有限群に関連した圏論的構成

小　田　文　仁
中　岡　宏　行

1　はじめに

有限群に関連した圏論的構成，というと読者は何を思い浮かべるだろうか．本稿で紹介したいそれは，標準的 (?) な圏論の用法と広く目されるであろう '加法圏でのホモロジー代数的議論' とは関わり合いながらも趣を異にするものであり，あるいはどこか捉えどころのないものだという見方をされている類のものかもしれない．

表現であれコホモロジーであれ，群 G から得られる何らかの代数系を想定して頂きたい．本稿で扱う圏論が目的とするのは，群を取り換えたときのそれらの振舞いの記述，あるいは満たすべき関係性の一般的な取り扱いである．特に Mackey 関手・Green 関手・バイセット関手を中心に，Dress 構成と誘導定理，Alperin 予想，Dade 群に関わる有限群論の諸問題に関連する事柄を紹介する．

モジュラー表現論で局所部分群上の表現を考察するように，あるいは，コホモロジー論でトレースやノルムを用いるように，有限群に付随する代数系とその部分群との関わりを調べることは自然の発想であると思われる．ならばいっそ有限群 G の各部分群に表現環やコホモロジーといった代数構造を対応させ，部分群の包含や共役の作用もすべて含み入れ，その全体を一つの対象とみなしてはどうか．

詳しく見ると，部分群の包含 $K \leq H$ には誘導 (推移) と制限という互いに逆方向の操作が付随している．有限群 G だけではなく，部分群すべての表現やコホモロジーのなす加群の族を考え，制限・誘導・共役という構造を合わせて一つの代数系とみなしたものは Mackey 関手とよばれる．この '有限群とその部分群の表現を同時に扱う理論' というのは Mackey 関手の重要な個性であり，Bouc の著書 [Bo97] においても "It is an attempt to give a single framework for the different theories of representations of a finite group and its subgroups." と評されるところである．

部分群とその間の包含・共役を考えることは，本質的には推移的な有限 G-集合とその間の G-写像を考えることに同値であり，さらに直和も許せば有限 G-集合の圏上の関手と自然にみなされる．これは Mackey '関手' とよばれる所以でもあり，共変性 (誘導) と反変性 (制限) を有する両変的な関手という解釈を与える．

このように，有限群の研究に用いられる種々の代数的手法に見られる関係・条件を記述する役割を担う Mackey 関手だが，一度定義されてしまえば，今度はそれ自体が有限群の情報を反映する重要な代数的対象となる．第 6 節で述べるように，Alperin の重み予想がある条件を満たす Mackey 関手の存在に同値となるなど，有限群論における中心的な予想にも関わりをもつことが知られている．

また，Mackey 関手の圏 Mack(G) は対称モノイダルアーベル圏となるため，ホモロジカルな議論を押し進めることもできる．あるいはこの事実は，Mackey 関手をアーベル群の 'G-両変版' とみなせる，という視点も与えている．中でも第 3 節で扱う Burnside 環は Mackey 関手との相性が非常によく，ちょうどアーベル群の $\mathbb{Z}$ に相当する重要な役割を担う．

表現環やコホモロジー環，そして Burnside 環を Mackey 関手と捉える場合，このように環構造を

有しているものは自然と Mack(G) のモノイド対象となる．Mack(G) のモノイド対象は Green 関手とよばれ，誘導定理の記述に重要な役割を果たす．これについては，第 5 節で詳しく述べたい．

これら Green 関手の中には，乗法的誘導 (推移) とよばれる構造を有しているものが存在する．実際には Mackey 関手の構造に加え，この乗法的推移を付け加えた新たな代数系を考えると，自然に Green 関手となることが従う．丹原 [Tam93] により TNR 関手という名称で定義され，今日では丹原関手とよばれている．丹原関手は Witt–Burnside 環とよばれる Witt 環と Burnside 環の同時一般化の構造を最も綺麗に記述できる代数系であり，有限群論への応用が待たれるところである．丹原関手については第 4 節で述べる．

ここまでに述べた Mackey 関手・Green 関手・丹原関手はいずれも有限群 G の部分群上で代数構造の関わりを述べる道具であった．しかしながら，例えば群の準同型 $f\colon G \to G'$ に関する振舞いなど，部分群だけでは捉えられない [すべての群] と [準同型] による比較を記述する代数系を考察したい，というのもまた自然な考えである．実際にはより一般の比較を考え，バイセットを用いた議論に発展できる．

バイセットを用いることにより, 従来の制限･誘導に加え, 群の同型, 膨張 (inflation), 収縮 (deflation) を統一的に扱うことが可能となる．群の準同型なども，準同型定理を用いれば $(G \to G/\mathrm{Ker}f \overset{\cong}{\to} \mathrm{Im}f \hookrightarrow G')$ のように，これらの合成で書くことができるため，バイセットによる変形の一例に過ぎない．本稿の後半では Bouc により定義されたバイセット関手 [Bo10] について触れ，それらが Dade 群の研究などでどのような役割を果たすかについても述べたい．

査読者と編集者から多くの有益な助言を頂きました．心より感謝申し上げます．

2 Mackey 関手

2.1 Green による定義

有限群 G に対し，G-加群 M のコホモロジー $H^n(G,M)$ や表現環 $R(G)$ などは G の構造を調べるうえで今日でも研究されているところである．群を取り換えたときに生じる変化を追うことには当然意義があると思われるが，中でも，G の部分群すべてを考え

$$\{H^n(H,M)\}_{H\leq G} \quad や \quad \{R(H)\}_{H\leq G}$$

のような体系と捉えることは自然の発想であろう．このような例で得られる加群の族 $\{M(H)\}_{H\leq G}$ には，次のような特徴的な構造が付随する．

(1) 部分群の列 $K \leq H \leq G$ に対し，**制限** $\mathrm{res}^H_K\colon M(H) \to M(K)$.

(2) 部分群の列 $K \leq H \leq G$ に対し，**推移** $\mathrm{ind}^H_K\colon M(K) \to M(H)$.

(3) 部分群 $H \leq G$ と元 $g \in G$ に対し，**共役** $c_{g,H}\colon M(H) \to M({}^gH)$.

ここで，${}^gH$ は H の共役群 gHg^{-1} を表す．(同様に，$H^g = g^{-1}Hg$ とおく.) これらはすべて加群の準同型である．このように，部分群で添え字付けられた加群の族 $\{M(H)\}_{H\leq G}$ と，それらをつなぐ構造射 (制限，推移，共役) からなる一つのシステムを考える．

定義 2.1 G を有限群とする．加群と準同型の族 $M = \{M(H), \mathrm{res}^H_K, \mathrm{ind}^H_K, c_{g,H}\}$ が以下を満たすとき，これを **Mackey 関手**とよぶ.

(0) [自明性] 任意の $H \leq G, h \in H$ に対して，$\mathrm{res}^H_H = \mathrm{ind}^H_H = c_{h,H} = \mathrm{id}_{M(H)}$.

(1) [推移性] $c_{g',{}^gH}\circ c_{g,H}=c_{g'g,H}\quad(^\forall H\le G,\ ^\forall g,g'\in G)$,

$$\mathrm{res}^K_L\circ\mathrm{res}^H_K=\mathrm{res}^H_L,\ \mathrm{ind}^H_K\circ\mathrm{ind}^K_L=\mathrm{ind}^H_L\quad(^\forall L\le K\le H\le G).$$

(2) [G-同変性] $c_{g,K}\circ\mathrm{res}^H_K=\mathrm{res}^{{}^gH}_{{}^gK}\circ c_{g,H},\quad c_{g,H}\circ\mathrm{ind}^H_K=\mathrm{ind}^{{}^gH}_{{}^gK}\circ c_{g,K}$.

(3) [Mackey 条件] 任意の $K,L\le H$ に対して

$$\mathrm{res}^H_L\circ\mathrm{ind}^H_K=\sum_{LhK\in L\backslash H/K}\mathrm{ind}^L_{{}^hK\cap L}\circ c_{h,K\cap L^h}\circ\mathrm{res}^K_{K\cap L^h}. \tag{2.1}$$

ここで (2.1) の和における h は両側分解 $L\backslash H/K$ の代表系を走るものとする．以降，紛れのないときは $c_{g,H}$ を単に c_g と書く．

より一般に R を可換環とするとき，同様の条件を満たす R 加群と R 準同型の族を，***R*-Mackey 関手**という．通常の Mackey 関手は $\mathbb{Z}$-Mackey 関手である．また，単位元付きの可換半群 (= 可換モノイド) と単位元を保つ半群の準同型の族 $\{M(H),\mathrm{res}^H_K,\mathrm{ind}^H_K,c_{g,H}\}$ が同様の条件を満たすとき，これを**半 Mackey 関手**という．

一見複雑な形をした (2.1) だが，ファイバー積の Mackey 分解公式 (注 1) を念頭におくと，自然な条件として受け入れることができる．詳細は，注 3 で述べる．

注 1　$K,L\le H\le G$ とし，自然な剰余写像を $p^H_L\colon G/L\to G/H,\ p^H_K\colon G/K\to G/H$ とする．このとき p^H_L と p^H_K のファイバー積は次のようになる．

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{LhK\in L\backslash H/K} G/(K\cap L^h) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & G/K \arrow[d, "p^H_K"] \\
G/L \arrow[r, "p^H_L"'] & G/H
\end{tikzcd}$$

Thevenaz–Webb [TW95] において，Mackey 関手は次のようにクイバーの表現と関係付けられた．

定義-命題 2.2　G の部分群を頂点とし，包含に対応する互いに逆向きの一対の矢印

$$r^H_K\colon H\to K,\quad t^H_K\colon K\to H$$

と，共役に対応する矢印 $c_{g,H}\colon H\to{}^gH$ からなるクイバー Q を考える．(ただし，$h\in H\le G$ に対しては $r^H_H,t^H_H,c_{h,H}$ はいずれも頂点 H に対応する長さ 0 の path であるとする．) 係数環を R とする道代数 RQ を，定義 2.1 に現れる関係式に対応する

- $c_{g',{}^gH}\cdot c_{g,H}-c_{g'g,H}$,
- $r^K_L\cdot r^H_K-r^H_L,\quad t^H_K\cdot t^K_L-t^H_L$,
- $c_{g,K}\cdot r^H_K-r^{{}^gH}_{{}^gK}\cdot c_{g,H},\quad c_{g,H}\cdot t^H_K-t^{{}^gH}_{{}^gK}\cdot c_{g,K}$,
- $r^H_L\cdot t^H_K-\sum_{LhK\in L\backslash H/K}t^L_{{}^hK\cap L}\cdot c_{h,K\cap L^h}\cdot r^K_{K\cap L^h}$

の生成する両側イデアル I で割って得られる R-代数 RQ/I を **Mackey 代数**とよび，$\mu_R(G)$ で表す．G 上の R-Mackey 関手を与えることは，環 $\mu_R(G)$ 上の加群を与えることに同値となる．

2.2　Dress による定義

Dress [Dr73] に従えば，より圏論的な定式化により Mackey 関手を**両変的な関手**と捉え直すことが

できる．まずは次のことに注意しよう．

注 2 有限 G-集合と G-写像のなす圏 ${}_G\mathrm{set}$ において，対象および射は次のように分解できる．

(i) 任意の G-集合 X は，軌道分解により同型を除き一意に

$$X \cong G/H_1 \amalg \cdots \amalg G/H_k \tag{2.2}$$

と，部分群 $H_1, \ldots, H_k$ を用いて既約 (= 推移的) な G-集合の直和で表せる．

(ii) 既約な G-集合の間の G-写像 $f\colon G/K \to G/H$ は，$K^g \leq H$ を満たす $g \in G$ を用いて

$$f = \quad \left(G/K \xrightarrow{\ell_{g,K}} G/K^g \xrightarrow{p^H_{K^g}} G/H \right) \tag{2.3}$$

と表せる．ここで $\ell_g = \ell_{g,K}$ は共役から定まる

$$\ell_g\colon G/K \to G/K^g \quad ; \quad xK \mapsto xgK^g$$

という写像を表す．特に，f が同型となるのは $K^g = H$，すなわち K と H が共役となる場合である．

これらの性質を用いると，(半) Mackey 関手 $M = \{M(H), \mathrm{res}^H_K, \mathrm{ind}^H_K, c_{g,H}\}$ を圏 ${}_G\mathrm{set}$ 上の関手の対 (M^*, M_*) に以下の要領で延長することができる．

1. G-集合 X に対しては，軌道分解 (2.2) をとり，可換モノイドの直積として

$$M(X) = M(H_1) \times \cdots \times M(H_k)$$

と定める．M が Mackey 関手のときにはアーベル群の直和に他ならない．

2. G-写像 $f\colon X \to Y$ に対して，制限・共役を延長して自然に $M^*(f)\colon M(Y) \to M(X)$ なる準同型が得られる．実際，直積分解により既約な場合に帰着し f が (2.3) のように表される場合のみ考えれば充分であるが，この場合は合成

$$M^*(f) = \quad \left(M(G/H) \xrightarrow{\mathrm{res}^H_{K^g}} M(G/K^g) \xrightarrow{c_g^{-1}} M(G/K) \right)$$

で与えられる．

ここまでで，可換モノイドの圏 Mon への反変関手 $M^*\colon {}_G\mathrm{set} \to \mathrm{Mon}$ が得られた．構成から明らかに $M(\emptyset)$ は自明なモノイドであり，また任意の対象 $X_1, X_2 \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対して，包含 $X_1, X_2 \subseteq X_1 \amalg X_2$ は自然な同型 $M(X_1 \amalg X_2) \cong M(X_1) \times M(X_2)$ を誘導する．この性質を指して，M^* は**加法的**であるという．

3. G-写像 $f\colon X \to Y$ に対して，2. と同様に，推移・共役を延長して $M_*(f)\colon M(X) \to M(Y)$ なる準同型が得られる．これは共変関手 $M_*\colon {}_G\mathrm{set} \to \mathrm{Mon}$ をなす．

以上で，関手の対 (M^*, M_*) が得られた．M が Mackey 関手のときは，アーベル群の圏 Ab への関手となる．

逆に，加法的反変関手と共変関手の対 (M^*, M_*) が適切な条件を満たすとき，可換モノイドと準同型の族 $\{M(G/H), M^*(p^H_K), M_*(p^H_K), M^*(\ell_{g,{}^gH})\}$ は半 Mackey 関手をなすことが示される．これに基づき，関手の対として半 Mackey 関手を次のように定義する．命題 1 に述べるように，実際には集合の圏 Set への関手を考えれば充分である．

定義 2.3 加法的反変関手 $M^*\colon {}_G\mathrm{set} \to \mathrm{Set}$ と共変関手 $M_*\colon {}_G\mathrm{set} \to \mathrm{Set}$ の対 $M = (M_*, M^*)$ が以下を満たすとき，これを半 Mackey 関手という．

(1) $M^*(X) = M_*(X)$ が任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対して成立．これを $M(X)$ で表す．

(2) [Mackey 条件] ${}_G\mathrm{set}$ における任意のファイバー積

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "x"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y' \arrow[d, "y"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

に対し，$M^*(f) \circ M_*(y) = M_*(x) \circ M^*(f')$ が成立．すなわち，

$$\begin{tikzcd} M(X') \arrow[d, "M_*(x)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & M(Y') \arrow[l, "M^*(f')"'] \arrow[d, "M_*(y)"] \\ M(X) & M(Y) \arrow[l, "M^*(f)"] \end{tikzcd}$$

は可換となる．

このように半 Mackey 関手を，反変性と共変性を合わせもつ‘両変的’な対 (M^*, M_*) として定義できる．M^* を M の**反変部分**，M_* を**共変部分**とよぶ．また定義 2.1 と同様に，$M^*(f)$ を制限，$M_*(f)$ を推移とよび，これらを合わせて構造射とよぶ．M が明らかな場合は，$M^*(f)$ および $M_*(f)$ はそれぞれ f^*, f_* と略記する．

命題 1 任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対して，二つの id_X を貼り合わせた自然な G-写像 $\nabla\colon X \amalg X \to X$ をとると，加法性から

$$M(X) \times M(X) \xrightarrow{\cong} M(X \amalg X) \xrightarrow{\nabla_*} M(X)$$

という二項演算が得られる．これにより $M(X)$ は可換モノイドとなり[1)]，M^*, M_* はいずれも Mon への関手となる．

注 3 定義 2.1 と定義 2.3 は，上記の軌道分解を用いた対応により同等のものとなることが示される．定義 2.3 の Mackey 条件においてファイバー積を注 1 の形のものにとれば，ちょうど定義 2.1 の Mackey 条件に対応することが分かる．

定義 2.4 半 Mackey 関手 $M = (M^*, M_*)$ が **Mackey 関手**であるとは，任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対して $M(X)$ がアーベル群となるときをいう．これは，M^* および M_* がアーベル群の圏 Ab への関手となるということに他ならない．

注 4 このように関手の対として定義すれば，有限 G-集合の圏以外でも，直和とファイバー積の存在する圏では Mackey 関手を考察することができる．例えば [PS07] では，コンパクト閉圏での Mackey 関手について論じている．

Mackey 関手の射は，‘両変的’な自然変換として定義すればよい．

定義 2.5 (半) Mackey 関手 M から N への射とは，写像の族 $\varphi = \{\varphi_X\colon M(X) \to N(X)\}$ であって，反変部分と共変部分の両方に関して自然変換をなすものをいう．φ_X は自然に積を保ち，モノイドの準同型となる．G 上の半 Mackey 関手の圏を $\mathrm{SMack}(G)$ で表し，Mackey 関手のなす充満部分

圏を Mack(G) で表す.

例えば，次のような Mackey 関手は両変的な関手の対として記述する方が明快である.

例 1　S を可換 G-モノイド，すなわち，群 G がモノイド準同型として作用する可換モノイドとする.

- 対象 $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対して，

$$\mathcal{P}_S(X) = \{X \text{ から } S \text{ への } G\text{-写像}\},$$

- 射 $f\colon X \to Y$ に対して，f^* は f の合成

$$\mathcal{P}_S(Y) \to \mathcal{P}_S(X)\ ;\ \beta \mapsto \beta \circ f,$$

- 射 $f\colon X \to Y$ に対して，f_* は

$$\mathcal{P}_S(X) \to \mathcal{P}_S(Y)\ ;\ \alpha \mapsto \ (y \mapsto \sum_{x \in f^{-1}(y)} \alpha(x))$$

と定めると，$\mathcal{P}_S$ は半 Mackey 関手をなす．これを S に付随する**固定点関手**という．S が G-加群のときは，$\mathcal{P}_S$ は Mackey 関手となる.

例 1 の固定点関手は, 次のような関手を与える．G-Mon は可換 G-モノイドの圏を表すとし, G-Mod は G-加群の圏を表すとする.

命題 2　固定点関手をとる対応により，忠実充満関手

$$\mathcal{P}\colon G\text{-Mon} \to \mathrm{SMack}(G)$$

と，その制限として

$$\mathcal{P}\colon G\text{-Mod} \to \mathrm{Mack}(G)$$

が得られる．この意味で，Mackey 関手の概念は G 加群を含むものであるといえる.

Mack(G) は以下に記す性質をもち，これにより Mackey 関手はアーベル群の G-両変的な類似物とみなされる．同様に，半 Mackey 関手は可換モノイドの G-両変版といえる．ここで B は，次節で述べる **Burnside 関手**とよばれる Mackey 関手であり，ちょうどアーベル群の $\mathbb{Z}$ に相当する役割を果たす.

命題 3　圏 Mack(G) は，以下の性質を満たす.

(1)　アーベル圏である.

(2)　B をユニットとするテンソル積 $\hat{\otimes}$ を有し，$(\mathrm{Mack}(G), \hat{\otimes}, B)$ は対称モノイダル圏をなす.

(3)　G が自明なときには，Ab に圏同値となる.

2.3　Lindner による定式化

両変的な関手の対としての Mackey 関手は，さらに Lindner によりスパン圏上の単一の関手に置き換えられている ([Li76]).

定義 2.6　${}_G\mathrm{set}$ から生じる**スパン圏** $\mathcal{S} = \mathcal{S}({}_G\mathrm{set})$ とは，以下で定まる圏をいう.

- 対象は有限 G-集合．すなわち，$\mathrm{Ob}(\mathcal{S}) = \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$.
- 対象 X, Y の間の射は，${}_G\mathrm{set}$ における射の対

$$(X \xleftarrow{f} V \xrightarrow{g} Y)$$

の同値類とする．ここで V は ${}_G\mathrm{set}$ の任意の対象．ただし，$(X \xleftarrow{f} V \xrightarrow{g} Y)$ と $(X \xleftarrow{f'} V' \xrightarrow{g'} Y)$ が同値であるとは，ある同型射 $v \in {}_G\mathrm{set}(V, V')$ が存在して

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] \arrow[dd, "v", "\cong"'] & \\ X \arrow[r, phantom, "\circlearrowright"] & & Y \arrow[l, phantom, "\circlearrowright"] \\ & V' \arrow[ul, "f'"] \arrow[ur, "g'"'] & \end{tikzcd}$$

を可換にするときをいう．$(X \xleftarrow{f} V \xrightarrow{g} Y)$ の属する同値類を $[f, V, g]$ で表す．${}_G\mathrm{set}$ における射と区別するため，スパン圏における射は $[f, V, g]\colon X \rightharpoonup Y$ という矢印で表すことにする．

スパン圏において，二つの連続する射の合成はファイバー積を用いて定義される．

- 射 $[f, V, g]\colon X \rightharpoonup Y$ と $[h, W, k]\colon Y \rightharpoonup Z$ の合成を，

$$[h, W, k] \circ [f, V, g] = \left[\begin{tikzcd}[column sep=small] & & V \times_Y W \arrow[dl, "h'"'] \arrow[dr, "g'"] \arrow[dd, phantom, "\Diamond"] & & \\ & V \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"'] & & W \arrow[dl, "h"] \arrow[dr, "k"] & \\ X & & Y & & Z \end{tikzcd} \right] = [f \circ h', V \underset{Y}{\times} W, k \circ g']$$

と定義する．ここで，真中の四角形はファイバー積を表す．

こうして定まる圏 $\mathcal{S}$ において，二つの対象 X_1, X_2 の直積は，${}_G\mathrm{set}$ における直和 $X_1 \amalg X_2$ で与えられる．

一般に，任意の有限直積をもつ圏 $\mathscr{C}$ に対して，直積を保つ関手 $\mathscr{C} \to \mathrm{Set}$ の全体がなす圏を $[\mathscr{C}, \mathrm{Set}]$ で表すとしよう．$\mathscr{C} = \mathcal{S}$ に対して，次が成り立つ．

命題 4 ([Li76])　圏同値 $[\mathcal{S}, \mathrm{Set}] \xrightarrow{\simeq} \mathrm{SMack}(G)$ が存在する．

この圏同値で，関手 $F\colon \mathcal{S} \to \mathrm{Set}$ と半 Mackey 関手 (M^*, M_*) の対応は以下のように対応する．

- G-集合 X に対して，$F(X) = M(X)$.
- G-写像 $f\colon X \to Y$ に対して，$M^*(f) = F([f, X, \mathrm{id}_X])$，$M_*(f) = F([\mathrm{id}_X, X, f])$.
- 逆に $\mathcal{S}$ の射 $[f, V, g]\colon X \rightharpoonup Y$ に対して，$F([f, V, g]) = M_*(g) \circ M^*(f)$.

(M^*, M_*) に対する Mackey 条件は，関手 F が射の合成を保つことに対応する．

$\mathcal{S}$ における射 $[f, V, g], [f', V', g']\colon X \rightharpoonup Y$ に対し，和 $[f, V, g] + [f', V', g']$ が

$$[f \cup f', V \amalg V', g \cup g']$$

で定まり，任意の X, Y に対して射集合 $\mathcal{S}(X, Y)$ は可換モノイドとなる[2)]．Grothendieck 群 $K_0(\mathcal{S}(X, Y))$ を $\mathcal{T}(X, Y)$ で表すとすると，$\mathcal{T}(X, Y)$ を射集合とする新たな圏 $\mathcal{T}$ が

- $\mathrm{Ob}(\mathcal{T}) = \mathrm{Ob}(\mathcal{S})$,
- 任意の X, Y に対し，X から Y への射集合は $\mathcal{T}(X, Y)$

と得られる．このとき，次が成り立つ．

命題 5 ([Li76])　圏同値 $[\mathcal{T}, \mathrm{Set}] \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Mack}(G)$ が存在する．

すなわち，G 上の Mackey 関手を考えることは，直積を保つ関手 $\mathcal{T} \to \mathrm{Set}$ を考えることに等しい．

3 Burnside 環

3.1 有限 G-集合の圏と Burnside 環

Mackey 関手の中で最も特別な役割を果たすのが, Burnside 環のなす Mackey 関手である．Burnside 環は，Burnside の論文 [Bu55] におけるアイデアをもとに，Solomon により環として定式化された ([So67]).

定義 3.1 有限群 G に対し，有限 G-集合の圏を ${}_G\mathrm{set}$ で表す．圏 ${}_G\mathrm{set}$ における直和・直積は同型類の全体 $c\ell({}_G\mathrm{set}) = {}_G\mathrm{set}/_{\cong}$ に可換半環の構造を与える．これを**半 Burnside 環**とよぶ．さらに負の元を付け加えて得られる可換環 (= Grothendieck 環 $K_0(c\ell({}_G\mathrm{set}))$) を **Burnside 環**とよび，$B(G)$ または $\Omega(G)$ で表す.

加法的には注 2 から，推移的 G-集合の同型類を基底とする自由 $\mathbb{Z}$-加群をなすことが分かる．従って，G の部分群の共役類の全体を

$$\mathcal{O}(G) = \{H \mid H \leq G\}/\underset{\text{共役}}{\sim}$$

で表すならば，加法群の同型 $B(G) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{H\in\mathcal{O}(G)} \mathbb{Z}\, G/H$ が得られる．$\mathcal{O}(G)$ は，共役を許した包含関係により順序集合となることに注意.

この基底に関する乗法の振舞いは，注 1 で $H = G$ にとれば,

$$G/K \cdot G/L = \sum_{LgK\in L\backslash G/K} G/(K\cap L^g) \qquad ({}^{\forall}K, L \in \mathcal{O}(G)) \tag{3.1}$$

で記述されることが分かる．特に，$1 = G/G$ は $B(G)$ の単位元となる.

3.2 Burnside 関手

群 G の取り換えに対し，Burnside 環の間には次のような写像が得られる.

定義 3.2 $H \leq G$ を部分群とする.

(1) G-集合 X に対して，作用の制限により得られる H-集合 X を $X{\downarrow}^G_H = \mathrm{Res}^G_H X$ で表す．これにより，直和と直積を保つ関手

$$\mathrm{Res}^G_H\colon {}_G\mathrm{set} \to {}_H\mathrm{set}$$

が得られ，環準同型 $\mathrm{res}^G_H\colon B(G) \to B(H)$ が導かれる.

(2) H-集合 Y に対し，G-集合 $Y{\uparrow}^G_H = \mathrm{Ind}^G_H Y$ を直積集合 $G \times Y$ の同値関係

$$(gh, y) \sim (g, hy) \qquad (g \in G, h \in H, y \in Y)$$

による商として $\mathrm{Ind}^G_H = (G \times Y)/\sim$ と定める．これにより，直和を保つ関手

$$\mathrm{Ind}^G_H\colon {}_H\mathrm{set} \to {}_G\mathrm{set}$$

が得られ，加法的誘導とよばれる写像 $\mathrm{ind}^G_H\colon B(H) \to B(G)$ が導かれる.

(3) H-集合 Y に対し，$\mathrm{Map}_H(G, Y)$ を対応させることにより，直積を保つ関手

$$\mathrm{Jnd}^G_H\colon {}_H\mathrm{set} \to {}_G\mathrm{set}$$

が得られ，乗法的誘導とよばれる写像 $\mathrm{jnd}_H^G\colon B(H)\to B(G)$ が導かれる．ここで $\mathrm{Map}_H(G,Y)$ は

$$\alpha(hx)=h\alpha(x)\quad ({}^{\forall}x\in G, h\in H)$$

を満たす写像 $\alpha\colon G\to Y$ のなす集合であり，$g\in G$ の $\alpha\in\mathrm{Map}_H(G,Y)$ への作用は

$$\alpha\mapsto {}^g\alpha,\qquad {}^g\alpha(x)=\alpha(xg^{-1})\quad ({}^{\forall}x\in G)$$

により定義される．

(4) $f\colon G\xrightarrow{\cong}G'$ を有限群の同型とする．このとき，f^{-1} による作用の引き戻しから生じる圏同値

$$\mathrm{Iso}(f)\colon {}_G\mathrm{set}\xrightarrow{\simeq}{}_{G'}\mathrm{set}$$

は，環の同型 $B(G)\overset{\cong}{\to}B(G')$ を導く．特に $g\in G, H\leq G$ のとき，共役による部分群の同型 $H\overset{\cong}{\to}{}^gH$ から，環同型 $c_{g,H}\colon B(H)\overset{\cong}{\to}B({}^gH)$ が導かれる．

これらの写像を構造射として，次のように Mackey 関手が得られる．

命題-定義 3.3　G を有限群とし，可換環の族 $\{B(H)\}_{H\leq G}$ を考える．

(1) 環 $B(H)$ の乗法構造を忘れて加法群とみなすとき, $B=\{B(H),\mathrm{res}_K^H,\mathrm{ind}_K^H,c_{g,H}\}$ は Mackey 関手をなす．これを **Burnside 関手**とよぶ．加法構造を扱っていることを明示するときは，B^{α} と表すことにする．

(2) 環 $B(H)$ の加法構造を忘れて乗法的なモノイドとみなすとき, $B^{\mu}=\{B(H),\mathrm{res}_K^H,\mathrm{jnd}_K^H,c_{g,H}\}$ は半 Mackey 関手をなす．

Burnside 関手を両変的な関手として与える場合は，次を用いるとよい．

定義 3.4　G-集合 $X\in\mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対し，${}_G\mathrm{set}/X$ で X 上の G-集合の圏を表す．すなわち，有限 G-集合 A と X への G-写像の組 $(A,p)=(A\overset{p}{\to}X)$ を対象とする圏である．

直和と X 上のファイバー積から，同型類全体 $c\ell({}_G\mathrm{set}/X)$ に和と積が誘導され，可換半環をなす．さらに Grothendieck 環をとり，$B(X)=K_0(c\ell({}_G\mathrm{set}/X))$ と定める．$(A\overset{p}{\to}X)$ の $B(X)$ における像を $[A\overset{p}{\to}X]$ で表す．

命題 6　Burnside 関手 $B^{\alpha}=(B^*,B_*)$ が，次のように得られる．

- G-集合 X には可換環 $B(X)$ (を加法群とみなしたもの) を対応させる,
- G-写像 $f\in{}_G\mathrm{set}(X,Y)$ に対して，制限 $B^*(f)$ および推移 $B_*(f)$ を以下で定める．
  - $[B\overset{q}{\to}Y]\in c\ell({}_G\mathrm{set}/Y)$ に対して，$B^*(f)([B\overset{q}{\to}Y])=[X\times_Y B\xrightarrow{p_X}X]$.
  - $[A\overset{p}{\to}X]\in c\ell({}_G\mathrm{set}/X)$ に対して，$B_*(f)([A\overset{p}{\to}X])=[A\xrightarrow{f\circ p}Y]$.

ただし,

$$\begin{tikzcd} X\times_Y B \arrow[r, "p_B"] \arrow[d, "p_X"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & B \arrow[d, "q"] \\ X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

はファイバー積.

加法構造を扱っていることを明示するために，以降 B_* は B_+ と書く．また，$B_+(f)$ を**加法的推移**とよぶ．$B^*(f)$ および $B_+(f)$ は，それぞれ f による合成と引き戻しが定める

$$f\circ -\colon {}_G\mathrm{set}/X \to {}_G\mathrm{set}/Y\ , \qquad f^* = -\times_Y X\colon {}_G\mathrm{set}/Y \to {}_G\mathrm{set}/X$$

という関手から誘導される写像となっている．

次を用いると，半 Mackey 関手 B^{μ} も同様に構成が可能である．

補題 1 G-写像 $f\colon X\to Y$ および $p\colon A\to X$ に対し，

$$\Pi_f(A) = \left\{ (y,\sigma) \;\middle|\; \begin{array}{l} y\in Y, \\ \sigma\colon f^{-1}(y)\to A \text{ は写像}, \\ p\circ\sigma \text{ は } f^{-1}(y) \text{ 上で恒等的} \end{array} \right\}, \quad \pi(y,\sigma)=y$$

と定めると，$(\Pi_f(A)\xrightarrow{\pi} Y)\in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set}/Y)$ となる．これは関手 $\Pi_f\colon {}_G\mathrm{set}/X\to {}_G\mathrm{set}/Y$ を定め，f による引き戻しの右随伴をなす．従って，随伴三対

$$f\circ - \quad\dashv\quad f^* \quad\dashv\quad \Pi_f$$

が得られる．

関手 Π_f は積を保つため，乗法を保つ準同型 $c\ell({}_G\mathrm{set}/X)\to c\ell({}_G\mathrm{set}/Y)$ が誘導される．この準同型は Burnside 環の間の準同型に，次のように延長される．

命題 7 任意の G-写像 $f\colon X\to Y$ に対し，

$$\begin{tikzcd} c\ell({}_G\mathrm{set}/X) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & c\ell({}_G\mathrm{set}/Y) \arrow[d, hook] \\ B(X) \arrow[r, "B_\bullet(f)"'] & B(Y) \end{tikzcd}$$

を可換にするような乗法的な射 $B_\bullet(f)$ が一意に存在する．ただし，縦の射は自然な埋め込みを表す．$B_\bullet(f)$ を**乗法的推移**とよぶ．こうして得られる関手 $B_\bullet\colon {}_G\mathrm{set}\to \mathrm{Set}$ は，命題-定義 3.3 の半 Mackey 関手 $B^{\mu}=(B^*,B_\bullet)$ を与える．

注 5 加法を保たない一般の準同型 $c\ell({}_G\mathrm{set}/X)\to c\ell({}_G\mathrm{set}/Y)$ を Grothendieck 群に延長することはできないが，**多項式写像**であれば一意な延長が存在する ([DS88])．命題 7 の $B_\bullet(f)$ も，多項式写像としての延長である．

また，スパン圏を用いると Burnside 関手は次のように表される．

命題 8 命題 5 の圏同値のもと，B^{α} は

$$\mathcal{T}(G/G,-)\colon \mathcal{T}\to \mathrm{Set}$$

という表現可能関手に対応する．

3.3 mark morphism

Burnside 環 $B(G)\xrightarrow{\cong}\bigoplus_{H\in\mathcal{O}(G)}\mathbb{Z}\,G/H$ は (3.1) を積とする環であった．また $\sum_{H\neq G}\mathbb{Z}\,G/H\subseteq B(G)$ は両側イデアルとなり，このイデアルによる剰余で環準同型 $q_G\colon B(G)\to\mathbb{Z}$ が得られる．従って各 $H\in\mathcal{O}(G)$ に対し，制限との合成 $\phi_H = q_H\circ \mathrm{res}^G_H\colon B(G)\to\mathbb{Z}$ は環準同型となる．これらを並べることで，次が得られる．

定義 3.5 環準同型

$$\phi = (\phi_H)\colon B(G) \to \prod_{H \in \mathcal{O}(G)} \mathbb{Z}$$

を **mark morphism** という．終域の環 $C(G) = \prod_{H \in \mathcal{O}(G)} \mathbb{Z}$ はゴースト環とよばれる．$B(G), C(G)$ ともに順序集合 $\mathcal{O}(G)$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$-加群とみなせるため，この基底に関し行列表示すると，

$$\phi = \begin{bmatrix} |G| & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & |N_G(H):H| & 0 & 0 & 0 \\ * & * & |N_G(K):K| & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

という形をした下三角行列で表される．対角成分には，正規化部分群における指数 $|N_G(H):H|$ が並ぶ．特に，ϕ は単射となる．

$B(G)$ を mark morphism によりゴースト環の部分環とみなせば，単元群は

$$B(G)^{\times} \subseteq\ C(G)^{\times} = \prod_{H \in \mathcal{O}(G)} \{\pm 1\}$$

を満たし，基本可換 2-群になると分かる．べき等元 $e \in B(G)$ は単元 $u = 1 - 2e \in B(G)$ を生じるが，G が奇数位数のときは逆に単元 u に対し $(1-u)/2 \in B(G)$ はべき等元を与え[3]，単元とべき等元が 1 対 1 に対応する．

べき等元は素スペクトラム $\operatorname{Spec} B(G)$ の連結成分に 1 対 1 に対応するが，$B(G)$ の素イデアルの様子は Dress [Dr69] により次のように決定されている．

定理 1　素数 p と $H \in \mathcal{O}(G)$ に対し，イデアル $\mathfrak{p}_H(p) \subseteq B(G)$ を

$$\mathfrak{p}_H(p) = \operatorname{Ker}\Bigl(B(G) \xrightarrow{\phi_H} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\Bigr)$$

により定めると，$\operatorname{Spec} B(G) = \{\mathfrak{p}_H(p) \mid H \in \mathcal{O}(G),\ p \text{ は素数}\}$ となる．

同論文において，Dress は $\operatorname{Spec} B(G)$ の連結性と G の可解性が同値となることを示している．これにより，G が奇数位数のときは

$$G \text{ が可解群} \ \Leftrightarrow\ B(G)^{\times} = \{\pm 1\}$$

となる．従って，もし G が奇数位数のときに $B(G)^{\times} = \{\pm 1\}$ となることが直接示されるならば，Feit–Thompson の奇数位数定理 [FT63] の別証が得られることになる．

3.4　べき等元公式

G の部分群 H に対し，$\mathbb{Q}$ 上の Burnside 環 $\mathbb{Q} \otimes B(G)$ の元 e_H^G を

$$e_H^G = \frac{1}{|N_G(H)|} \sum_{D \le H} |D| \mu(D, H)[G/D],$$

ただし，μ は G のすべての部分群の包含関係に関するポセットのメビウス関数，で定める．Gluck，吉田により独立に証明された $\mathbb{Q} \otimes B(G)$ の原始的べき等元公式は以下の通りである ([Gl81]，[Yo83])．

定理 2　$\{e_H^G \mid H \in \mathcal{O}(G)\}$ は $\mathbb{Q} \otimes B(G)$ のすべての原始的べき等元の集合である．

$|G|$ の素因数 p に対し，G の非自明な p-部分群全体の包含関係に関するポセットを $\mathcal{S}_p(G)$ で表す．定理 2 を用いて次のホモロジカル Sylow 定理が証明される ([Gl81]，[Yo83]，[Yo93])．

系 1　$\mathcal{S}_p(G)$ の Euler 標数について

$$\chi(\mathcal{S}_p(G)) \equiv 1 \quad \mod |G|_p$$

が成り立つ．ここで，$|G|_p$ は G の Sylow p-部分群の位数．

3.5　一般 Burnside 環

G の特定の部分群の集合から得られる圏を用いて Burnside 環に類似した環を構成することができる．そのような環の研究の概要を述べよう．$\mathcal{X}$ を G の部分群の集合で G-共役の作用で閉じているものとする．有限 G-集合 X は，任意の点の安定化群がすべて $\mathcal{X}$ に含まれるとき $(G, \mathcal{X})$-集合とよばれる．ある条件を満たす $\mathcal{X}$ について，有限 $(G, \mathcal{X})$-集合が与える G-集合の圏の充満部分圏の直和に関する Grothendieck 群 $\Omega(G, \mathcal{X})$ やその係数環を $\mathbb{Z}_{(p)}$ に拡大したものには，ある種の積構造を一意的に定義できる．この環は，吉田により導入され，G の $\mathcal{X}$ に関する**一般 Burnside 環**とよばれた ([Yo90b]，[Yo93])．$\mathcal{X}$ が G のすべての部分群であるとき $\Omega(G, \mathcal{X})$ は通常の Burnside 環に一致する．G として対称群 S_n，$\mathcal{X}$ として S_n の Young 部分群全体をとると $\Omega(G, \mathcal{X})$ は S_n の指標環に同型である．この同型を応用した結果が [OY01b] にある．丹原は一般線形群の line stabilizer 全体から構成される一般 Burnside 環を用いた研究を行った ([Tam06])．フュージョンシステム [BLO03] の Burnside 環は Díaz と Libman により定義された ([DL09])．その特別な場合が中心的 p-部分群に関する一般 Burnside 環として構成できることが知られている ([Od08])．一般に共通部分をとる操作で閉じていないような $\mathcal{X}$ に関する研究として [OS09]，[OS11] がある．応用としてモンスター単純群 M，Conway 群 $Co1$，Mathieu 群 M_{24} の 2-根基部分群のポセットの Euler 標数が計算されている．

4　丹原関手

4.1　Green 関手と丹原関手

Mackey 関手の圏 $\mathrm{Mack}(G)$ は対称モノイダル圏をなすため，モノイド対象が考えられる．

定義 4.1　$\mathrm{Mack}(G)$ におけるモノイド対象を，G 上の **Green 関手**という．すなわち，Mackey 関手 A が Green 関手であるとは，射 $\mu\colon A\hat{\otimes}A \to A$ および $\varepsilon\colon B \to A$ をもち

$$\begin{tikzcd}
A\hat{\otimes}A\hat{\otimes}A \arrow[r, "\mu\hat{\otimes}\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}\hat{\otimes}\mu"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & A\hat{\otimes}A \arrow[d, "\mu"] \\
A\hat{\otimes}A \arrow[r, "\mu"'] & A
\end{tikzcd}
,\qquad
\begin{tikzcd}
A\hat{\otimes}B \arrow[r, "\mathrm{id}\hat{\otimes}\varepsilon"] \arrow[dr, "\cong"'] & A\hat{\otimes}A \arrow[d, "\mu"] & B\hat{\otimes}A \arrow[l, "\varepsilon\hat{\otimes}\mathrm{id}"'] \arrow[dl, "\cong"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

が可換になるときをいう．Mackey 関手 A が Green 関手になることと，**クロス積**とよばれる，X, Y に関し自然な双線型写像

$$\mathrm{cr}\colon A(X) \times A(Y) \to A(X \times Y) \quad ({}^{\forall}X, Y \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set}))$$

をもつことは同値となる ([Bo97])．$\mathrm{Mack}(G)$ において，Green 関手 A の作用をもつ Mackey 関手は

***A*-加群**とよばれる．A-加群の圏はまたアーベル圏となる．

アーベル群 $\mathbb{Z}$ が環 ($=$ Ab におけるモノイド対象) であるのと同じように，Burnside 関手は Green 関手となる．

命題 9 G-集合 X, Y に対し，$p_X\colon X \times Y \to X$, $p_Y\colon X \times Y \to Y$ をそれぞれの直積成分への射影とし，$\mathrm{cr}\colon B(X) \times B(Y) \to B(X \times Y)$ を

$$(a, b) \mapsto B^*(p_X)(a) \cdot B^*(p_Y)(b) \quad ({}^\forall a \in B(X), b \in B(Y))$$

で定めると，B^α は cr をクロス積とする Green 関手となる．ただし，$\cdot$ は $B(X \times Y)$ における積を表す．

命題 6, 7 で見たように，B は G-写像 $f\colon X \to Y$ に対応する次の三つの構造を有する．

- (制限) $B^*(f)\colon B(Y) \to B(X)$.
- (加法的推移) $B_+(f)\colon B(X) \to B(Y)$.
- (乗法的推移) $B_\bullet(f)\colon B(X) \to B(Y)$.

すなわち，Green 関手 $B^\alpha = (B^*, B_+)$ がさらに乗法的推移をもっているということもできる．あるいは命題-定義 3.3 の言葉で書くならば，可換環とその間の写像の族 $\{B(H), \mathrm{res}^H_K, \mathrm{ind}^H_K, \mathrm{jnd}^H_K, c_{g,H}\}$ として表すこともできる．

Green 関手の中には，Burnside 関手のように乗法的推移をもつものが存在する．これらの Green 関手 T は Burnside 関手と同様，加法部分 (T^*, T_+) と乗法部分 $(T^*, T_\bullet)$ からなる．このような関手は，Mackey 関手あるいは Green 関手のような 2 つ組としてよりも，さらに加法的推移と乗法的推移の関係も合わせて考え，3 つ組と捉える方が自然であると思われる．

丹原は [Tam93] においてこれを，加法的推移 (**T**race) · 乗法的推移 (**N**orm) · 制限射 (**R**estriction) の三つを有する **TNR 関手**という名前で定義した．後に Brun により，**丹原関手 (Tambara functor)** とよばれることになる ([Bru05])．本稿では Brun にならい，この名称で定義を述べる．丹原関手に関する日本語による記事については，[Yo06] や [Od12], [Na12c] などをご覧頂きたい．また最近，Strickland によるサーベイ [St12] が arXiv に掲載された．

丹原関手においては，加法性と乗法性の関係は指数図式を用いて '分配則の G-両変版' ともいえる条件で記述される．

定義 4.2 $f \in {}_G\mathrm{set}(X, Y)$ および $p \in {}_G\mathrm{set}(A, X)$ に対し，随伴性 $f \circ - \dashv f^* \dashv \Pi_f$ から，次を可換にする e が得られる．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & A \arrow[l, "p"'] \arrow[r, phantom, ""] & X \underset{Y}{\times} \Pi_f(A) \arrow[l, "e"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & \square & \Pi_f(A) \arrow[ll, "\pi"] \end{tikzcd} \quad . \tag{4.1}$$

この図式を，f と p から定まる**標準的指数図式** とよぶ．${}_G\mathrm{set}$ の可換図式で標準的指数図式に同型なものは**指数図式**とよばれる．指数図式の性質は，[Tam93] に詳しく記されている．

定義 4.3 ([Tam93], [Bru05]) 関手の 3 つ組 $T = (T^*, T_+, T_\bullet)$ が**丹原関手**であるとは，以下を満たすときをいう．

(1) 加法部分 $T^\alpha = (T^*, T_+)$ は Mackey 関手.

(2) 乗法部分 $T^{\mu} = (T^*, T_{\bullet})$ は半 Mackey 関手.

(3) [分配則] 任意の指数図式 (4.1) に対して，次は可換.

$$\begin{tikzcd} T(X) \arrow[d, "f_{\bullet}"'] & T(A) \arrow[l, "p_+"'] \arrow[r, "e^*"] \arrow[d, phantom, "\circlearrowleft"] & T(X \underset{Y}{\times} \Pi_f(A)) \arrow[d, "f'_{\bullet}"] \\ T(Y) & & T(\Pi_f(A)) \arrow[ll, "\pi_+"] \end{tikzcd} .$$

ここで，G-写像 f に対して $T^*(f) = f^*$，$T_+(f) = f_+$，$T_{\bullet}(f) = f_{\bullet}$ という略記を用いている.

丹原関手は可換環の G-両変版である．$T = (T^*, T_+, T_{\bullet})$ が丹原関手のとき，加法部分 T^{α} の定める和と乗法部分 T^{μ} の定める積により $T(X)$ は任意の $X \in \mathrm{Ob}({}_G\mathrm{set})$ に対して可換環となる．制限は環の射となる一方，加法的推移は加法のみを，乗法的推移は乗法のみを保つ射となる.

同様に，加法部分を半 Mackey 関手とのみ仮定して，**半丹原関手**が定義される．T が半丹原関手のとき各 $T(X)$ は可換半環となる．半丹原関手 T が丹原関手となるのは，すべての $T(X)$ が環となる場合に他ならない.

また定義 2.5 と同様に，丹原関手の射が定義される．すなわち (半) 丹原関手の射は，制限・加法的推移・乗法的推移のそれぞれに関して自然な写像の族として定義すればよい．あるいは，次のように定義しても同じである.

定義 4.4 (半) 丹原関手 T から S への射とは，次の 2 条件を満たす写像の族 $\varphi = \{\varphi_X : T(X) \to S(X)\}$ をいう.

(i) $\varphi : T^{\alpha} \to S^{\alpha}$ は (半) Mackey 関手の射.

(ii) $\varphi : T^{\mu} \to S^{\mu}$ は半 Mackey 関手の射.

このとき φ_X は自然に (半) 環の準同型となる．G 上の半丹原関手の圏を $\mathrm{STam}(G)$ で表し，丹原関手のなす充満部分圏を $\mathrm{Tam}(G)$ で表す.

丹原による次の定理は，可換半環の Grothendieck 環をとる関手の，G-両変版を与えるものである.

定理 3 ([Tam93]) 包含関手 $\mathrm{Tam}(G) \to \mathrm{STam}(G)$ は左随伴関手をもつ.

半丹原関手から丹原関手を構成する上で問題となるのは，ここでも乗法的誘導の延長である．注 5 と同様に多項式写像を用いて実現される.

注 6 半丹原関手の概念自体は，直和とファイバー積を有しファイバー積が右随伴をもつような圏には自然に拡張することができる．実際 [GK13] などでは，局所カルテシアン閉圏上で ‘多項式関手’ という名称で一般的に扱われている.

一方で，丹原の定理のように有限性を本質的に用いた議論は一般の圏では困難であるため，丹原関手について充分に論じられるためには何らかの有限性を課す必要があると思われる．なお，プロ有限群への拡張は [Na09] でなされている.

4.2 Witt–Burnside 関手

丹原の仕事から 10 余年後，Brun により丹原関手の重要性が認識されたのは，Witt–Burnside 構成においてであった．**Witt–Burnside 構成**とは，プロ有限群 G と G-代数 A から **Witt–Burnside 環**という新たな可換環 $\mathbb{W}_G(A)$ を与える構成である．特に，プロ有限群 G と可換環 R が与えられると，R に自明な G-作用を付与することで Witt–Burnside 環 $\mathbb{W}_G(R)$ が得られる.

注 7　Witt–Burnside 環は，その名前が示すように，Witt 環と Burnside 環を次のように同時に一般化している ([DS88]).

- $G = \mathbb{Z}_p$ にとると，$\mathbb{W}_{\mathbb{Z}_p}(R)$ は可換環 R の p-typical Witt 環に一致する．
- $G = \hat{\mathbb{Z}}$ にとると，$\mathbb{W}_{\hat{\mathbb{Z}}}(R)$ は可換環 R の普遍 Witt 環に一致する．
- $R = \mathbb{Z}$ にとると，$\mathbb{W}_G(\mathbb{Z})$ はプロ有限群 G の**完備 Burnside 環** $\hat{B}(G)$ に一致する．

完備 Burnside 環とは，G の開部分群 N による離散剰余群 G/N の Burnside 環の射影極限

$$\hat{B}(G) = \varprojlim_{N \lhd G:\ \mathrm{open}} B(G/N)$$

のことをいう．G が有限の場合は通常の Burnside 環に一致し，$\hat{B}(G) = B(G)$ となる．

Brun の結果 [Bru05] は，この環構造が，丹原関手を介して自然に得られることを示すものである．丹原関手 T に対し $G/\{e\}$ ($\{e\} \le G$ は自明な部分群を表す) での値 $T(G/\{e\})$ は可換な G-代数となるので，その G-不変部分環 $T(G/\{e\})^G$ をとることができる．この操作は関手

$$\mathrm{ev}\colon \mathrm{Tam}(G) \to \mathrm{Ring}\ ;\ T \mapsto T(G/\{e\})^G,$$

を引き起こす．Brun はこの関手が左随伴関手をもち，次のように Witt–Burnside 環と関係付けられることを示した．

定理 4　関手 $\mathrm{ev}\colon \mathrm{Tam}(G) \to \mathrm{Ring}$ は，左随伴関手

$$\mathbb{W}\colon \mathrm{Ring} \to \mathrm{Tam}(G)$$

をもち，任意の可換環 R に対して $\mathbb{W}(R)(G/G) \cong \mathbb{W}_G(R)$ を満たす．

これにより Witt–Burnside 環の環構造が，関手の随伴性に起因する自然なものであると保障される．

4.3　丹原関手の一般論

Brun により Witt–Burnside 構成に用いられた丹原関手であるが，それ自体は前述のように可換環の G-両変類似物とみなすことができる．この観点によれば，可換環に対する種々の操作の G-両変版を考察することは，丹原関手の一般論の構築に役立つと考えられる．例えば上述の丹原の定理は，可換半環を補完して可換環を得る操作，すなわち Grothendieck 環の G-両変版とみなせる．

実際に，‘モノイド環’ ‘イデアル’ ‘分数環’ ‘多項式環’ ‘素スペクトラム (Spec)’ などといった概念は，丹原関手に対する G-両変版が得られる ([Na11]–[Na12b], [Na13])．概要は，[Na12c] をご覧頂きたい．また，G が有限巡回 p-群の場合の $\mathrm{Spec}B$ の位相構造は，[Na14] において決定されている．

次の命題は，モノイド環をとる操作の G-両変版を与える．

命題 10 ([Na11])　乗法部分をとる関手 $(-)^{\mu}\colon \mathrm{Tam}(G) \to \mathrm{SMack}(G)$ の左随伴関手

$$B[-]\colon \mathrm{SMack}(G) \to \mathrm{Tam}(G)$$

が存在する．これを**丹原化**関手とよぶことにする．G が自明な場合は，モノイド環をとる関手 $\mathbb{Z}[-]\colon \mathrm{Mon} \to \mathrm{Ring}$ に他ならない．

さらに丹原関手のテンソル積により，係数を一般の丹原関手にとることができる．

$$\mathrm{Tam}(G) \times \mathrm{SMack}(G) \to \mathrm{Tam}(G)\ ;\ (T, M) \mapsto T[M] := T \hat{\otimes} B[M]. \tag{4.2}$$

これは可換環 R 係数のモノイド環をとる操作の G-両変版を与える．

環の場合の類似を追うならば，モノイド $\mathbb{N}$ の $\mathrm{SMack}(G)$ における G-両変版を丹原化することで，丹原関手 T を係数とする '多項式環の G-両変版' が得られると期待できる．そのためには，各部分群 $H \leq G$ に対して定まる次のような半 Mackey 関手を用いるとよい．

命題 11 ([Na13]) 任意の $H \leq G$ に対し，次の性質を満たす半 Mackey 関手 $\mathfrak{X}_H$ が存在する．

- 任意の半 Mackey 関手 $M \in \mathrm{Ob}(\mathrm{SMack}(G))$ に対し，自然な全単射

$$\mathrm{SMack}(G)(\mathfrak{X}_H, M) \cong M(G/H)^{N_G(H)/H}$$

が存在．ここで，$N_G(H) \leq G$ は G における H の正規化群を表す．

このとき $T[\mathfrak{X}_H]$ はいずれも 'H での変数の代入' に相当する普遍性 [Na13] をもち，G が自明な場合は環上の一変数多項式環に一致する．

5 Dress 構成

5.1 射影性

G-集合の用語を用いた Mackey 関手の制限と誘導を定義する．$H \leq G$ を部分群とする．定義 3.2 の制限と誘導を用いて Mackey 関手の制限と誘導を

$$M{\downarrow}^G_H(Y) = M(Y{\uparrow}^G_H), \quad N{\uparrow}^G_H(X) = N(X{\downarrow}^G_H),$$

ただし，Y は H-集合，X は G-集合，と定める．自然な G-写像 $X{\downarrow}^G_H{\uparrow}^G_H \to X$ に M の共変部分 M_* を施して Mackey 関手の射 $M{\downarrow}^G_H{\uparrow}^G_H \to M$ を得る．G の任意の部分群の集合を $\mathcal{X}$ とする．Mackey 関手の射

$$\bigoplus_{H \in \mathcal{X}} M{\downarrow}^G_H{\uparrow}^G_H \to M$$

が $\mathrm{Mack}(G)$ で分裂エピ射であるとき，Mackey 関手 M は **$\mathcal{X}$-射影的**であるという．双対的に M の反変部分 M^* に同様の操作を施し得られる Mackey 関手の射

$$M \to \bigoplus_{H \in \mathcal{X}} M{\downarrow}^G_H{\uparrow}^G_H$$

が $\mathrm{Mack}(G)$ で分裂モニック射であるとき，Mackey 関手 M は **$\mathcal{X}$-入射的**であるという．

誘導に関する事実を述べる際に便利な G-集合を用いた記法を準備する．G-集合 X と Mackey 関手 M に対し新たな Mackey 関手 M_X を以下のように定める．

- 対象　$M_X(Y) = M(X \times Y)$,
- 射　G-写像 $a : X_1 \to X_2$ に対し $M_{X*}(a) = M_*(a \times 1)$，$M_X{}^*(a) = M^*(a \times 1)$.

自然変換 $\theta_X : M_X \to M$, $\theta^X : M \to M_X$ を

$$\theta_X(Y) = M_*(p_Y) : M_X(Y) \to M(Y), \quad \theta^X(Y) = M^*(p_Y) : M(Y) \to M_X(Y),$$

ただし，$p_Y : X \times Y \to Y$ は射影，で定義する．

命題 12　$\mathcal{X}$ を G の部分群の集合，$X=\cup_{H\in\mathcal{X}}G/H$ を疎な直和とする．以下は同値である．

(1) M は $\mathcal{X}$-射影的.

(2) M は $\mathcal{X}$-入射的.

(3) θ_X は分裂的全射.

(4) θ^X は分裂的入射.

(5) M は M_X の直和因子.

命題 13　次が成り立つ.

(1) X, Y を G-集合, M を Mackey 関手とする．M が X-射影的かつ Y-射影的ならば, M は $X\times Y$-射影的である．

(2) $\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ を部分群と共役で閉じている部分群の族とする．M が $\mathcal{X}$-射影的かつ $\mathcal{Y}$-射影的ならば, M は $\mathcal{X}\cap\mathcal{Y}$-射影的である．

この命題により M が $\mathcal{X}$-射影的となるような，共役と部分群をとる操作で閉じている極小な $\mathcal{X}$ が一意的に存在することが分かる．Green はこの $\mathcal{X}$ を M の **defect base** とよんだ．M の defect base は, およそ, $\mathcal{X}$ に属する部分群からの誘導射の和が全射かつ分裂的であるような極小な集合である．M の $\mathcal{X}$-射影性を示すためには，θ_X，$X=\cup_{H\in\mathcal{X}}G/H$ の全射性を示すだけで充分であることが Dress により示された．

定理 5　M を Mackey 関手，$\mathcal{X}$ を G の部分群の集合とする．M が Mack(G) で $\mathcal{X}$-射影的であるためには誘導の和

$$\sum_{H\in\mathcal{X}}\mathrm{ind}_H^G:\bigoplus_{H\in\mathcal{X}}M(G/H)\to M(G/G)$$

が全射であることが充分である．

この定理により，いろいろな誘導定理が相対射影性を用いて言い換えられる．M が G の $\mathbb{Q}$ 上の指標環 Green 関手，$\mathcal{X}$ は G の巡回部分群全体の集合のとき，Artin の誘導定理である．M が G の $\mathbb{Z}$ 上の指標環 Green 関手，$\mathcal{X}$ は G の基本可換部分群全体の集合のとき，Brauer の誘導定理である．誘導定理とは直接関わらないが，自明な例として M が G の Burnside 関手，$\mathcal{X}$ は G のすべての部分群の集合のときが挙げられる．詳細は，誘導定理については [CR87]，[Be98]，Mackey 関手との関わりについては [Th88], [Th90], [Sn94], [Bo00a], [We00] をご覧頂きたい．竹ヶ原は，[Tak10] でいろいろな誘導定理を統一的に扱うために多重 Burnside 環を紹介している．

5.2　斜 G-集合と斜 Burnside 環

Jacobson は G-モノイドによる Dress 構成を行った ([Ja86])．一般に非可換 G-モノイドの場合に Green 関手に Dress 構成を用いることで新たな環，斜 Burnside 環を作る試みは吉田による ([Yo97])．S を有限 G-モノイドとする．重み写像とよばれる G-写像 $\|\cdot\|:X\to S;\ x\mapsto\|x\|$ が存在する G-集合 X を **(S 上の) 斜 G-集合**とよぶ．斜 G-集合 X から Y への G-写像 f は，すべての $x\in X$ について $\|f(x)\|=\|x\|$ が成り立つとき**斜 G-写像**とよぶ．射の合成を写像の合成として与えられる，S 上の斜 G-集合と斜 G-写像の圏を ${}_G\mathrm{set}/S$ と書く．定義 3.4 の記号とも符合がとれていることに注意．斜 G-集合 X,Y の**テンソル積** $X\otimes Y$ とは，直積 G-集合 $X\times Y$ に重み写像を $\|(x,y)\|=\|x\|\cdot\|y\|$ $(g\in G, x\in X, y\in Y)$ として与えられる斜 G-集合である．推移的斜 G-集合同士のテンソル積の分解は

$$(G/D)_s \otimes (G/E)_t \cong \coprod_{DgE \in D\backslash G/E} (G/D \cap {}^gE)_{s \cdot {}^g t}$$

のように与えられる．テンソル積で圏 ${}_G\mathrm{set}/S$ は，I (ただし，$\|*\| = 1$) をユニットにもつモノイダル圏となる．${}_G\mathrm{set}/S$ の直和に関する Grothendieck 群 $\Omega_S(G)$ にテンソル積 $[X] \cdot [Y] := [X \otimes Y]$ で乗法が定義された環を **(S 上の G の) 斜 Burnside 環**とよぶ．S が自明な G-モノイド 1 のとき $\Omega_S(G)$ は Burnside 環 $B(G)$ と同型である．また，G が自明な群 $\mathbf{1}$ のとき $\Omega_S(\mathbf{1})$ はモノイド環となる．G の正規部分群 H は，G の共役作用で G-モノイドとみなすとき H^c と書く．一般に斜 Burnside 環は非可換環であるが，非可換なモノイド，例えば，G が非アーベル群であっても $\Omega_{G^c}(G)$ は可換環であることが知られている．標数 0 の体係数の斜 Burnside 環の原始的べき等元公式が [OY01a] で与えられている．正標数の場合には Brauer 対と関連付けられ [Bo03b] で論じられている．

5.3 Green 関手の Dress 構成

斜 Burnside 環が構成された背景には Green 関手の非可換 G-モノイドによる Dress 構成がある．k を任意の体とする．斜 Burnside 環と同様に群環 kG の Drinfel'd double $D(kG)$ の表現環 $R(D(kG))$ が構成できる．X 上の G-同変 k-ベクトル束全体を $R_k(X)$ とすると，R_k は Green 関手となる．特に $R_k(G/K)$ は K の k 上の表現環 $R_k(K)$ と同型である．この例に適用できる結果として次がある．

定理 6 ([Bo03a], [OY04]) A を G の Green 関手，S を G-モノイドとする．S が与える A の Dress 構成 A_S は Green 関手となる．

実際，任意の G-集合 X, Y に対して，S の積から得られる G-写像

$$X \times S \times Y \times S \cong (X \times Y) \times (S \times S) \xrightarrow{\text{積}} (X \times Y) \times S$$

を m で表すとき，A のクロス積を用いて A_S 上に

$$A(X \times S) \times A(Y \times S) \xrightarrow{\mathrm{cr}} A(X \times S \times Y \times S) \xrightarrow{m_*} A((X \times Y) \times S)$$

というクロス積が得られる．

Green 関手の Dress 構成法には，例えば，以下のような代数系に共通する性質を包含しているという側面があることが分かる．

A	$A(G/K)$	$A_{G^c}(I)$
B	$B(K)$	$\Omega_{G^c}(G)$：斜 Burnside 環
R_k	$R_k(K)$	$R(D(kG))$：kG の Drinfel'd double の表現環

Green 関手と斜 Burnside 環，Drinfel'd double の表現環に関わる研究として [Wi96], [Od07], [Tak11], [Tak12] がある．

5.4 丹原関手の Dress 構成

丹原関手の場合は次のようになる．加法部分に対する変形は Mackey 関手の Dress 構成を用いればよいので，乗法的推移についてのみ新たに考えればよいことに注意.

命題 14 ([OY11], [Tam]) T を丹原関手，S を可換 G-モノイドとする．任意の G-写像 $f\colon X \to Y$ に対して，f と射影 $p_X\colon X \times S \to X$ から定まる標準的指数図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "f"'] & X \times S \arrow[l, "p_X"'] \arrow[d, phantom, "\square"] & X \times_Y \Pi_f(X \times S) \arrow[l, "e"'] \arrow[d, "f'"] \\ Y & & \Pi_f(X \times S) \arrow[ll, "\pi"] \end{tikzcd}$$

と，射影 $p_S\colon X \times S \to S$ および G-写像

$$\mu(y,\sigma) = (y, \prod_{x \in f^{-1}(y)} p_S \circ \sigma(x))$$

を用いて，乗法的誘導を

$$(T_S)_\bullet(f) = T_+(\mu) \circ T_\bullet(f') \circ T^*(e)$$

と定義する．これにより，T_S は丹原関手となる．

この構成で，関手 $\mathrm{Tam}(G) \times G\text{-Mon} \to \mathrm{Tam}(G)$ が得られる．前述の丹原化関手とは，次のように関係する．

命題 15　命題 2 の関手 $\mathcal{P}\colon G\text{-Mon} \hookrightarrow \mathrm{SMack}(G)$ および命題 10 の関手 (4.2) の間に，

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Tam}(G) \times G\text{-Mon} \arrow[rr, hook, "\mathrm{Id}\times\mathcal{P}"] \arrow[dr] \arrow[rr, phantom, shift right=6, "\circlearrowleft"] & & \mathrm{Tam}(G) \times \mathrm{SMack}(G) \arrow[dl, "(4.2)"] \\ & \mathrm{Tam}(G) & \end{tikzcd}$$

という関手の可換図式が得られる．

6　Alperin 予想と Mackey 関手

Alperin の重み予想 [Al87] と同値な命題を主張する道具として Thévenaz–Webb [TW90] により用いられたことから，誘導定理の証明に用いられた Mackey 関手は，再び顧みられる機会を得た．有限群 G に対し，$\mathrm{np}(G)$ で非射影既約 kG-加群の同型類の個数とする．

予想 1 ([Al87])　G の重みの個数は既約 kG 加群の同型類の個数と等しい．

以下の (予想 2) が (予想 1) と同値であることが [TW90] で示されている．

予想 2 ([TW90])　すべての有限群 G，すべての素数 p に対し $M_1(H), M_2(H)$ が標数が 0 か p と互いに素である体上のベクトル空間となる Mackey 関手 M_1, M_2 が存在し以下の条件を満たす．

(1) すべての部分群 H に対し $M_1\downarrow^G_H, M_2\downarrow^G_H$ が $\mathcal{X}$-射影的である．ただし，$\mathcal{X}$ は H の p-局所部分群の族である．

(2) すべての部分群 H に対し $\dim M_1(H) - \dim M_2(H) = \mathrm{np}(H)$ が成り立つ．

例えば，M_2 として自明な Mackey 関手，すなわち，すべての部分群に対し 0 を対応させるものをとると，予想の二つ目の条件 $\dim M_1(H) = \mathrm{np}(H)$ を満たすような Mackey 関手 M_1 の非存在性が証明できるような有限群 G と素数 p の例が以下のように指摘されている．Alperin 予想が正しければ，非自明な二つの Mackey 関手の存在が必要になることを示唆している．

命題 16 ([TW90])　$p = 3$ のとき，非自明な正規 3-部分群をもつ有限群 G が存在し，すべての部分群 H に対し $\dim M(H) = \mathrm{np}(H)$ を満たす Mackey 関手 M が存在しない．

モジュラー表現論が確立している Sylow p-部分群が巡回群となる有限群 G の場合には, $\dim M(H) = \mathrm{np}(H)$ を満たす Mackey 関手 M が存在することが示されている．M は位数 p の部分群 C に対し, $N_G(C)/C$ のモジュラー指標の環の Mackey 関手から，$N_G(C)$ への膨張関手のいくつかの直和をとることで与えられる．

あまり知られていない Alperin 予想の言い換えの一つに Bouc による simple Green functor 版がある ([Bo97, p.295])．一般に体 k 上の Green 関手 A に対しその既約 A-加群は G の部分群 H と，H から構成されるある代数の上の既約加群 V でインデックス付けられる．それを $S_{H,V}$ と書く．Mackey 関手の自然変換として定義される Green 関手 $\mathcal{H}(S_{H,V}, S_{H,V})$ が既約となるとき，Bouc は $S_{H,V}$ を **endosimple** とよんだ．素数 p に対し，B_p で Burnside Green 関手 B の p-part，k で標数 p の代数的閉体とする．このとき B_p-加群 $S_{H,V}$ が endosimple であるための必要十分条件は $kN_G(Q)$-加群 V，ただし，Q は G の p-部分群，が $kN_G(Q)/Q$-加群として射影的既約加群となることである．従って，Alperin 予想は次のように表すことができる ([Bo97, p. 304])．

予想 3　既約 kG-加群の同型類の個数と endosimple B_p-加群の同型類の個数は等しい．

圏論的構成とは直接的には関係がないようであるが，Burnside 環と Alperin 予想に関する仕事として，Thévenaz による [Th92]，[Th93] がある．

7　バイセット関手

7.1　バイセット関手

G の逆群 G^{op} は，集合として $G^{\mathrm{op}} = G$ で $g, h \in G^{\mathrm{op}}$ の積 gh を G における積 hg として定義される群である．

定義 7.1　G，H を有限群とする．左 $(H \times G^{\mathrm{op}})$-集合を (H, G)-バイセットとよぶ．

有限 (H, G)-バイセットの Grothendieck 群は群として Burnside 環 $B(H \times G^{\mathrm{op}})$ となる．この群を $B(G, H)$ と書く．G，H，K が有限群，U を (H, G)-バイセット，V を (K, H)-バイセットのとき，V と U の合成は直積 $V \times U$ に右 H-作用を $(v, u) \cdot h = (v \cdot h, h^{-1} \cdot u)$ で定めたときの H-軌道とする．それを $V \times_H U$ と書く．$V \times_H U$ は自然に (K, G)-バイセットとなる．G は G 自身の積で定まる左右からの G-作用で (G, G)-バイセットとなる．このバイセットを Id_G で表す．

定義 7.2　有限群の**バイセット圏** $\mathcal{C}$ は以下のように定義される圏である．

- $\mathcal{C}$ の対象は有限群である．
- 有限群 G, H に対し，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G, H) = B(G, H)$．
- 有限群 G, H, K に対し，射 $u \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(G, H)$ と $v \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(H, K)$ の合成 $v \circ u$ は $v \times_H u$ と等しい．
- 有限群 G に対し，G の圏 $\mathcal{C}$ における恒等射は $[\mathrm{Id}_G]$ と等しい．

G の部分群 H と H の正規部分群 N に対し H/N は G の **section** とよばれる．G と H が有限群であるならば，$\mathcal{C}$ 内の G から H への任意の射は，$H \times G$ の部分群 L に対し $[(H \times G)/L]$ という形の射の整数係数の線形結合である．そのような任意の射は，適当な G の section B/A，H の section D/C と群準同型 $f : B/A \to D/C$ を用いて $\mathcal{C}$ 内で合成

$$G \xrightarrow{\mathrm{res}^G_B} B \xrightarrow{\mathrm{def}^B_{B/A}} B/A \xrightarrow{\mathrm{iso}(f)} D/C \xrightarrow{\mathrm{inf}^D_{D/C}} D \xrightarrow{\mathrm{ind}^H_D} H$$

に分解される．

定義 7.3　R を単位元をもつ可換環，$\mathcal{D}$ を $\mathcal{C}$ のプレ加法部分圏とする．$R\mathcal{D}$ から R-加群への R-線形関手を (R-加群に値をもつ) $\mathcal{D}$ 上の**バイセット関手**とよぶ．

$\mathcal{D}$ 上のバイセット関手を対象，射を自然変換，射の合成を自然変換の合成として得られる圏を $\mathcal{F}_{\mathcal{D},R}$ と書く．

7.2　Dade 群

バイセット関手が重要な役割を果たした例として Dade 群の分類に関する結果を概観する．詳細は [Th07] をご覧頂きたい．

P を有限 p-群，k を標数 p の体とする．kP-加群 M は P の作用で不変な基底 X をもつとき **permutation 加群**という．このとき，$M = kX$ と書く．kP-加群 M は，自己準同型加群 $\mathrm{End}_k(M)$ が permutation 加群であるとき **endo-permutation 加群**とよばれる．ただし，$\mathrm{End}_k(M)$ は，$g \in P$，$\phi \in \mathrm{End}_k(M)$ に対し，${}^g\phi(m) = g \cdot \phi(g^{-1} \cdot m), m \in M$ で定義される kP-加群とする．kP-加群 M は，射影 kP-加群 F が存在し，kP-加群として $\mathrm{End}_k(M) \cong k \oplus F$ が成り立つとき，**endo-trivial** とよばれる．任意の射影 kP-加群は自由 kP-加群なので，P-不変な基底をもつ．従って，endo-trivial 加群は endo-permutation 加群である．endo-trivial 加群の概念は Dade [Da78b] による．endo-permutation kP-加群の分類問題は vertex[4)] P をもつ直既約因子を少なくとも一つもつ場合 (**capped** とよばれる) を分類することで充分であることが知られている．今後，capped endo-permutation 加群を単に endo-permutation 加群とよぶ．endo-permutation kP-加群 M の直和因子は vertex P をもつとき互いに同型である ([Da78b]) から，M は同型を除いて一意的な vertex P をもつ直既約因子をもつ．この加群を M の **cap** とよび，M_0 と書く．二つの endo-permutation kP-加群 M，N は，それらの cap が同型であるとき**同値**であるといい，$M \sim N$ と書く．従って，$M \sim N \Leftrightarrow M_0 \cong N_0$ が成り立つ．$D(P)$ を同値関係 $\sim$ に関する endo-permutation kP-加群の同型類の集合とする．$[M]$ で endo-permutation 加群 M の同値類とする．集合 $D(P)$ は $[M] + [N] = [M \otimes N]$ で和が定義されたアーベル群となる．M が endo-permutation kP-加群であるとき，その k-双対 $M^* = \mathrm{Hom}_k(M, k)$ も endo-permutation kP-加群となり，$M \otimes M^* \cong k \oplus kY$，ただし，$Y$ は P-集合，が成り立つので，$[M \otimes M^*] = [k]$ となる．よって，$D(P)$ の零元は trivial module の同値類 $[k]$，$[M]$ の逆元は $[M^*]$ である．群 $D(P)$ は P の **Dade 群**とよばれる．定義より群 $D(P)$ は P が位数 8 の四元数群 Q_8 の場合を除き，体 k に依存しないことが知られている．

P の部分群 Q に対し制限 $\mathrm{res}^P_Q : D(P) \to D(Q)$，また，逆方向の写像として，テンソル誘導 $\mathrm{ten}^P_Q : D(Q) \to D(P)$ が存在する．P の正規部分群 R に対し膨張 $\mathrm{inf}^P_{P/R} : D(P/R) \to D(P)$，また，逆方向の写像，収縮 $\mathrm{def}^P_{P/R} : D(P) \to D(P/R) : [M] \mapsto [M_R]$ が定義できる ([Da78a])．上のいくつかの写像の合成を以下のように特別な記法で表す．P の section Q/R に対し

$$\mathrm{defres}^P_{Q/R} = \mathrm{def}^Q_{Q/R}\mathrm{res}^P_Q : D(P) \to D(Q/R), \quad \mathrm{teninf}^P_{Q/R} = \mathrm{ten}^P_Q\mathrm{inf}^Q_{Q/R} : D(Q/R) \to D(P)$$

と定める．

次に endo-trivial 加群の群 $T(P)$ を構成する．endo-trivial 加群に関する日本語による記事については，[OSH10] をご覧頂きたい．任意の endo-trivial kP-加群 M は，同型を除いて $M = M_0 \oplus F$，ただし，F は自由 kP-加群，と書くことができる．任意の同型類は，直既約 endo-trivial 加群 L と

$L \oplus (free)$ という形の加群全体からなる．endo-trivial 加群の同型類全体の集合 $T(P)$ は，テンソル積から引き起こされるアーベル群の構造が与えられる．$T(P)$ は **endo-trivial 加群**の群とよばれる．endo-trivial 加群 M の同型類を endo-permutation 加群の同型類 $[M]$ に対応させる標準的単射 $i : T(P) \to D(P)$ が存在する．endo-trivial 加群の重要な特徴付け ([Pu90, 2.1.2]) により $T(P)$ は $D(P)$ の部分群とみなすことができる．

以下，genetic section を定義するために p-群の有理表現論における重要な役割を演じる p-群のクラスに関する事実を準備する．p-群 P は二つの位数 p の巡回群の直積 $(C_p)^2$ と同型な正規部分群をもたないとき **normal p-rank 1 をもつ**という．P が normal p-rank 1 をもつならば，[Go68, Theorem 4.10] より P は，p が奇数のとき巡回群，$p = 2$ のときは C_{2^n} $(n \geq 0)$，Q_{2^n} $(n \geq 3)$，D_{2^n} $(n \geq 4)$，SD_{2^n} $(n \geq 4)$，のいずれかと同型となる．ただし，C_{2^n} は位数 2^n の巡回群，Q_{2^n} は位数 2^n の (一般) 四元数群，$Q_{2^n} = \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = 1, {}^{y}x = x^{-1}, x^{2^{n-2}} = y^2 \rangle$，$D_{2^n}$ は位数 2^n の 2 面体群，$D_{2^n} = \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = y^2 = 1, {}^{y}x = x^{-1} \rangle$，$SD_{2^n}$ は位数 2^n の準 2 面体群，$SD_{2^n} = \langle x, y \mid x^{2^{n-1}} = y^2 = 1, {}^{y}x = x^{2^{n-2}-1} \rangle$.

定義 7.4　P を p-群とする．部分群 $Q \leq P$ に対し，$N_P(Q)$ の部分群 $Z_P(Q)$ は，$Z_P(Q)/Q = Z(N_P(Q)/Q)$ で定まるものとする．P の部分群 Q は，以下の条件を満たすとき，**genetic** とよばれる．

(1)　$N_P(Q)/Q$ は normal p-rank 1 をもつ．

(2)　P の要素 x に対し，$Q^x \cap Z_P(Q) \subseteq Q$ と $Q^x = Q$ が同値である．

P の部分群全体の集合に関係 $\frown_P$ を以下のように定める：P の部分群 S, T に対し

$$S \frown_P T \Leftrightarrow \exists g \in P,\, S^g \cap Z_P(T) \leq T \text{ and } {}^{g}T \cap Z_P(S) \leq S.$$

p-群 R が normal p-rank 1 をもつならば，faithful 既約 $\mathbb{Q}R$-加群 Φ_R が一つだけ存在する．S が p-群 P の genetic 部分群であるとき，$V(S) = \mathrm{ind}_{N_P(S)}^{P} \mathrm{inf}_{N_P(S)/S}^{N_P(S)} \Phi_{N_P(S)/S}$ とおく．

定理 7　P を p-群とする．

(1)　S が P の genetic 部分群ならば，$V(S)$ は既約 $\mathbb{Q}P$-加群である．

(2)　V が既約 $\mathbb{Q}P$-加群ならば，$V \cong V(S)$ を満たす P の genetic 部分群 S が存在する．

(3)　S と T が P の genetic 部分群ならば，$V(S) \cong V(T) \Leftrightarrow S \frown_P T$ が成り立つ．従って $N_P(S)/S \cong N_P(T)/T$ となる．

(4)　関係 $\frown_P$ は P の genetic 部分群全体の集合 $\mathcal{G}$ 上の同値関係となる．

従って P の genetic 部分群全体 $\mathcal{G}$ の $\frown_P$ に関する同値類全体の集合は P の有理既約表現の同型類全体の集合と一対一に対応する．$\mathcal{G}$ の同値類の一つの完全代表系 $\mathcal{S}$ を P の **genetic basis** とよぶ．

群 $T(P)$ の torsion-free rank を見つけるために Alperin が導入した自明な加群の relative syzygies は重要である ([Al01])．有限 P-集合 X に対し，augmentation map $kX \to k$ の核を Ω_X と書き，**relative syzygy** とよぶ．以下，P-集合 X に対し，$D(P)$ における Ω_X の同値類を Ω_X と書く．$D^{\Omega}(P)$ をすべての relative syzygy Ω_X，ただし，X は空でない有限 P-集合を動く，で生成される $D(P)$ の部分群とする．この部分群は [Bo00b] で初めて研究された．

Bouc と Thévenaz により，$D(P)$ の自由加群の部分の階数が P の非巡回部分群の共役類の個数と等しいことが示されている ([BT00])．$D(P)$ の torsion 部分 $D_t(P)$ の構造決定が $D(P)$ の分類のた

めに必要である．バイセット圏 $\mathcal{C}$ のプレ加法部分圏として，有限 p-群を対象とする忠実な部分圏 $\mathcal{C}_p$ をとる．次の結果を示すために，圏 $\mathcal{F}_{\mathcal{C}_p,\mathbb{Z}}$ の対象である ***p*-バイセット関手**に関する一般論 [Bo05, 3.2] とその証明がとても役立つ．

定理 8 (Bouc [Bo06])　$\mathcal{S}$ を P の genetic basis とする．

(1) 写像

$$\sum_{S\in\mathcal{S}} \mathrm{teninf}^P_{N_P(S)/S} : \bigoplus_{S\in\mathcal{S}} T_t(N_P(S)/S) \longrightarrow D_t(P)$$

は同型である．

(2) 体 k は 1 の 3 乗根を含むとする．m を部分群 $S\in\mathcal{S}$ で $N_P(S)/S$ が一般四元数群と同型となるものの個数，n を部分群 $S\in\mathcal{S}$ で $N_P(S)/S$ が位数 3 以上の巡回群か準 2 面体群と同型となるものの個数とする．このとき，$D_t(P)$ の部分群 $D_t^{ex}(P)$ で $D_t(P)=D_t^{\Omega}(P)\oplus D_t^{ex}(P)$ を満たすものが存在する．さらに，$D_t^{\Omega}(P)\cong(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^m\oplus(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n, D_t^{ex}(P)\cong(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^m$ が成り立つ．

(3) 直和因子 $D_t^{\Omega}(P)$ は元 $\mathrm{teninf}^P_{N_P(S)/S}(\Omega_{N_P(S)}/S)\,(S\in\mathcal{G})$ で生成される．

(4) 直和因子 $D_t^{ex}(P)$ は元 $\mathrm{teninf}^P_{N_P(S)/S}([L_S])$，ただし，$S\in\mathcal{S}$ は一般四元数群で L_S は exotic endo-trivial 加群，で生成される．

(5) 体 k が 1 の 3 乗根を含まないならば，$D_t^{ex}(P)$ の $N_P(S)/S$ が位数 8 の一般四元数群になる $S\in\mathcal{S}$ に対応する直和因子 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は 0 となる．

Dade 群の分類定理の最終部分は以下の定理である．

定理 9 (Bouc [Bo06])　(1) p が奇数ならば，$D(P)=D^{\Omega}(P)$ である．

(2) $p=2$ ならば，$D(P)=D^{\Omega}(P)\oplus D_t^{ex}(P)$，ただし，$D_t^{ex}(P)$ は exotic 部分である．

Bouc は一般の有限 p-群に対し $D(P)$ の生成元と関係式を決定した ([Bo06])．p-バイセット関手の理論と Carlson–Thévenaz による end-trivial 加群の分類結果が応用された．さらに [Bo06] では，[BT00] で初めて指摘された $D(P)$ と Burnside 群 $B(P)$ との関係をより詳しく究明した．Carlson–Thévenaz の Dade 群に関する定理の結果の一部は [Od10] に応用されている．

7.3　*p*-群の Burnside 環のユニット群

バイセット関手が重要な役割を果たしたもう一つの例として p-群 Burnside 環のユニット群の分類に関する結果を概観する．詳細は [Bo07] をご覧頂きたい．

有限群 G の Burnside 環 $B(G)$ の単数群 $B(G)^{\times}$ に関する研究は, tom Dieck [tD79], 松田 [Ma82], 松田–宮田 [MM83]，吉田 [Yo90a]，Yalçın [Ya05]，Bouc [Bo07] などで幾何的，代数的手法を用いて行われてきた．

すでに見たように，一般に G の Burnside 環 $B(G)$ の単数群 $B(G)^{\times}$ は基本可換 2-群となる．有限 2-群 P の $B(P)^{\times}$ の構造は [Ya05] で決定された．Bouc は p-バイセット関手 $B^{\times}$ を応用して，任意の有限 p-群 P に対し $B(P)^{\times}$ のランクを決定した．

一般の有限群 G に対しては，$B(G)^{\times}$ の構造に関する結果はほとんど知られていない．一連の研究で用いられている以下の定理は吉田が証明した．

定理 10 ([Yo90a])　G を有限群とする．このとき $C(G)^{\times}=\prod_{H\in\mathcal{O}(G)}\{\pm1\}$ の元 u が $\phi(B^{\times}(G))$ に含まれるための必要十分条件は, 任意の部分群 $H\le G$ に対し, 写像 $xH\in N_G(H)/H\mapsto u_{\langle x\rangle H}/u_H$

$\in \{\pm 1\}$ が群準同型であることである．

Yalçın や Bouc の仕事は，松田による以下の結果の影響を強く受けている．

定理 11 ([Ma82])　G を有限アーベル群とする．このとき $B^\times(G)$ は位数 2^{n+1} の基本可換群である．ただし，n は G の指数 2 の部分群の個数．

[Ma82] では G が 2 面体群の場合，また，位数に関するある条件を満たす二つの 2 面体群の直積の場合に $B^\times(G)$ が計算されている．松田と宮田による [MM83] にもいくつかの場合の計算結果がある．

有限 p-群 P と p-バイセット関手 $B^\times$ に対し，

$$\partial B^\times(P) = \bigcap_{e \neq N \trianglelefteq P} \ker \mathrm{def}^P_{P/N}$$

とする (詳細は [Bo06, 3.14] を参照).

定理 12 ([Bo07])　有限 p-群 P に対し，$B^\times(P)$ は以下のようになる．

(1) $p \neq 2$ のとき，$B^\times(P) = \{\pm 1\}$.

(2) $p = 2$ のとき，$\mathcal{G}$ を P の genetic basis，$\mathcal{H}$ を

$$\mathcal{H} = \{Q \in \mathcal{G} \mid N_P(Q) \text{ が自明な群，位数 2 の巡回群，または，2 面体群}\}$$

とする．$Q \in \mathcal{H}$ ならば $\partial B^\times(N_P(Q)/Q)$ は位数 2 の元 $\upsilon_{N_P(Q)/Q}$ で生成される．このとき，集合

$$\{\mathrm{teninf}^P_{N_P(Q)/Q} \upsilon_{N_P(Q)/Q} \mid Q \in \mathcal{H}\}$$

は $B^\times(P)$ の $\mathbb{F}_2$-基となる．

定理 13 ([Bo07])　有限べき零群 G に対し，$\mathcal{G}$ を G の genetic basis，$\mathcal{H}$ を

$$\mathcal{H} = \{H \in \mathcal{G} \mid N_G(H) \text{ が自明な群，位数 2 の巡回群，または，位数 } 2^n \text{ の 2 面体群}\}$$

とする．このとき，集合

$$\{\mathrm{teninf}^G_{N_G(H)/H} \upsilon_{N_G(H)/H} \mid H \in \mathcal{H}\}$$

は $B^\times(G)$ の $\mathbb{F}_2$-基となる．

この結果は松田の定理の別証明を導く．

8　おわりに

可換環の G-両変版として丹原関手の一般論を構築するという作業はまだ始まったばかりである．今後どのような風景が展開されるであろうか．一つの群の部分群たちの間で活動していた Mackey 関手は，あらゆる群の間で活動可能なバイセット関手としてその行動範囲を広げた．p-群全体に制限したバイセット関手 (p-バイセット関手，または，Bouc 関手) の理論は，Dade 群や Burnside 環の単元群など，p-群の表現論に関する問題について一定の成果を挙げたといえるだろう．本稿では詳細に扱うことができなかったフュージョンシステムとダブル Burnside 環の関係，ダブル Burnside 環のゴースト環の構成など，モジュラー表現論における問題解決を目指した研究が進行中である．バイセット関手を Mackey 関手の類似物とみなすという立場で，Green 関手に対応する Green バイセット関手の研究がすでに始まっている．丹原バイセット関手はうまく定義できるであろうか．すべての有限群を対

象とするような圏において，スパン圏や指数図式の類似を実現できる圏論的な道具は，すでに確立されているのであろうか．丹原バイセット関手の構築よりは，バイセット関手の丹原化の実現の方がより現実的な問題かもしれない．研究分野の枠を超えたいろいろな数学的道具，発想を用いた，今後の進展に期待したい．

注　　釈

1)　単位元は空集合の埋め込み $\emptyset \hookrightarrow X$ から誘導される射 $M(\emptyset) \to M(X)$ から得られる．

2)　X から Y への射集合 $\mathrm{Mor}_{\mathcal{S}}(X,Y)$ を $\mathcal{S}(X,Y)$ と略記することにする．

3)　行列表示したときの対角成分が奇数となることを用いて容易に示される．

4)　直既約加群の不変量の一つである P の p-部分群．

文　　献

[Al77]　J. L. Alperin, Invertible modules for groups, Notices Amer. Math. Soc. **24** (1977), A–64.

[Al87]　J. L. Alperin, Weights for finite groups, In: The Arcata Conference on Representations of Finite Groups, Proceedings of the conference, Humboldt State Univ., Arcata, Calif., 1986, (ed. P. Fong), Proc. Sympos. Pure Math. **47**, Part 1, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1987, pp. 369–379.

[Al01]　J. L. Alperin, A construction of endo-permutation modules, J. Group Theory, **4** (2001), 3–10.

[Be98]　D. J. Benson, Representations and Cohomology I, Cambridge Stud. Adv. Math., **30**, Cambridge Univ. Press, 1998.

[Bol95]　R. Boltje, Mackey functors and related structures in representation theory and number theory, Habilitation-Thesis, Universität Augsburg, 1995.

[BD12]　R. Boltje and S. Danz, A ghost ring for the left-free double Burnside ring and an application to fusion systems, Adv. Math., **229** (2012), 1688–1733.

[Bo97]　S. Bouc, Green Functors and G-sets, Lecture Notes in Math., **1671**, Springer, Berlin, 1997.

[Bo00a]　S. Bouc, Tensor induction of relative syzygies, J. Reine Angew. Math., **523** (2000), 113–171.

[Bo00b]　S. Bouc, Burnside rings, In: Handbook of Algebra, **2**, (ed. M. Hazewinkel), North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 739–804.

[Bo01]　S. Bouc, A remark on a theorem of Ritter and Segal, J. Group Theory, **4** (2001), 11–18.

[Bo03a]　S. Bouc, Hochschild constructions for Green functors, Comm. Algebra, **31** (2003), 403–436.

[Bo03b]　S. Bouc, The p-blocks of the Mackey algebra, Algebr. Represent. Theory, **6** (2003), 515–543.

[Bo04a]　S. Bouc, The functor of rational representations for p-groups, Adv. Math., **186** (2004), 267–306.

[Bo04b]　S. Bouc, A remark on the Dade group and the Burnside group, J. Algebra, **279** (2004), 180–190.

[Bo05]　S. Bouc, Biset functors and genetic sections for p-groups, J. Algebra, **284** (2005), 179–202.

[Bo06]　S. Bouc, The Dade group of a p-group, Invent. Math., **164** (2006), 189–231.

[Bo07]　S. Bouc, The functor of units of Burnside rings for p-groups, Comment. Math. Helv., **82** (2007), 583–615.

[Bo10]　S. Bouc, Biset Functors for Finite Groups, Lecture Notes in Math., **1990**, Springer, Berlin, 2010.

[BM04]　S. Bouc and N. Mazza, The Dade group of (almost) extraspecial p-groups, J. Pure Appl. Algebra, **192** (2004), 21–51.

[BT00]　S. Bouc and J. Thévenaz, The group of endo-permutation modules, Invent. Math., **139** (2000), 275–349.

[BLO03]　C. Broto, R. Levi and R. Oliver, The homotopy theory of fusion systems, J. Amer. Math. Soc., **16** (2003), 779–856.

[Bro75]　K. S. Brown, Euler characteristics of groups: the p-fractional part, Invent. Math., **29** (1975), 1–5.

[Bru05]　M. Brun, Witt vectors and Tambara functors, Adv. Math., **193** (2005), 233–256.

[Bu55]　W. Burnside, Theory of Groups of Finite Order, 2d ed., Dover Publications, New York, 1955.

[CR87]　C. W. Curtis and I. Reiner, Methods of Representation Theory: With Applications to Finite Groups and Orders, **1**, Wiley, New York, 1981.

[Ca98]　J. F. Carlson, A characterization of endotrivial modules over p-groups, Manuscripta Math., **97** (1998), 303–307.

[CT00]　J. Carlson and J. Thévenaz, Torsion endotrivial modules, Algebr. Represent. Theory, **3** (2000), 303–335.

[CT04]　J. Carlson and J. Thévenaz, The classification of endo-trivial modules, Invent. Math., **158** (2004), 389–411.

[CT05]　J. Carlson and J. Thévenaz, The classification of torsion endo-trivial modules, Ann. of Math. (2), **162** (2005), 823–883.

[Da78a]　E. C. Dade, Endo-permutation modules over p-groups I, Ann. of Math. (2), **107** (1978), 459–494.

[Da78b]　E. Dade, Endo-permutation modules over p-groups II, Ann. of Math. (2), **108** (1978), 317–

346.

[DL09] A. Díaz and A. Libman, The Burnside ring of fusion systems, Adv. Math., **222** (2009), 1943–1963.

[Dr69] A. Dress, A characterization of solvable groups, Math. Z., **110** (1969), 213–217.

[Dr71] A. Dress, Operations in representation rings, In: Representation Theory of Finite Groups and Related Topics, Proceedings of the Symposium in Pure Mathematics of Amer. Math. Soc., Univ. of Wisconsin, Madison, Wis., 1971, (ed. I. Reiner), Proc. Sympos. Pure Math., **21**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1971, pp. 39–45.

[Dr73] A. W. M. Dress, Contributions to the theory of induced representations, In: Algebraic K-theory, II: "Classical" Algebraic K-theory and Connections with Arithmetic, Proceedings of the Conference, the Seattle Research Center of the Battelle Memorial Institute, 1972, (ed. H. Bass), Lecture Notes in Math., **342**, Springer, Berlin, 1973, pp. 183–240.

[DS88] A. W. M. Dress and C. Siebeneicher, The Burnside ring of profinite groups and the Witt vector construction, Adv. in Math., **70** (1988), 87–132.

[DS89] A. W. M. Dress and C. Siebeneicher, The Burnside ring of the infinite cyclic group and its relations to the necklace algebra, λ-rings, and the universal ring of Witt vectors, Adv. Math., **78** (1989), 1–41.

[DSY92] A. W. M. Dress, C. Siebeneicher and T. Yoshida, An application of Burnside rings in elementary finite group theory, Adv. Math., **91** (1992), 27–44.

[E06] J. Elliott, Constructing Witt–Burnside rings, Adv. Math., **203** (2006), 319–363.

[FT63] W. Feit and J. G. Thompson, Solvability of groups of odd order, Pacific J. Math., **13** (1963), 775–1029.

[GK13] N. Gambino and J. Kock, Polynomial functors and polynomial monads, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., **154** (2013), 153–192.

[Gl81] D. Gluck, Idempotent formula for the Burnside ring with applications to the p-subgroup simplicial complex, Illinois J. Math., **25** (1981), 63–67.

[Go68] D. Gorenstein, Finite Groups, Harper & Row, 1968.

[Gr71] J. A. Green, Axiomatic representation theory for finite groups, J. Pure Appl. Algebra, **1** (1971), 41–77.

[Ja86] E. T. Jacobson, The Brauer ring of a field, Illinois J. Math., **30** (1986), 479–510.

[Li76] H. Lindner, A remark on Mackey-functors, Manuscripta Math., **18** (1976), 273–278.

[Ma82] T. Matsuda, On the unit group of Burnside rings, Japan. J. Math. (N.S.), **8** (1982), 71–93.

[MM83] T. Matsuda and T. Miyata, On the unit groups of the Burnside rings of finite groups, J. Math. Soc. Japan, **35** (1983), 345–354.

[MR83] N. Metropolis and G.-C. Rota, Witt vectors and the algebra of necklaces, Adv. in Math., **50** (1983), 95–125.

[Na09] H. Nakaoka, Tambara functors on profinite groups and generalized Burnside functors, Comm. Algebra, **37** (2009), 3095–3151.

[Na11] H. Nakaoka, Tambarization of a Mackey functor and its application to the Witt–Burnside construction, Adv. Math., **227** (2011), 2107–2143.

[Na12a] H. Nakaoka, On the fractions of semi-Mackey and Tambara functors, J. Algebra, **352** (2012), 79–103.

[Na12b] H. Nakaoka, Ideals of Tambara functors, Adv. Math., **230** (2012), 2295–2331.

[Na12c] 中岡宏行, 有限群上の丹原関手に対する代数的操作, In: 有限群のコホモロジー論とその周辺, (ed. 佐々木洋城), 数理解析研究所講究録, **1784** (2012), 161–174.

[Na13] H. Nakaoka, A generalization of the Dress construction for a Tambara functor, and its relation to polynomial Tambara functors, Adv. Math., **235** (2013), 237–260.

[Na14] H. Nakaoka, The spectrum of the Burnside Tambara functor on a finite cyclic p-group, J. Algebra, **398** (2014), 21–54.

[OSH10] 奥山哲郎・佐々木洋城・飛田明彦, 有限群のコホモロジー論, 数学, **62** (2010), 240–266.

[Od07] F. Oda, Crossed Burnside rings and Bouc's construction of Green functors, J. Algebra, **315** (2007), 18–30.

[Od08] F. Oda, The generalized Burnside ring with respect to p-centric subgroups, J. Algebra, **320** (2008), 3726–3732.

[Od10] F. Oda, The crossed Burnside ring, the Drinfel'd double, and the Dade group of a p-group, Algebr. Represent. Theory, **13** (2010), 231–242.

[Od12] 小田文仁, 丹原関手と斜バーンサイド環, In: 有限群のコホモロジー論とその周辺, (ed. 佐々木洋城), 数理解析研究所講究録, **1784** (2012), 155–160.

[OS09] F. Oda and M. Sawabe, A collection of subgroups for the generalized Burnside ring, Adv. Math., **222** (2009), 307–317.

[OS11] F. Oda and M. Sawabe, The generalized Burnside rings with respect to a collection of self-normalizing subgroups, J. Algebra, **334** (2011), 219–231.

[OY01a] F. Oda and T. Yoshida, Crossed Burnside rings I. The fundamental theorem, J. Algebra, **236** (2001), 29–79.

[OY01b] F. Oda and T. Yoshida, On the generalized Burnside ring with respect to the Young subgroups of the symmetric group, J. Algebra, **236** (2001), 349–354.

[OY04] F. Oda and T. Yoshida, Crossed Burnside

rings II. The Dress construction of a Green functor, J. Algebra, **283** (2004), 58–82.
[OY11] F. Oda and T. Yoshida, The crossed Burnside rings III. The Dress construction for a Tambara functor, J. Algebra, **327** (2011), 31–49.
[PS07] E. Panchadcharam and R. Street, Mackey functors on compact closed categories, J. Homotopy Relat. Struct., **2** (2007), 261–293.
[Pu88] L. Puig, Nilpotent blocks and their source algebras, Invent. Math., **93** (1988), 77–116.
[Pu90] L. Puig, Affirmative answer to a question of Feit, J. Algebra, **131** (1990), 513–526.
[Pu99] L. Puig, On the local structure of Morita and Rickard equivalences between Brauer blocks, Progr. Math., **178**, Birkhäuser, Basel, 1999.
[Ro58] P. Roquette, Realisierung von Darstellungen endlicher nilpotente Gruppen, Arch. Math. (Basel), **9** (1958), 241–250.
[Sn94] V. P. Snaith, Explicit Brauer Induction: With Applications to Algebra and Number Theory, Cambridge Stud. Adv. Math., **40**, Cambridge Univ. Press, 1994.
[So67] L. Solomon, The Burnside algebra of a finite group, J. Combinatorial Theory, **2** (1967), 603–615.
[St12] N. Strickland, Tambara functors, arXiv: 1205.2516.
[Tak10] Y. Takegahara, Multiple Burnside rings and Brauer induction formulae, J. Algebra, **324** (2010), 1656–1686.
[Tak11] 竹ヶ原裕元, Generalizations of Burnside ring and their applications, In: Research into Vertex Operator Algebras, Finite Groups and Combinatorics, (ed. 宮本雅彦), 数理解析研究所講究録, **1756** (2011), 41–50.
[Tak12] 竹ヶ原裕元, バーンサイド環の一般化とその応用, In: 有限群とその表現, 頂点作用素代数, 組合せ論の研究, (ed. 小田文仁), 数理解析研究所講究録, **1811** (2012), 60–77.
[Tam] D. Tambara, Multiplicative transfer and Mackey functor, unpublished.
[Tam93] D. Tambara, On multiplicative transfer, Comm. Algebra, **21** (1993), 1393–1420.
[Tam06] D. Tambara, A partial Burnside ring of $GL(n, q)$ relative to line stabilizers, J. Algebra, **296** (2006), 301–322.
[Th88] J. Thévenaz, Some remarks on G-functors and the Brauer morphism, J. Reine Angew. Math., **384** (1988), 24–56.
[Th90] J. Thévenaz, A visit to the kingdom of the Mackey functors, Bayreuth. Math. Schr., **33** (1990), 215–241.
[Th92] J. Thévenaz, Locally determined functions and Alperin's conjecture, J. London Math. Soc. (2), **45** (1992), 446–468.
[Th93] J. Thévenaz, Equivariant K-theory and Alperin's conjecture, J. Pure Appl. Algebra, **85** (1993), 185–202.
[Th07] J. Thévenaz, Endo-permutaion modules, a guided tour, In: Group Representation Theory, (ed. M. Geck *et al.*), EPFL Press, 2007, pp. 115–147.
[TW90] J. Thévenaz and P. J. Webb, A Mackey functor version of a conjecture of Alperin, Astérisque, **181–182** (1990), 263–272.
[TW95] J. Thévenaz and P. J. Webb, The structure of Mackey functors, Trans. Amer. Math. Soc., **347** (1995), 1865–1961.
[tD79] T. tom Dieck, Transformation Groups and Representation Theory, Lecture Notes in Math., **766**, Springer, Berlin, 1979.
[UK13] 宇野勝博・功刀直子, 有限群のモジュラー表現論における予想について, 数学, **65** (2013), 1–23.
[Ya05] E. Yalçın, An induction theorem for the unit groups of Burnside rings of 2-groups J. Algebra, **289** (2005), 105–127.
[Yo80] 吉田知行, トポスにおけるトランスファー理論 ──有限群論は役立つか──, 数学, **32** (1980), 193–212.
[Yo83] T. Yoshida, Idempotents of the Burnside rings and Dress induction theorem, J. Algebra, **80** (1983), 90–105.
[Yo90a] T. Yoshida, On the unit groups of Burnside rings, J. Math. Soc. Japan, **42** (1990), 31–64.
[Yo90b] T. Yoshida, The generalized Burnside ring of a finite group, Hokkaido Math. J., **19** (1990), 509–574.
[Yo93] 吉田知行, 群論の古典的問題 (I) ──部分群と準同型の個数を数える──, 数学, **45** (1993), 193–207.
[Yo97] 吉田知行, Crossed G-sets and crossed Burnside rings, In: 群論と組合せ数学, (ed. 八牧宏美), 数理解析研究所講究録, **991** (1997), 1–15.
[Yo01] T. Yoshida, Categorical aspects of generating functions. I. Exponential formulas and Krull–Schmidt categories, J. Algebra, **240** (2001), 40–82.
[Yo06] 吉田知行, 丹原ファンクター係数の多項式環, In: 有限群のコホモロジー論とその周辺, (ed. 佐々木洋城), 数理解析研究所講究録, **1466** (2006), 21–34.
[We00] P. Webb, A guide to Mackey functor, In: Handbook of Algebra, **2**, (ed. M. Hazewinkel), North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 805–836.
[Wi96] S. J. Witherspoon, The representation ring of the quantum double of a finite group, J. Algebra, **179** (1996), 305–329.

(2013 年 9 月 2 日提出)
(おだ ふみひと・近畿大学理工学部)
(なかおか ひろゆき・鹿児島大学大学院理工学研究科)