 模型では赤外発散が基底状態の非存在とボゾン粒子数期待値の発散をまねくことが数学的に証明されたことがわかるだろう．他の模型でも基底状態 $\varphi_{\rm g}$ が $\varphi_{\rm g}\in D(1\otimes e^{\beta N})$ をみたすことが証明されている．Gross [45] は massive ポーラロン模型で，Spohn [91] はスピン-ボゾン模型でこれを示した．Hiroshima [62] は $H^0_{\rm PF}$ の基底状態 $\varphi_{\rm g}$ が $\varphi_{\rm g}\in\bigcap_{k=1}^\infty D(1\otimes N^{k/2})$ であることを示した．$\varphi_{\rm g}\in D(1\otimes e^{\beta N})$ は散乱理論 (基底状態への緩和現象) で重要な役目を果たす．詳しくは Hübner–Spohn [77, Proposition 8] を参照せよ．Hirokawa [51] は定理 3.17 の関数解析的手法による別証明を与えた．

3.5 Schrödinger 表現と汎関数積分表示

ユークリッド的場の理論を応用して $(\Psi,e^{-tH^0_{\rm PF}}\Phi)_{\mathscr{F}^0_{\rm PF}}$ を汎関数積分表示することができる．以下 $\#=3,4$ を表す．$(Q_\#,d\nu_\#)$ を確率空間，$(\phi_\#(f),f\in\oplus^3L^2_{\rm real}(\boldsymbol{R}^\#))$ を $f\in\oplus^3L^2_{\rm real}(\boldsymbol{R}^\#)$ を指標にもつ平均が 0，共分散が

$$\int_{Q_\#}\phi_\#(f)\phi_\#(g)\,d\nu_\#(\phi_\#)=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1,2,3}(d_{\mu\nu}\hat{f}_\mu,\hat{g}_\nu)_{L^2(\boldsymbol{R}^\#)}$$

の Gauss 型確率超過程とする．ここで $d_{\mu\nu}(k)=\delta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/|k|^2$ は**横断的デルタ関数**とよばれる．また，ユニタリー作用素 $\mathscr{U}:\mathscr{F}_{\rm b}(L^2_{\rm ph})\to L^2(Q_3)$ で

$$\phi_3(\oplus_\nu\delta_{\mu\nu}\lambda(\cdot-x))=\mathscr{U}A_{\hat{\varphi}}(x)_\mu\mathscr{U}^{-1},\quad \mu=1,2,3$$

となるものが存在する．ここで $\lambda=(\hat{\varphi}/\sqrt{\omega})\check{}$ である．$j_t:L^2(\boldsymbol{R}^3)\to L^2(\boldsymbol{R}^4)$ は $j_t^*j_s=e^{-|t-s|\omega}$ をみたし，$J_t:L^2(Q_3)\to L^2(Q_4)$ は $\mathscr{F}_{\rm b}(L^2_{\rm ph})$ と $L^2(Q_3)$ の同一視の下 $J_s^*J_t\cong e^{-|s-t|d\Gamma(\omega)}$ をみたす，各々等長作用素の族である．このような確率空間，Gauss 超過程，ユニタリー作用素，等長作用素の族は具体的に構成することができる ([55])．dP を $C([0,\infty);\boldsymbol{R}^3)$ 上の Wiener 測度，$(B(s))_{s\ge0}$ を 3 次元 Brown 運動で $P(B(0)=0)=1$，$X_s=x+B(s)$，$W=C([0,\infty);\boldsymbol{R}^3)\times\boldsymbol{R}^3$，$dX=dP\otimes dx$，$K(t)=\oplus_\mu\int_0^tj_s\lambda(\cdot-X_s)\,dB_\mu(s)$ は $\oplus^3L^2(\boldsymbol{R}^4)$-値確率積分とする．$\mathscr{F}^0_{\rm PF}\cong\int^\oplus_{\boldsymbol{R}^3}L^2(Q_3)\,dx$ の同一視の下で次の定理を得る．

定理 3.18 (Hiroshima [55]) 次式が成り立つ：

$$(\Psi,e^{-tH^0_{\rm PF}}\Phi)_{\mathscr{F}^0_{\rm PF}}=\int_We^{-\int_0^tV(X_s)ds}(\Psi(X_0),J_0^*e^{-ie\phi_4(K(t))}J_t\Phi(X_t))_{L^2(Q_3)}dX. \qquad (5)$$

汎関数積分表示 (5) は Fefferman–Fröhlich–Graf [34]，Fröhlich–Park [37]，Haba [46] でも議論されている．定理 3.18 から次の系が従う．

系 3.19 (Hiroshima [54], [55]) $E(H_{\rm p})\le E(H^0_{\rm PF})$.

系 3.19 の不等式は**反磁性的不等式**とよばれており，輻射場と相互作用すれば基底状態のエネルギーが下がらないことを示している．$H_{\rm N}$ の場合は適当な条件下で $E(H_{\rm N})\le E(H_{\rm p})$ となる．

Carmona の評価 [28] を (5) へ応用すれば $H^0_{\rm PF}$ の基底状態の**空間的指数的減衰性**を示すことができる．

系 3.20 (Hiroshima [60]) $V=Z+W$ は次をみたすと仮定する．(i) $\inf Z>-\infty$，$Z\in L^1_{\rm loc}(\boldsymbol{R}^3)$, (ii) $W<0$，$W\in L^p(\boldsymbol{R}^3)$，$p>3/2$．このとき $H^0_{\rm PF}$ の正規化された基底状態 $\varphi_{\rm g}$ は次をみ

たす．(1) $Z(x) \geq c|x|^{2n}$ ($|x| \gg 1$) ならば $\|\varphi_{\mathrm{g}}(x)\|_{L^2(Q_3)} \leq c_1 e^{-c_2|x|^{n+1}}$．(2) $\liminf_{|x|\to\infty} Z(x) > E(H^0_{\mathrm{PF}})$ ならば $\|\varphi_{\mathrm{g}}(x)\|_{L^2(Q_3)} \leq c_1 e^{-c_2|x|}$．ここで c, c_1, c_2 は適当な定数である．

基底状態の空間的指数的減衰性は全く異なる方法で [20], [26], [43] でも証明されている．

3.6 基底状態の多重度

離散固有値の多重度の評価には **min-max 原理**が知られている．しかし，場の理論に現れる固有値は一般には離散固有値でないために多重度を評価するのは容易ではない．

定義 3.21 (M, dm) を σ 有限な測度空間とする．$L^2(M)$ 上の有界作用素 T が，恒等的にゼロではない任意の非負関数 $f, g \geq 0$ に対して $(f, Tg)_{L^2(M)} > 0$ となるとき，T は**正値性改良型作用素**という．また $(f, Tg)_{L^2(M)} \geq 0$ となるとき**正値性保存型作用素**という．

補題 3.22 (Glimm–Jaffe [42]) $L^2(M)$ 上の自己共役作用素 K の熱半群 e^{-tK} が正値性改良型作用素であると仮定する．このとき K の基底状態が存在すれば一意的である．

補題 3.22 は有限次元の場合と同様に **Perron–Frobenius の定理**とよばれる．Glimm–Jaffe [42], Fröhlich [35], [36], Gross [44] は Perron–Frobenius の定理を用いて基底状態の一意性を示している．Bach–Fröhlich–Sigal [20] は $e^{-tH_{\mathrm{N}}}$ が適当な L^2 空間上で正値改良型作用素であることを示した．Pauli–Fierz 模型の場合は容易くない．以下 $\mathscr{F}^0_{\mathrm{PF}} \cong L^2(\boldsymbol{R}^3 \times Q_3, dx \otimes d\nu_3)$ と同一視する．$\Xi = (\Psi, e^{-tH^0_{\mathrm{PF}}}\Phi)_{\mathscr{F}^0_{\mathrm{PF}}}$，$\Psi, \Phi \geq 0$, の汎関数積分表示の被積分関数には $e^{-ie\phi_4(\cdots)}$ の項が現れるので $\Xi \in \boldsymbol{C}$ であり $\Xi > 0$ とはいえない．そこで発見法的な対応関係 $L^2(\boldsymbol{R}) \leftrightarrow \mathscr{F}^0_{\mathrm{PF}}$，$x \leftrightarrow \phi_4$，に着目する．$L^2(\boldsymbol{R})$ 上のフーリエ変換を $\boldsymbol{F}$ とすれば $\boldsymbol{F}^{-1}e^{ikx}\boldsymbol{F} = e^{ikp}$ であるから，$f, g \geq 0$ に対して $(f, \boldsymbol{F}^{-1}e^{ikx}\boldsymbol{F}g)_{L^2(\boldsymbol{R})} = \int_{\boldsymbol{R}} f(x)g(x+k)\,dx \geq 0$ が成り立つ．よって $\boldsymbol{F}^{-1}e^{ikx}\boldsymbol{F}$ は正値性保存型作用素である．$\mathscr{F}^0_{\mathrm{PF}}$ 上のユニタリー作用素 $\boldsymbol{F}_Q = 1 \otimes e^{i(\pi/2)N}$ は $L^2(\boldsymbol{R})$ 上のフーリエ変換 $\boldsymbol{F}$ に対応する．実際には $J_0^* \boldsymbol{F}_Q e^{-ie\phi_4(\cdots)} \boldsymbol{F}_Q^{-1} J_t$ が正値性保存型作用素どころか正値性改良型作用素であることが示される．結局

$$(\Psi, \boldsymbol{F}_Q e^{-tH^0_{\mathrm{PF}}} \boldsymbol{F}_Q^{-1} \Phi)_{\mathscr{F}^0_{\mathrm{PF}}} = \int e^{-\int_0^t V(X_s)ds} \Psi(X_0) J_0^* \boldsymbol{F}_Q e^{-ie\phi_4(\cdots)} \boldsymbol{F}_Q^{-1} J_t \Phi(X_t)\, dX d\nu_3 > 0$$

が従う．

定理 3.23 $e^{-tH_{\mathrm{p}}}$ が正値性改良型作用素とする．(1) (Bach–Fröhlich–Sigal [20]) H_{N} の基底状態が存在すれば一意的である．(2) (Hiroshima [57]) H^0_{PF} の基底状態が存在すれば一意的である．

注意 3.24 (1) 定理 3.23 は任意の結合定数で成り立つ．(2) 定理 3.23 では H_{p} の基底状態の存在は仮定していない．そのため $H^{\mathrm{dip}}_{\mathrm{PF}}$, H^0_{PF} の Enhanced binding で現れた基底状態も一意的であることがわかる．

次に H_{PF} の基底状態の多重度 $\mathrm{m}(H_{\mathrm{PF}})$ の評価について述べる．H_{PF} に対してはスピンの存在のために $e^{-tH_{\mathrm{PF}}}$ が正値性改良型作用素になるような L^2 空間を構成することが難しい．そこで次のような戦略をとる．Hiroshima [65] は H_{PF} の任意の基底状態 φ_{g} が

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, (P_{H_{\mathrm{p}}} \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\varphi_{\mathrm{g}}) \geq (1 - e^2 C)(\varphi_{\mathrm{g}}, \varphi_{\mathrm{g}})$$

をみたすことを示した．$\{\varphi_{\mathrm{g}}{}^j\}_j$ を $P_{H_{\mathrm{PF}}}\mathscr{F}$ の完全正規直交系とすれば，

$$\mathrm{m}(H_{\mathrm{PF}}) = \sum_j (\varphi_{\mathrm{g}}{}^j, \varphi_{\mathrm{g}}{}^j) \leq \frac{\sum_j (\varphi_{\mathrm{g}}{}^j, (P_{H_{\mathrm{p}}} \otimes P_{d\Gamma(\omega)})\varphi_{\mathrm{g}}{}^j)}{1 - e^2 C} \leq \frac{\mathrm{Tr}\, P_{H_{\mathrm{p}}}}{1 - e^2 C} = \frac{2}{1 - e^2 C}$$

が導かれる．ゆえに $|e| \ll 1$ のとき $\mathrm{m}(H_{\mathrm{PF}}) \leq 2$．また $V(x)=V(-x)$ のとき，$\Phi = f \otimes \Omega$, $f \in L^2(\boldsymbol{R}^3;\boldsymbol{C}^2)$ に対して $(\Phi, P_{H_{\mathrm{PF}}}\Phi) = \lim_{t\to\infty}(\Phi, e^{-t(H_{\mathrm{PF}}-E(H_{\mathrm{PF}}))}\Phi) = a(\Phi,\Phi)$, $a \neq 0$, が導かれるから，$P_{H_{\mathrm{p}}} P_{H_{\mathrm{PF}}} P_{H_{\mathrm{p}}} = a P_{H_{\mathrm{p}}}$ が従う（[71]）．$\mathrm{Tr}\, P_{H_{\mathrm{p}}} = 2$ なので，少なくとも $\mathrm{m}(H_{\mathrm{PF}}) = \mathrm{Tr}\, P_{H_{\mathrm{PF}}} \geq 2$ とならねばならない．

定理 3.25 (Hiroshima–Spohn [71]) $V(x)=V(-x)$ とする．$|e| \ll 1$ のとき $\mathrm{m}(H_{\mathrm{PF}}) = 2$．

Arai–Hirokawa [13] は massive GSB 模型で $E(H_{\mathrm{GSB}})$ が離散固有値のとき min-max 原理を応用して基底状態の多重度を評価した．Hiroshima [65] は一般のハミルトニアン $H_g = A + d\Gamma(\omega) + gH_{\mathrm{I}}$ に対して適当な条件の下 $\mathrm{m}(H_g) \leq \mathrm{m}(A)$ を示した．Arai–Hirokawa [15] は結合定数の大きさによって基底状態の多重度が変わる例を発見した．Hiroshima [60] は H_{PF}^0 が特異なポテンシャル V をもてば $\mathrm{m}(H_{\mathrm{PF}}^0) \geq 2$ となる例を見つけた．

3.7 共鳴極の存在と特異連続スペクトルの非存在

Massless 模型に対する共鳴現象の解析は Bach–Fröhlich–Sigal [19], [20] によって解決された．その結果の概略を Nelson 模型 $H_{\mathrm{N}} = H_0 + gH_{\mathrm{I,N}}$ で説明する．ポテンシャルを $V(x) = -1/|x|$ とする．**共鳴**の問題とは，次の (1) と (2) を示すことである．(1) ある稠密な定義域 D を定義し，任意の $\Psi, \Phi \in D$ に対し，$f(z) = (\Psi, (H_{\mathrm{N}} - z)^{-1}\Phi)$ が z について複素上半平面 $\boldsymbol{C}_+$ から複素下半平面 $\boldsymbol{C}_-$ へ解析接続できる．(2) $\boldsymbol{C}_-$ 上に $f(z)$ の極が存在する．この極が存在すればそれを**共鳴極**とよぶ．量子力学で共鳴を解析するための強力な方法のひとつが**複素伸張法** (complex dilation) である．場の理論における共鳴の解析は筆者の知る限り，現在までのところ，この複素伸張法を拡張した方法しかない．$\theta > 0$ としよう．$L^2(\boldsymbol{R}^3)$ の上のユニタリー作用素 u_θ を $u_\theta f = e^{3\theta/2} f(e^\theta \cdot)$ で定義し，$\mathscr{F}$ 上のユニタリー作用素 U_θ を $U_\theta = 1 \otimes \Gamma(u_\theta)$ で定義する．$H_{\mathrm{N}}(\theta) = U_\theta^{-1} H_{\mathrm{N}} U_\theta = H_0(\theta) + gH_{\mathrm{I,N}}(\theta)$ とおく．$f(z) = (U_\theta^{-1}\Psi, (H_{\mathrm{N}}(\theta) - z)^{-1} U_\theta^{-1}\Phi)$ であるから，f の解析接続性の解析は $(H_{\mathrm{N}}(\theta) - z)^{-1}$ の θ に関する解析接続性とその解析接続した作用素のスペクトルを調べることに帰着できる．

はじめに massive な場合を考えよう．$\nu > 0$ とする．このとき $\omega_\theta(k) = \sqrt{e^{-2\theta}|k|^2 + \nu^2}$ とすれば $H_0(\theta) = H_{\mathrm{p}} + d\Gamma(\omega_\theta)$ となるから，$H_0(\theta) \to H_0(i\theta) = H_{\mathrm{p}} + d\Gamma(\omega_{i\theta})$ と解析接続できることがわかる．

$$\sigma(d\Gamma(\omega_{i\theta})) = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{ \sum_{j=1}^{n} \sqrt{e^{-2i\theta} r_j + \nu^2} \;\middle|\; r_j \geq 0 \right\}$$

であるから，少なくとも $0 < \nu \ll 1$ のとき E_j が $H_0(i\theta)$ の離散固有値になることがわかる．よって命題 3.2 より，$\hat{\varphi}$ に適当な条件を付ければ $|g| \ll 1$ のとき $H_{\mathrm{N}}(i\theta)$ は E_j の近傍に離散固有値 $E_j^{(1)}(g), \ldots, E_j^{(r)}(g)$ をもち，これらが共鳴極になることが示される．このようなアイデアで Okamoto–Yajima [89] は massive Pauli–Fierz 模型の共鳴を解析した．

Massless 模型の場合は様相が一変する．$\nu = 0$ とする．このとき $H_0(\theta) = H_{\mathrm{p}} + e^{-\theta} d\Gamma(\omega)$ であるから，$H_0(\theta) \to H(i\theta) = H_{\mathrm{p}} + e^{-i\theta} d\Gamma(\omega)$ と解析接続できることがわかる．$\sigma(H_0(i\theta))$ は図 5 のようになる．特に E_j は埋蔵固有値になるので，$\nu > 0$ のときのような離散固有値の摂動理論が適用できない．しかし Bach–Fröhlich–Sigal [19], [20] は，**Feshbach 写像**の理論と**くりこみ群**のアイデアを巧みに用いて $\nu = 0$ の場合の共鳴極の存在を示した．

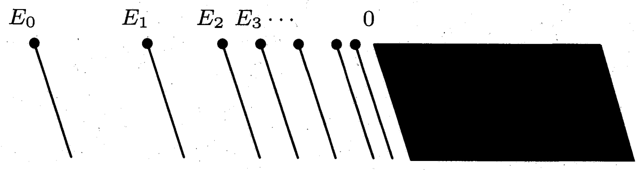

図 5：$\nu = 0$ のときの $\sigma(H_0(i\theta))$

射影作用素 P に対して，作用素 S の Feshbach 写像は $\overline{P} = 1 - P$ とおいて，

$$\mathscr{F}_P(S) = \{PSP - PS\overline{P}(\overline{P}S\overline{P})^{-1}\overline{P}SP\}\lceil_{\mathrm{Ran}\,P}$$

で定義される．ここで，$\mathscr{F}_P(S)$ が定義できることを示す必要がある．$\mathscr{F}_P(S)$ が定義されたときには，スペクトルの不変性 $z \in \sigma(S) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma(\mathscr{F}_P(S-z))$, $z \in \sigma_{\mathrm{p}}(S) \Longleftrightarrow 0 \in \sigma_{\mathrm{p}}(\mathscr{F}_P(S-z))$ が従う．さらに，$[P_1, P_2] = 0$ のとき，$\mathscr{F}_{P_1} \circ \mathscr{F}_{P_2} = \mathscr{F}_{P_1P_2}$ の群構造が現れる．特に $P_1P_2 = P_2P_1 = P_2$ のときは $\mathscr{F}_{P_1} \circ \mathscr{F}_{P_2} = \mathscr{F}_{P_2}$ という半群の性質が現れる．この Feshbach 写像のスペクトルの不変性と半群の性質を利用して，共鳴を解析するのが [19], [20] のアイデアである．E_j と $r > 0$ に対し，$P = E_{H_{\mathrm{p}}}(\{E_j\}) \otimes E_{d\Gamma(\omega)}([0,r))$ とおく．このとき，E_j を含む実軸上の十分小さな近傍を I_j，$0 < \epsilon$ を十分小さな定数とし，$D_j = I_j + i[-|g|^{2-\epsilon}, \infty)$ とする．このとき，$\boldsymbol{C}_-$ に含まれる流れ星形の集合 R_j が存在して，任意の $z \in D_j \setminus R_j$ に対し，$\{\mathscr{F}_P(H_{\mathrm{N}}(i\theta) - z)\}^{-1}$ が有界作用素であることが示される．Feshbach 写像のスペクトルの不変性より

$$D_j \setminus R_j \subset \rho(H_{\mathrm{N}}(i\theta))$$

がわかる．さらに，自己共役作用素ではない $H_{\mathrm{N}}(i\theta)$ の m 個の固有値 $E_j^{(1)}(g), \ldots, E_j^{(m)}(g)$ が $\boldsymbol{C}_-$ 上の E_j (多重度は m とする) の近傍に存在していて，それらが $f(z)$ の極になっていることも示される．ゆえに $f(z)$ が z に関して，D_j 内を動いて，$\boldsymbol{C}_+$ から $\boldsymbol{C}_-$ へ解析接続できることがわかる．

定理 3.26 (Bach–Fröhlich–Sigal [19], [20]) $|g| \ll 1$ と仮定する．このとき (1) $(\Psi, (H_{\mathrm{N}} - z)^{-1}\Phi)$ は E_j，$j \geq 1$, の十分小さな実軸上の近傍を通り $\boldsymbol{C}_+$ から $\boldsymbol{C}_-$ へ解析接続可能である．(2) E_j の $\boldsymbol{C}_-$ 内の近傍に $H_{\mathrm{N}}(\theta)$ の固有値 $E_j^{(1)}(g), \ldots, E_j^{(m)}(g)$ が存在する．(3) $E_j^{(1)}(g), \ldots, E_j^{(m)}(g)$ は共鳴極である．(4) $\lim_{g\to 0} E_j^{(k)}(g) = E_j$，$k = 1, \ldots, m$.

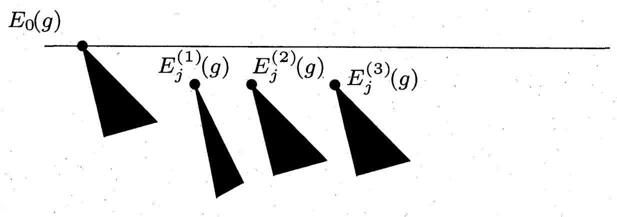

図 6：共鳴極 $E_j^{(k)}(g)$ を頂点とする流れ星形の内側に $\sigma(H_{\mathrm{N}}(i\theta))$ が含まれる

注意 3.27 (1) 定理 3.26 (2) で $E_j^{(k)}(g)$ はある写像 $\boldsymbol{C} \to \boldsymbol{C}$ の不動点として帰納的に与えられる．(2) $E_j^{(k)}(g)$ に対応する固有ベクトル $\varphi_{\mathrm{g}_j^{(k)}}$ は $(\psi_j^{(k)} \otimes \Omega, \varphi_{\mathrm{g}_j^{(k)}})_{\mathscr{F}_{\mathrm{N}}} \neq 0$ をみたす．ここで，$\psi_j^{(k)}$ は固有値 E_j に対応する H_{p} の固有ベクトルである．(3) [19], [20] では一般のハミルトニアンに対して共鳴を解析している．(4) Hiroshima [60] は特異なポテンシャル V に対して，H^0_{PF} の埋蔵固有値が共鳴極にならず，埋蔵固有値のまま残る例を構成した．

E_j の多重度が m のとき，一般に共鳴極は E_j の近傍で m 個現れる．$|\mathrm{Re}(E_j^{(k)}(g) - E_i^{(l)}(g))|$ が数

理物理学的観点から見た Lamb のずれである．

次の興味は，埋蔵固有値 E_j が共鳴極に変わった後に新たな固有値が現れるかどうかにある．

定理 3.28 (Bach–Fröhlich–Sigal–Soffer [22]) Δ を E_j を含む十分小さい区間，または $\Delta \subset [E_j, E_{j+1}]$ を E_j, E_{j+1} から十分離れた区間とする．$|e| \ll 1$ とする．このとき Δ に含まれる H_{PF}^0 のスペクトルは純粋絶対連続スペクトルである．

定理 3.28 は**正交換子法** (Mourre 評価 [87]) を用いて示された．Bach–Fröhlich–Sigal [21] は Feshbach 写像を用いた別証明を与えている．

3.8 散乱理論

3.8.1 漸近的生成消滅作用素の存在

散乱理論における Cook の方法は Høegh–Krohn [74]–[76] によって紫外切断なしの massive Nelson 模型に応用された．Cook の方法は massless Pauli–Fierz 模型にも応用される．

$H_{\mathrm{PF}} = H_0 + eH_{\mathrm{PF,I}}$ の漸近場について説明する．簡単のために，$\hat{\varphi} \in C^\infty(\boldsymbol{R}^3)$ と仮定する．

$$a_t^\sharp(f) = e^{itH_{\mathrm{PF}}}e^{-itH_0}a^\sharp(f)e^{itH_0}e^{-itH_{\mathrm{PF}}}$$

とおく．$a_\pm^\sharp(f) = s - \lim_{t\to\pm\infty} a_t^\sharp(f)$ が存在するとき $a_\pm^\sharp(f)$ を**漸近的生成消滅作用素**とよぶ．

定理 3.29 (Hiroshima [59]) $V(x) = |x|^2$, $|e| \ll 1$, $f \in C_0^\infty(\boldsymbol{R}^3 \setminus P)$ とする．ここで P は Lebesgue 測度ゼロの集合である．このとき $\Psi \in D(H_{\mathrm{PF}})$ に対して $s - \lim_{t\to\infty} a_t^\sharp(f)\Psi = a_\pm^\sharp(f)\Psi$ が存在する．

注意 3.30 (1) $a_\pm^\sharp(f)$ のテスト関数 f は $f, f/\sqrt{\omega} \in L^2(\boldsymbol{R}^3)$ となるものまで拡張される．(2) $a_\pm^\sharp(f)$ は正準交換関係をみたす．

$a_\pm^\sharp(f)$ の存在がわかれば Høegh–Krohn [74] に従って $\sigma_{\mathrm{gap}}(H_{\mathrm{PF}}) = 0$ が示される．φ_{g} を H_{PF} の基底状態とする．$\{\varphi_{\mathrm{g}}\} \cup \{a_\pm^\dagger(f_1)\cdots a_\pm^\dagger(f_n)\varphi_{\mathrm{g}} \mid f_j \in L_{\mathrm{ph}}^2,\ n \in \boldsymbol{N}\}$ で生成される部分空間の閉包を $\mathscr{F}_{\mathrm{asy}\pm}$ で表す．$W_\pm : \mathscr{F}_{\mathrm{asy}\pm} \to \mathscr{F}_{\mathrm{b}}$ を $W_\pm a_\pm^\dagger(f_1)\cdots a_\pm^\dagger(f_n)\varphi_{\mathrm{g}} = a^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(f_n)\Omega$ で定義し，線形に拡張すればユニタリー作用素になる．$\mathscr{F}_{\mathrm{asy}\pm}$ は H_{PF} を約し，次式をみたす：

$$W_\pm e^{it(H_{\mathrm{PF}}\lceil_{\mathscr{F}_{\mathrm{asy}\pm}})} = e^{it(d\Gamma(\omega)+E(H_{\mathrm{PF}}))}W_\pm.$$

特に $\mathscr{F}_{\mathrm{PF}} \cong \mathscr{F}_{\mathrm{asy}\pm} \oplus \mathscr{F}_{\mathrm{asy}\pm}^\perp$ の同一視の下 $H_{\mathrm{PF}} \cong (d\Gamma(\omega) + E(H_{\mathrm{PF}})) \oplus (H_{\mathrm{PF}}\lceil_{\mathscr{F}_{\mathrm{asy}\pm}})$ となることがわかる．

定理 3.31 (Hiroshima [59]) $V = |x|^2$ とする．$|e| \ll 1$ のとき H_{PF} の絶対連続スペクトルは $[E(H_{\mathrm{PF}}), \infty)$．特に $\sigma_{\mathrm{gap}}(H_{\mathrm{PF}}) = 0$.

Arai [6] は基底状態の存在を仮定せずに $\inf \sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mathrm{GSB}})$ の評価を行った．特に massless 模型に対して $\sigma_{\mathrm{gap}}(H_{\mathrm{GSB}}) = 0$ を証明した．Ammari [1] は紫外切断を外した massive Nelson 模型で $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_{\mathrm{N}}) = [E(H_{\mathrm{N}}) + \nu, \infty)$ を証明した．Dereziński–Gérard [33] は非 Fock 空間上の massless Nelson 模型の漸近的生成消滅作用素を構成した．

定理 3.29 は現実的な模型 $H_{\mathrm{PF}}(N)$ へ拡張されている．V は 1 体ポテンシャル v の和，I は 2 体ポテンシャルの和とする．$H_{\mathrm{PF}}(N)$ のポテンシャルが $V + I$ で表されるとしよう．

$$\Sigma := E(H_{\mathrm{PF}}(N-1)) + \liminf_{|x|\to\infty} v(x)$$

を **ionization threshold** という．

定理 3.32 (Fröhlich–Griesemer–Schlein [38]) テスト関数 h_j は次の不等式をみたすと仮定する．$E(H_{\rm PF}(N)) + \sum_{j=1}^n \sup\{|k| \mid h_j(k) \neq 0\} \leq \Sigma + (m/2)$．このとき適当な Ψ に対して次が存在する：

$$s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH_{\rm PF}(N)} e^{-itH_0} a^\sharp(h_1)\cdots a^\sharp(h_n) e^{itH_0} e^{-itH_{\rm PF}(N)}\Psi.$$

$\Psi_+ = a_+^\dagger(h_1)\cdots a_+^\dagger(h_n)\varphi_{\rm g}$ とおく．このとき Fröhlich–Griesemer–Schlein [38] は適当な有界作用素 A に対して $\lim_{t\to\infty}(\Psi_+, e^{itH_{\rm PF}(N)}Ae^{-itH_{\rm PF}(N)}\Psi_+) = (\varphi_{\rm g}, A\varphi_{\rm g})(\Psi_+,\Psi_+)$ を示した．これは**基底状態への緩和** (relaxation to the ground state) とよばれる．Spohn [92] は $H_{\rm PF}^{\rm dip}$ に対して基底状態への緩和を証明した．

3.8.2 漸近的完全性

(Rayleigh 散乱) $e^{-itH_{\rm PF}}\Psi$ はある時間が経過すれば光子を自発放射して固有状態へ緩和すると予想されている．$I: \mathscr{F}_{\rm PF}\otimes\mathscr{F}_{\rm b} \to \mathscr{F}_{\rm PF}$ を

$$I(\phi\otimes(a^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(f_n)\Omega) = a^\dagger(f_1)\cdots a^\dagger(f_n)\phi$$

とし，$\Omega_+: \mathscr{F}_{\rm PF}\otimes\mathscr{F}_{\rm b}\to\mathscr{F}_{\rm PF}$ を

$$\Omega_+ = s - \lim_{t\to\infty} e^{itH_{\rm PF}} I e^{-it(H_{\rm PF}\otimes 1 + 1\otimes d\Gamma(\omega))}(P_{\rm pp}(H_{\rm PF})\otimes 1)$$

で定義する．ここで，$P_{\rm pp}(H_{\rm PF})$ は $H_{\rm PF}$ の点スペクトルへの射影作用素である．

定義 3.33 $\mathrm{Ran}\,\Omega_+ \supset E_{H_{\rm PF}}((-\infty,\Sigma))\mathscr{F}_{\rm PF}$ が成り立つとき **Rayleigh 散乱は漸近的完全**であるという．

言い換えれば，Rayleigh 散乱が漸近的完全とは，任意の $\Psi\in E_{H_{\rm PF}}((-\infty,\Sigma))\mathscr{F}_{\rm PF}$ に対して固有状態 $\Phi_{\rm b}\in\mathscr{F}_{\rm PF}$，$H_{\rm PF}\Phi_{\rm b} = E\Phi_{\rm b}$，と光子だけの状態 $\phi\in\mathscr{F}_{\rm b}(L^2_{\rm ph})$ が存在して

$$e^{-itH_{\rm PF}}\Psi \cong e^{-itE}\Phi_{\rm b}\otimes_s e^{-itd\Gamma(\omega)}\phi,\quad t\to\infty,$$

となることである．これは $e^{-itH_{\rm PF}}\Psi$ が $t\to\infty$ で光を自発放射して固有状態へ緩和したと解釈される．Spohn [92] は $H_{\rm PF}^{\rm dip}$ $(N=1,\ \Sigma=\infty)$ の，Fröhlich–Griesemer–Schlein [39] は massive Nelson 模型 $(N\geq 1)$ の Rayleigh 散乱の漸近的完全性を証明した．

(S 行列) $S = W_-^* W_+ : \mathscr{F}_{\rm asy+}\to\mathscr{F}_{\rm asy-}$ を **S 行列**という．$\mathscr{F}_{\rm asy\pm} = \mathscr{F}_{\rm PF}$ であれば S は $\mathscr{F}_{\rm PF}$ 上のユニタリー作用素になる．Arai [4] は $H_{\rm PF}^{\rm dip}$ で $V = |x|^2$ のとき $\mathscr{F}_{\rm asy\pm} = \mathscr{F}_{\rm PF}$ を示した．

(漸近的完全) ある稠密な集合 $D\subset L^2_{\rm ph}$ が存在して $H_{\rm PF}$ の任意の固有状態 Φ に対して $a_\pm(f)\Phi = 0$，$f\in D$，となることは知られている．従って $\mathscr{K}_\pm = \{\Psi\in\mathscr{F}_{\rm PF}\mid a_\pm(f)\Psi = 0,\ f\in D\}$ とすれば，$P_{\rm pp}(H_{\rm PF})\mathscr{F}_{\rm PF}\subset\mathscr{K}_\pm$ がわかる．

定義 3.34 $P_{\rm pp}(H_{\rm PF})\mathscr{F}_{\rm PF} = \mathscr{K}_\pm$ のとき**漸近的完全**という．

Dereziński–Gérard [32] は massive Nelson 模型に対する漸近的完全性を証明した．Ammari [1] は [32] を紫外切断のない massive Nelson 模型へ拡張した．massless Nelson 模型に対する漸近的完全性については，Gérard [41] による部分的な結果がある．それによれば，ある部分集合 $\mathscr{F}_C^\pm\subset\mathscr{F}_{\rm N}$ が存在して $H_{\rm N}$ は $\mathscr{F}_C^\pm$ で約され $P_{\rm pp}(H_{\rm N}\lceil_{\mathscr{F}_C^\pm}) = \mathscr{K}_\pm\cap\mathscr{F}_C^\pm$ をみたす．

3.9 質量のくりこみ理論

赤外切断 $\hat\varphi = \hat\varphi_{\Lambda\kappa}$ を導入する．全運動量作用素を $P = p\otimes 1 + 1\otimes d\Gamma(k)$ で定義する．$H_{\rm PF}^0$ で

$V=0$ とおけば，$H_{\rm PF}^0$ は並進不変

$$[H_{\rm PF}^0, P_\mu]=0, \quad \mu=1,2,3,$$

となるから $\sigma(P)=\boldsymbol{R}^3$ 上で $\mathscr{F}_{\rm PF}^0=\int_{\sigma(P)}^{\oplus}\mathscr{F}(p)\,dp$, $H_{\rm PF}^0=\int_{\sigma(P)}^{\oplus}H_{\rm PF}^0(p)\,dp$ と分解できる．

$$\mathscr{F}(p)\cong\mathscr{F}_{\rm b}(L^2_{\rm ph}), \quad H_{\rm PF}^0(p)\cong\frac{1}{2m}(p-d\Gamma(k)-eA_{\hat\varphi}(0))^2+d\Gamma(\omega), \quad p\in\boldsymbol{R}^3,$$

が知られている．$E_{m,\Lambda}(p)=E(H_{\rm PF}^0(p))$ とおく．

補題 3.35 (Hiroshima–Spohn [71]) 定数 $p_*>0$, $e_*>0$ で次をみたすものが存在する．$(p,e)\in\{(p,e)\in\boldsymbol{R}^3\times\boldsymbol{R}\mid |p|<p_*,\ |e|<e^*\}$ に対して $H_{\rm PF}^0(p)$ には一意的な基底状態 $\varphi_{\rm g}(p)$ が存在し，$\varphi_{\rm g}(p)=\varphi_{\rm g}(p,e)$ は強解析的，$E_{m,\Lambda}(p)=E_{m,\Lambda}(p,e)$ は解析関数である．

定義 3.36 **有効質量** (effective mass) を次で定義する：

$$m_{\rm eff}=m_{\rm eff}(e^2,\Lambda,\kappa,m)=\Big(\frac{1}{3}\Delta_p E_{m,\Lambda}(p,e)\big\lceil_{p=0}\Big)^{-1}.$$

$m_{\rm eff}$ は直観的には $E_{m,\Lambda}(p)=E_{m,\Lambda}(0)+|p|^2/(2m_{\rm eff})+O(|p|^3)$ となるものである．**質量のくりこみ**とは

$$\lim_{\Lambda\to\infty}m_{\rm eff}(e^2,\Lambda,\kappa\Lambda^\beta,(b\Lambda)^\beta)=m_{\rm ph}$$

となる定数 $\beta<0$ と $0<b$ を見つけることである．ここで $m_{\rm ph}$ は与えられた定数で，物理的には電子の観測質量である．質量のくりこみでは $\Lambda\to\infty$ のときスケーリングされた質量 $(b\Lambda)^\beta$ は0へ，有効質量は観測質量へ収束する．$m_{\rm eff}/m$ が e^2, Λ/m, κ/m の関数であることがわかるので $m_{\rm eff}/m=f(e^2,\Lambda/m,\kappa/m)$ とおく．このとき，

$$\lim_{\Lambda\to\infty}\frac{f(e^2,\Lambda/m,\kappa/m)}{(\Lambda/m)^\gamma}=b_0$$

となる $0\le\gamma<1$, $0<b_0$ を見つけることを考える．もしあれば，

$$\beta=-\frac{\gamma}{(1-\gamma)}<0, \quad b=\frac{1}{b_1^{1/\gamma}}$$

とおいて $\lim_{\Lambda\to\infty}m_{\rm eff}(e^2,\Lambda,\kappa\Lambda^\beta,(b\Lambda)^\beta)=b_0b_1$ を得る．ここで b_1 はパラメータで $b_0b_1=m_{\rm ph}$ となるように最後に調整する．f を $f=\sum_{n=0}^\infty a_n(\Lambda/m,\kappa/m)e^{2n}$ と展開する．e^0 次，e^2 次の項の係数は簡単な計算からわかり，次のように与えられる：

$$a_0\Big(\frac{\Lambda}{m},\frac{\kappa}{m}\Big)=1, \quad a_1\Big(\frac{\Lambda}{m},\frac{\kappa}{m}\Big)=\frac{1}{4\pi}\frac{8}{3\pi}\log\Big(\frac{\Lambda/m+2}{\kappa/m+2}\Big).$$

発見法的には $a_n(\Lambda/m,\kappa/m)\cong[\log(\Lambda/m)]^n$ $(\Lambda\to\infty)$ と予想されている．これは **log 発散**とよばれることがある．しかし，log 発散の予想に反して次の定理が示された．

定理 3.37 (Hiroshima–Spohn [72]) $\lim_{\Lambda\to\infty}a_2(\Lambda/m,\kappa/m)/\sqrt{\Lambda/m}=c\neq0$.

注意 3.38 (1) $H_{\rm PF}^0$ に対しては定理 3.37 から $\gamma\ge1/2$ $(e\neq0)$ が予想される．(2) f が e^2 で解析的な関数になるのは $|e|<{}^\exists e_*(\Lambda)$ のときである．$\Lambda\uparrow\infty$ のとき $e_*(\Lambda)\downarrow0$ であるから定理 3.37 は γ の評価について示唆的ではあるが，それ以上のことは何もいえない．

(1) Chen [30] は $\kappa=0$ の場合に，$H_{\rm PF}^0(p)$ の基底状態が $p\neq0$ のときには非存在，$p=0$ のときには存在することを証明した．さらに $E_{m,\Lambda}(\cdot)$ が $p=0$ で2回微分可能であることを示した．

(2) スピンのある場合の有効質量も解析されている．Hainzl–Seiringer [49] は $H_{\rm PF}$ の有効質量の

e^2 の項の係数を，Hiroshima–K. R. Ito [69] は e^4 の項の係数を求めている．

(3) $H_{\rm PF}^{\rm dip}$ の有効質量は $m_{\rm eff}=m+\delta m=m+(e^2/4\pi)(4/3\pi)(\Lambda-\kappa)$ となることが知られているから (例えば Hiroshima–Spohn [70]) $\gamma=1$ である．その結果，この節で述べた意味での質量のくりこみ，つまり m をスケーリングして $\Lambda\to\infty$ で $m\to 0$ とするようなくりこみは不可能ということになる．$H_{\rm PF}^{\rm dip}$ の場合には，$H_{\rm PF}^0$ に対する乗法的な質量くりこみではなく m を $m-\delta m$ で置き換えるような加法的な質量くりこみが必要である．$H_{\rm PF}^{\rm dip}$ の加法的な質量くりこみの必要性は Arai [2]–[5] でも指摘されている．一般の場合の質量くりこみとしては，乗法的な質量くりこみと加法的な質量くりこみを考慮したものが必要となるであろう．

(4) $H_{\rm N}$ の有効質量 $m_{\rm eff}$ は $\Lambda\to\infty$ で収束すると予想されている．つまり $\gamma=0$ (くりこみの必要はなし) である．しかし筆者の知る限り，それは厳密には証明されていないようである．

(5) Lieb [79] は ‘標準的な有効質量の定義は定義 3.36 ではあるが’ と述べつつも $m_{\rm eff}$ の異なる定義が可能であると述べている．つまり $V=-e^2/|x|$ として $E(H_{\rm PF}^{V=0})-E(H_{\rm PF})=e^4m_{\rm eff}/2+O(e^5)$ で定義する．両方の定義が一致するかどうかについては，現在のところ知られていない．

3.10 物質の安定性

(1) $H_{\rm PF}(N)$ で V が多体 Coulomb ポテンシャル

$$\sum_{i<j}^{N}\frac{e^2}{|x_i-x_j|}-\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{K}\frac{e^2Z_j}{|x_i-R_j|}+\sum_{1\le i\le j\le K}\frac{e^2Z_iZ_j}{|R_i-R_j|}$$

であるものを考える．ここで K は核子の数，$^\exists Z>Z_j>0$, $R_j\in\boldsymbol{R}^3$ は固定されている．$E(N,K)=E(H_{\rm PF}(N))$ とおく．$E(N,K)>-\infty$ となるとき**第 1 種安定** (stability of the first kind) といい，ある定数 C が存在して，$E(N,K)>-C(N+K)$ となるとき**第 2 種安定** (stability of the second kind) という．Bugliaro–Fröhlich–Graf [27] は Z が小さいとき $H_{\rm PF}(N)$ が第 2 種安定であることを示した．Lieb–Loss [81] では Dirac–Maxwell 型の模型が第 2 種安定であることが示されている．

(2) $V=0$ とおいた N 粒子系のハミルトニアンのスペクトルの下限を**自己エネルギー**という．スピンのない $H_{\rm PF}^0(N)=\sum_{j=1}^N(1/2m)(p^j-eA_{\hat\varphi}^j)^2+d\Gamma(\omega)$ の自己エネルギー $E^0(N)$ の評価について考える．$\hat\varphi=\hat\varphi_\Lambda$ とする．双極子近似した場合には厳密に $E^0(N)\cong\sqrt{N}\,\Lambda^{3/2}$ $(N\to\infty)$ が求められる (例えば [63])．Lieb–Loss [80] は，電子をボゾンと見なし $H_{\rm PF}^0(N)$ を $L^2(\boldsymbol{R}^{3N})\otimes\mathscr{F}_{\rm b}(L^2_{\rm ph})$ 上の作用素とすれば

$$C_1\sqrt{N}\,|e|\Lambda^{3/2}\le E^0(N)\le C_2N^{5/7}|e|^{4/7}\Lambda^{12/7} \tag{6}$$

となり，電子をフェルミオンと見なし $[\bigwedge^N L^2(\boldsymbol{R}^3)]\otimes\mathscr{F}_{\rm b}(L^2_{\rm ph})$ 上の作用素とすれば

$$C_1N|e|\Lambda^{3/2}\le E^0(N)\le C_2N|e|^{4/7}\Lambda^{12/7} \tag{7}$$

となることを示した．彼等によれば，電子をボゾンと見なせば，(6) より

$$\lim_{N\to\infty}\frac{E^0(N)}{N}=0$$

となり電子 1 個あたりのエネルギーが消えてしまうが，電子をフェルミオンと見なせば，(7) より

$$0<\lim_{N\to\infty}\frac{E^0(N)}{N}<\infty$$

となり物質は安定するという．つまり物質が安定して宇宙が存在するために電子はフェルミオンでな

ければならない！

注 釈

1) 量子場と相互作用する量子系のハミルトニアンをヒルベルト空間上の自己共役作用素として定義するためには，運動量の大きいボーズ量子（光子，中間子）との相互作用を一旦カットして定義する必要がある．これを紫外切断とよぶ．詳しくは2.4節を参照のこと．

文 献

[1] Z. Ammari, Asymptotic completeness for a renormalized non-relativistic hamiltonian in quantum field theory: the Nelson model, Math. Phys. Anal. Geom., **3** (2000), 217–285.

[2] A. Arai, On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized, massless, scalar field. I, J. Math. Phys., **22** (1981), 2539–2548.

[3] A. Arai, On a model of a harmonic oscillator coupled to a quantized, massless, scalar field. II, J. Math. Phys., **22** (1981), 2549–2552.

[4] A. Arai, Rigorous theory of spectra and radiation for a model in quantum electrodynamics, J. Math. Phys., **24** (1983), 1896–1910.

[5] A. Arai, Note on scattering theory in non-relativistic quantum electrodynamics, J. Phys. A, **16** (1983), 49–70.

[6] A. Arai, Essential spectrum of a self-adjoint operator on an abstract Hilbert space of Fock type and applications to quantum field Hamiltonians, J. Math. Anal. Appl., **246** (2000), 189–216.

[7] A. Arai, A particle-field Hamiltonian in relativistic quantum electrodynamics, J. Math. Phys., **41** (2000), 4271–4283.

[8] A. Arai, Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation, Rev. Math. Phys., **13** (2001), 1075–1094.

[9] A. Arai, Non-relativistic limit of a Dirac–Maxwell operator in relativistic quantum electrodynamics, Rev. Math. Phys., **15** (2003), 245–270.

[10] A. Arai, Mathematical theory of quantum particles interacting with a quantum field, In: Non-commutativity, infinite dimensionality and probability at the crossroads, (eds. N. Obata, et. al.), World Scientific, 2002, 1–50.

[11] 新井朝雄, フォック空間と量子場 (上), (下), 日本評論社, 2000.

[12] 新井朝雄, 量子場と相互作用を行う量子系の数理, 誰が量子場をみたか, 日本評論社, 2004, 108–182.

[13] A. Arai and M. Hirokawa, On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model, J. Funct. Anal., **151** (1997), 455–503.

[14] A. Arai and M. Hirokawa, Ground states of a general class of quantum field Hamiltonians, Rev. Math. Phys., **12** (2000), 1085–1135.

[15] A. Arai and M. Hirokawa, Stability of ground states in sectors and its application to the Wigner–Weisskopf model, Rev. Math. Phys., **13** (2001) 513–527.

[16] A. Arai, M. Hirokawa and F. Hiroshima, On the absence of eigenvectors of Hamiltonians in a class of massless quantum field models without infrared cutoff, J. Funct. Anal., **168** (1999), 470–497.

[17] A. Arai, M. Hirokawa and F. Hiroshima, Regularities of ground states of quantum field models, preprint, 2004, mp-arc 04-293.

[18] A. Arai and H. Kawano, Enhanced binding in a general class of quantum field models, Rev. Math. Phys., **15** (2003), 387–423.

[19] V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, Renormalization group analysis of spectral problems in quantum field theory, Adv. Math., **137** (1998), 205–298.

[20] V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles, Adv. Math., **137** (1998), 299–395.

[21] V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation field, Comm. Math. Phys., **207** (1999), 249–290.

[22] V. Bach, J. Fröhlich, I. M. Sigal and A. Soffer, Positive commutators and the spectrum of Pauli–Fierz Hamiltonian of atoms and molecules, Comm. Math. Phys., **207** (1999), 557–587.

[23] J. M. Barbaroux, T. Chen and S. Vugalter, Binding conditions for atomic N-electron systems in non-relativistic QED, Ann. H. Poincaré, **4** (2003), 1101–1136.

[24] J.M. Barbaroux, M. Dimassi and J.C. Guillot, Quantum electrodynamics of relativistic bound states with cutoffs, preprint, 2003, arXiv:math-ph/0312011.

[25] H. A. Bethe, The electromagnetic shift of energy levels, Phys. Rev., **72** (1947), 339–342.

[26] V. Betz, F. Hiroshima, J. Lőrinczi, R. A. Minlos and H. Spohn, Gibbs measure associated with particle-field system, Rev. Math. Phys., **14** (2002), 173–198.

[27] L. Bugliaro, J. Fröhlich and G. M. Graf, Stability of quantum electrodynamics with non-relativistic matter, Phys. Rev. Lett., **77** (1996), 3494–3497.

[28] R. Carmona, Pointwise bounds for Schrödinger operators, Comm. Math. Phys., **62** (1978), 97–106.

[29] I. Catto and C. Hainzl, Self-energy of one electron in non-relativistic QED, J. Funct. Anal., **207** (2004), 68–110.

[30] T. Chen, Operator-theoretic infrared renormalization and construction of dressed 1-particle states in non-relativistic QED, preprint, 2001, mp-

arc 01-301.
[31] T. Chen, V. Vougalter and S. A. Vugalter, The increase of binding energy and enhanced binding in nonrelativistic QED, J. Math. Phys., **44** (2003), 1961–1970.
[32] J. Dereziński and C. Gérard, Asymptotic completeness in quantum field theory. Massive Pauli–Fierz Hamiltonian, Rev. Math. Phys., **11** (1999), 383–450.
[33] J. Dereziński and C. Gérard, Scattering theory of infrared divergent Pauli–Fierz Hamiltonians, preprint, 2003.
[34] C. Fefferman, J. Fröhlich and G. M. Graf, Stability of ultraviolet-cutoff quantum electrodynamics with non-relativistic matter, Comm. Math. Phys., **190** (1997), 309–330.
[35] J. Fröhlich, On the infrared problem in a model of scalar electrons and massless, scalar bosons, Ann. Inst. H. Poincaré Physique Théorique, **19** (1973), 1–103.
[36] J. Fröhlich, Existence of dressed one electron states in a class of persistent models, Fortschr. Phys., **22** (1974), 159–198.
[37] J. Fröhlich and Y. M. Park, Correlation inequalities and thermodynamic limit for classical and quantum continuous systems II. Bose–Einstein and Fermi–Dirac statistics, J. Statist. Phys., **23** (1980), 701–753.
[38] J. Fröhlich, M. Griesemer and B. Schlein, Asymptotic electromagnetic fields in a mode of quantum-mechanical matter interacting with the quantum radiation field, Adv. Math., **164** (2001), 349–398.
[39] J. Fröhlich, M. Griesemer and B. Schlein, Asymptotic completeness for Rayleigh Scattering, Ann. H. Poincaré, **3** (2002), 107–170.
[40] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli–Fierz Hamiltonians, Ann. H. Poincaré, **1** (2000), 443–459.
[41] C. Gérard, On the scattering theory of massless Nelson models, Rev. Math. Phys., **14** (2002), 1165–1280.
[42] J. Glimm and A. Jaffe, The $\lambda(\phi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs: II. The field operators and approximate vacuum, Ann. of Math., **91** (1970), 362–401.
[43] M. Griesemer, E. Lieb and M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, Invent. Math., **145** (2001), 557–595.
[44] L. Gross, Existence and uniqueness of physical ground states, J. Funct. Anal., **10** (1972), 52–109.
[45] L. Gross, The relativistic polaron without cutoffs, Comm. Math. Phys., **31** (1973), 25–73.
[46] Z. Haba, Feynman integral in regularized nonrelativistic quantum electrodynamics, J. Math. Phys., **39** (1998), 1766–1787.
[47] C. Hainzl, One non-relativistic particle coupled to a photon field, Ann. H. Poincaré, **4** (2003), 217–237.
[48] C. Hainzl, V. Vougalter and S. A. Vugalter, Enhanced binding in non-relativistic QED, Comm. Math. Phys., **233** (2003), 13–26.
[49] C. Hainzl and R. Seiringer, Mass renormalization and energy level shift in non-relativistic QED, Adv. Theor. Math. Phys., **6** (2002), 847–869.
[50] M. Hirokawa, Recent developments in mathematical methods for models in non-relativistic quantum electrodynamics, In: Garden of quanta, (eds. A. Tonomura et. al.), World Scientific, 2003, 209–242.
[51] M. Hirokawa, Infrared catastrophe for Nelson's model, preprint, 2003, mp-arc 03-512.
[52] M. Hirokawa, A mathematical mechanism of infrared catastrophe, preprint, 2004, mp-arc 04-089.
[53] M. Hirokawa, F. Hiroshima and H. Spohn, Ground state for point particles interacting through a massless scalr field, Adv. Math., **191** (2005), 339–392.
[54] F. Hiroshima, Diamagnetic inequalities for systems of nonrelativistic particles with a quantized field, Rev. Math. Phys., **8** (1996), 185–203.
[55] F. Hiroshima, Functional integral representation of a model in quantum electrodynamics, Rev. Math. Phys., **9** (1997), 489–530.
[56] F. Hiroshima, Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics I, J. Math. Phys., **40** (1999), 6209–6222.
[57] F. Hiroshima, Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics II, J. Math. Phys., **41** (2000), 661–674.
[58] F. Hiroshima, Essential self-adjointness of translation-invariant quantum field models for arbitrary coupling constants, Comm. Math. Phys., **211** (2000), 585–613.
[59] F. Hiroshima, Ground states and spectrum of quantum electrodynamics of non-relativistic particles, Trans. Amer. Math. Soc., **353** (2001), 4497–4528.
[60] F. Hiroshima, Embedded eigenvalues, localization and asymptotics of quantum field models: a functional integral approach, J. Phys. A, **35** (2002), 351–375.
[61] F. Hiroshima, Self-adjointness of the Pauli–Fierz Hamiltonian for arbitrary values of coupling constants, Ann. H. Poincaré, **3** (2002), 171–201.
[62] F. Hiroshima, Localization of the number of photons in nonrelativistic QED, Rev. Math. Phys., **15** (2003), 271–312.
[63] F. Hiroshima, Nonrelativistic QED at large momentum of photons, In: Garden of quanta, (eds. A. Tonomura et. al.), World Scientific, 2003, 167–196.
[64] F. Hiroshima, Analysis of ground states of

atoms interacting with a quantized radiation field, In: Topics in the theory of Schrödinger operators, (eds. H. Araki and H. Ezawa), World Scientific, 2004, 145–272.

[65] F. Hiroshima, Multiplicity of ground states in quantum field models: applications of asymptotic fields, preprint, 2004, mp-arc 04-049.

[66] 廣島文生, 開放系のスペクトル解析：汎関数積分によるアプローチ, 数理物理への誘い, **4**, 遊星社, 2002, 143–174.

[67] 廣島文生, 非相対論的量子電気力学, 現代物理学の歴史 II, 朝倉書店, 2004, 570–590.

[68] 廣島文生, Spectral analysis of Schrödinger operators coupled to a quantum field, 日本数学会秋季総合分科会 函数解析学分科会講演アブストラクト, 2004, 77–89.

[69] F. Hiroshima and K. R. Ito, Mass renormalization in nonrelativistic QED with spin 1/2, preprint, 2004.

[70] F. Hiroshima and H. Spohn, Enhanced binding through coupling to a quantum field, Ann. H. Poincaré, **2** (2001), 1159–1187.

[71] F. Hiroshima and H. Spohn, Ground state degeneracy of the Pauli–Fierz model with spin, Adv. Theor. Math. Phys., **5** (2001), 1091–1104.

[72] F. Hiroshima and H. Spohn, Mass renormalization in nonrelativistic QED, preprint, 2003, arXiv: math-ph/0310043, to be published in J. Math. Phys.

[73] P. D. Hislop and I. M. Sigal, Introduction to spectral theory, Springer, 1996.

[74] R. Høegh-Krohn, Asymptotic fields in some models of quantum field theory I, J. Math. Phys., **9** (1968), 2075–2080.

[75] R. Høegh-Krohn, Asymptotic fields in some models of quantum field theory II, J. Math. Phys., **10** (1969), 639–643.

[76] R. Høegh-Krohn, Asymptotic fields in some models of quantum field theory III, J. Math. Phys., **11** (1969), 185–189.

[77] M. Hübner and H. Spohn, Radiative decay: nonperturbative approaches, Rev. Math. Phys., **7** (1995), 363–387.

[78] W. Lamb and R. Retherford, Fine structure of the hydrogen atom by a microwave method, Phys. Rev., **72** (1947), 241–243.

[79] E. Lieb, Quantum mechanics, the stability of matter and quantum electrodynamics, preprint, 2004, arXiv:math-ph/0401004.

[80] E. Lieb and M. Loss, Self-energy of electrons in non-perturbative QED, In: Differential Equations and Mathematical Physics, (eds. R. Weikard and G. Weinstein), Cambridge, MA: Amer. Math. Soc., 2000, 279–293.

[81] E. Lieb and M. Loss, Stability of a model of relativistic quantum electrodynamics, preprint, 2002, arXiv:math-ph/0109002.

[82] E. Lieb and M. Loss, Existence of atoms and molecules in non-relativistic quantum electrodynamics, Adv. Theor. Math. Phys., **7** (2003), 667–710.

[83] E. Lieb and M. Loss, A note on polarization vectors in quantum electrodynamics, preprint, 2004, arXiv:math-ph/040101.

[84] E. Lieb and W. Thirring, Inequalities for the moments of the eigenvalues of Schrödinger Hamiltonian and their relation to Sobolev inequlities, In: Studies in Mathematical Physics, Princeton Univ. Press, 1976, 269–303.

[85] J. Lőrinczi, R. A. Minlos and H. Spohn, The infrared behaviour in Nelson's model of a quantum particle coupled to a massless scalar field, Ann. H. Poincaré, **3** (2001), 1–28.

[86] J. Lőrinczi, R. A. Minlos and H. Spohn, Infrared regular representation of the three dimensional massless Nelson model, Lett. Math. Phys., **59** (2002), 189–198.

[87] E. Mourre, Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators, Comm. Math. Phys., **78** (1981), 391–408.

[88] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, J. Math. Phys., **5** (1964), 1190–1197.

[89] T. Okamoto and K. Yajima, Complex scaling technique in non-relativistic massive QED, Ann. Inst. H. Poincaré Physique Théorique, **42** (1985), 311–327.

[90] W. Pauli and M. Fierz, Zur Theorie der Emission langwelliger Lichtquanten, Nuovo Cimento, **15** (1938), 167–188.

[91] H. Spohn, Ground state(s) of the spin-boson Hamiltonian, Comm. Math. Phys., **123** (1989), 277–304.

[92] H. Spohn, Asymptotic completeness for Rayleigh scattering, J. Math. Phys., **38** (1997), 2281–2296.

[93] H. Spohn, Ground state of quantum particle coupled to a scalar boson field, Lett. Math. Phys., **44** (1998), 9–16.

[94] H. Spohn, The Dynamics of Charged Particles and Radiation, Cambridge Univ. Press, 2004.

[95] T. Welton, Some observable effects of the quantum-mechanical fluctuations of the electromagnetic field, Phys. Rev., **74** (1948), 1157–1167.

(2004 年 3 月 23 日提出)
(ひろしま ふみお・摂南大学工学部)