① 20171413 (木)

Section 1 Quantum Mechanics (お話)

Quantum Mechanics

- Schrödinger equation

$$i\frac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi, \qquad H = -\frac{1}{2m}\Delta + V$$

- Probabilistic interpretation

$$\int_{\mathbb{R}^3} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

運動量作用素　位置作用素

$$-i\frac{\partial}{\partial x_j} = P_j, \qquad x_j \times = Q_j$$

$$\Rightarrow \quad i\frac{\partial \psi}{\partial t} = H(P,Q)\psi \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}^3) = \mathcal{H}$$

かつ $[P_i, Q_j] = -i\delta_{ij}$

$$H(P\,Q) = \frac{1}{2m}P^2 + V(Q)$$

$\Rightarrow$ 一般化 $[A_i, B_j] = -i\delta_{ij}$

- $H(A,B)$ はどうやって def するのか?
- $i\frac{\partial \psi}{\partial t} = H(A,B)\psi$ on $\mathcal{H}$ の解は?

v Neumann: $A_i \cong P_i, \quad B_j \cong Q_j$

momentum — position
energy — time

$[T, H] = -i$ $\quad$ T : time operator.

① ∞-dim
② unbounded (domainが本質的)

① は Traceの比較
② は $TH - HT = \lambda$ $\quad$ $(\lambda \in \mathbb{C})$
T, H をadd とする

$$T^n H - H T^n = n \lambda T^{n-1}$$

$$\therefore n|\lambda| \, \|T^{n-1}\| \leq 2 \|H\| \, \|T^n\|$$
$$\leq 2 \|H\| \, \|T\| \, \|T^{n-1}\|$$

$\|T^n\| \neq 0$.

$$\therefore n|\lambda| \leq 2 \|H\| \, \|T\|$$ ✓

§2 Hilbert spaces

$\mathcal{H}$: linear space over $\mathbb{C}$

- $(f, g)_{\mathcal{H}} = (f, g)$ $\quad (f, g)$ anti-linear in f, linear in g
- $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$

<u>Def 2.1</u> $(\mathcal{H}, (\ ,\ ))$ is a Hilbert space.
$\Leftrightarrow$ $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ is complete.

- complete $\Leftrightarrow$ Cauchy列は収束列
  i.e., $\|f_n - f_m\| \to 0 \ (n, m \to \infty) \Rightarrow \exists f \in \mathcal{H}$ s.t. $\|f - f_n\| \to 0$ $(n \to \infty)$
- separable (可分) $\Leftrightarrow$ $\exists \mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ dense subspace s.t. $\# \mathcal{D} = \mathbb{N}$

Example :

$\ell^2 = \{ a = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} ; \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 < \infty \}$

$(a, b)_{\ell^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{a}_n b_n$, $(\ell^2, (\ ,\ ))$ is a Hilbert space

Example :

$\mathcal{L}^2 = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Borel meas. ; $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 d\mu < \infty \}$

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ Borel measurable space

$f \sim g \Leftrightarrow f = g$ a.e. $\quad \mathcal{L}^2/\sim \ = L^2$

$([f], [g])_{L^2} = \int \bar{f}(x) g(x) \, d\mu(x)$, $(L^2, (\ ,\ ))$ is a Hilbert space.

内積空間 $(\mathcal{H}, (\cdot,\cdot))$
ノルム空間 $(K, \|\cdot\|)$

$\|f\| = \sqrt{(f,f)}$ はよかった

さらに
$$(f,g) = \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}\|u + i^n v\|^2 i^n$$ がわかる

逆に $(K, \|\cdot\|)$ において

$$(f,g) := \frac{1}{4}\sum_{n=0}^{3}\|f + i^n g\|^2 i^n \quad (*)$$ と def しても

一般に $(\ ,\ )$ は内積になるか

e.g. $(f,f) \geq 0$ は示せるか.

- $\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2(\|f\|^2 + \|g\|^2)$ が成り立つとき $(*)$ は内積を定める.

- $\mathcal{H}$: Hilbert space は $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ で距離空間と思える.

- $D \subset \mathcal{H}$ が compact $\Leftrightarrow$ $\forall D \supset \{x_n\}$ に対し D の収束する部分列をもつ
  = 点列cpt

§3 Hilbert space の幾何学

・ $\dim \mathcal{H} = n < \infty$. $D \subset \mathcal{H}$ 有界閉集合

$(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$ metric space (位相空間)

① $\exists M$ s.t. $\|x\| \leq M \ \forall x \in D$

② $\|x_n - x\| \to 0$, $x_n \in D \Rightarrow x \in D$

$\mathcal{H} \cong \mathbb{C}^n \quad \therefore D$ は compact.

Thm3.1 $S = \{x \in \mathcal{H} ; \|x\| = 1\}$ が cpt

$\Rightarrow \dim \mathcal{H} < \infty$ ($\mathcal{H}$ は norm 空間)

∵ $d(u, D) = \inf_{v \in D} \|u - v\|$

⊛ D closed subspace & $D \subsetneq \mathcal{H}$

このとき $d(\exists u_\varepsilon, D) > 1 - \varepsilon$, $\|u_\varepsilon\| = 1$ i.e. $u_\varepsilon \in S$

$\dim \mathcal{H} = +\infty$ とする. このとき S は cpt でない.

∵) $u_1 \in S$, $D_1 = \langle u_1 \rangle$ closed subspace

$\exists u_2 \in S$, $d(u_2, D_1) > 1/2$

$D_2 = \langle u_1, u_2 \rangle$

$\exists u_3 \in S$ $d(u_3, D_2) > 1/2$

$D_3 = \langle u_1 \ u_2 \ u_3 \rangle$

⋮

$\dim D_n \leq n$ 無限にくり返す.

$\therefore \{u_n\}_{n=1}^{\infty} \subset S$ かつ $\|u_j - u_k\| > \frac{1}{2}$

$\therefore$ Cauchy列ではない. かつ 収束する部分列もない

$\therefore$ S は cpt ではない $\therefore$ S cpt $\Rightarrow \dim \mathcal{H} < \infty$

⊛ の ∵ $\quad d = \sup_{\|u\|=1} d(u, D)$ とおく

このとき $\forall_{\delta>0}$ にたいして $\quad d \geq d(\overset{\exists}{u_\delta}, D)$ ~~$> d-\delta$~~ ← 必要.

$\|u_\delta\|=1$

$d(u_\delta, D)$ の def より

$\overset{\exists}{}$

$d(u_\delta, D) > \|u_\delta - v_\delta\| - \delta, \quad v_\delta \in D$

$\therefore \quad d \geq d(u_\delta, D) > \|u_\delta - v_\delta\| - \delta$

$\therefore \quad d + \delta \geq \|u_\delta - v_\delta\| \qquad u_\delta \in S,\ v_\delta \in D$ 当り前

$\therefore \quad w_\delta = u_\delta - v_\delta / \|u_\delta - v_\delta\|$

$\therefore \quad d(w_\delta, D) = \inf_{v \in D} \|w_\delta - v\|$

$$\|w_\delta - v\| = \|u_\delta - v_\delta - v\| \, \|u_\delta - v_\delta\| \, \frac{1}{\|u_\delta - v_\delta\|}$$

$$= \|u_\delta - \underset{\in D}{v'}\| \frac{1}{\|u_\delta - v_\delta\|}$$

$$\geq d(u_\delta, D) / \|u_\delta - v_\delta\|$$

$$\geq \frac{d-\delta}{d+\delta}$$

$\therefore \quad d(w_\delta, D) \geq \frac{d-\delta}{d+\delta}$

$\therefore \quad d \geq d(w_\delta, D) \geq \frac{d-\delta}{d+\delta}$ 両辺の $\sup_{\delta>0}$ をとると

$\therefore \quad d \geq \sup_{\delta>0} \frac{d-\delta}{d+\delta} = 1$

$\therefore \quad d(\overset{\exists}{u_\varepsilon}, D) \geq 1 - \varepsilon$ となる.

Section #4 射影空間

$M \subset \mathcal{H}$　　$\mathcal{H}$ Hilbert space

$M^{\perp} = \{ x \in \mathcal{H} ; (x, y) = 0 \ \forall y \in M \}$

Thm #4.1　$M^{\perp}$ は closed subspace かつ
$M \cap M^{\perp} = \{0\}$

∵ subspace は ok

$M^{\perp} \ni \{x_n\}$ st $x_n \to x \in \mathcal{H}$

のとき $x \in M^{\perp}$　∴ $M^{\perp}$ は closed

$M \cap M^{\perp} \ni x$ とするとき $\|x\|^2 = (x, x) = 0$

∴ $x = 0$.

Thm #4.2 (正射影定理)

$M \subset \mathcal{H}$ closed subspace

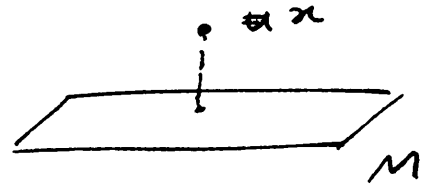
このとき $\mathcal{H} = M \oplus M^{\perp}$

∵ (一意性)　$x = x_1 + x_2$
$x = y_1 + y_2$ とする.

∴ $(x_1 - y_1) + (x_2 - y_2) = 0$　∴ $x_1 - y_1 \in M \cap M^{\perp}$
$x_2 - y_2 \in M \cap M^{\perp}$

∴ $x_1 = y_1$　$x_2 = y_2$

(分解性)



$d = \inf_{v \in M} \|x - v\|$

∴ $\exists v_m \in M$ st $\|x - v_m\| \to d$ $(m \to \infty)$

∵) $d + \varepsilon \geq \|x - v_m\| \geq d$

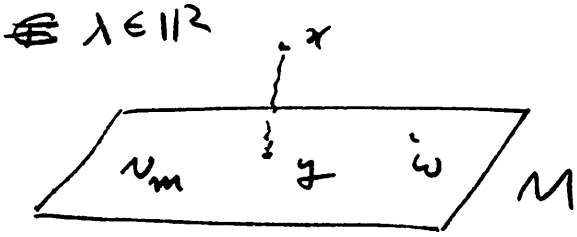
↓ key point

実は $\{v_m\}$ は Cauchy列になっている.

$\exists \lim_m v_m = y \in M$ $\quad z = x - y$ とおく

直観的に $x - y \perp M$ これを示す.

$y + \lambda w \in M$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$



$d^2 \leq \| x - (y + \lambda w) \|^2$

$= \| z - \lambda w \|^2 = \| z \|^2 - 2 \mathrm{Re}\, \lambda (z, w) + \lambda^2 \| w \|^2$

$\| z \| = d$ だったから

$0 \leq (-2 \mathrm{Re}(z, w) + \lambda \| w \|^2) \lambda \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$

判別式 $4 [\mathrm{Re}(z, w)]^2 \leq 0 \quad \therefore \mathrm{Re}(z, w) = 0$

$w \to iw$ にかえてやると $\quad \therefore \mathrm{Im}(z, w) = 0$

⊙ Cauchy列の証明:

$\| v_m - v_n \|^2 + \| 2 \left(\frac{v_m + v_n}{2} \right) - x \|^2$ 中線定理

$= 2 \| v_m - x \|^2 + 2 \| v_n - x \|^2$

$\therefore \| v_m - v_n \|^2 = 2 \underbrace{\| v_m - x \|^2}_{\downarrow\, 2d^2} + 2 \underbrace{\| v_n - x \|^2}_{\downarrow\, 2d^2} - \| 2 \underbrace{\left(\frac{v_m + v_n}{2} - x \right)}_{\in M} \|^2$

$\leq 2d^2 + 2d^2 + \varepsilon - 4d^2$ (m, n 十分大きいとき)

$\mathcal{H} \supset M$ closed subspace

$\therefore \mathcal{H} = M \oplus M^{\perp} \ni u = u_1 + u_2$

$P_M : u \longmapsto u_1$ M上正射影という.

① $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$

② $x \in M \Leftrightarrow P_M x = x$

③ $x \in M^{\perp} \Leftrightarrow P_M u = 0$

§#5 Base

$\mathcal{H}$ Hilbert space.

・ $D \subset \mathcal{H}$ D が orthonormal system

$\Leftrightarrow$ $\forall \varphi, \psi \in D$ が $(\varphi, \psi) = 0$, $\|\varphi\| = 1$

Theorem #5.1 $\mathcal{H}$ separable norm space
$D \subset \mathcal{H}$ は ONS. このとき $\#D$ は可算.

∵ $D \ni \varphi, \psi$ に対して $\|\varphi - \psi\|^2 = 2$
$\|\varphi - \psi\| = \sqrt{2}$

$\exists M \subset \mathcal{H}$ dense $\#M$ 可算 だから
$\forall \phi \in D$ に対して $\exists u_\phi \in M$ s.t. $\|\phi - u_\phi\| < \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \sqrt{2} = \|\varphi - \psi\| \leq \|\varphi - u_\varphi\| + \|u_\varphi - u_\psi\|$
$+ \|u_\psi - \psi\| \underset{\neq}{\leq} \sqrt{2} + \|u_\varphi - u_\psi\|$

$\therefore \|u_\varphi - u_\psi\| \underset{\neq}{>} 0$

$p : D \to M$ $\quad M' = \{u_\varphi ; \varphi \in D\}$
$\varphi \mapsto u_\varphi$

$p : D \to M' \subset M$ は bijective

$\therefore \#D \subset \#M$ $\therefore$ $\#D$ は可算.

$D = \{\phi_k\}$ ONS $M = \langle D \rangle$ closed subspace ~~span~~ spanned by D.

Thm 5.2 (Bessel inequality)

$\forall x \in \mathcal{H}$, $\sum_{k=1}^{\infty} |(\phi_k, x)|^2 \leq \|x\|^2 < \infty$

∵ $0 \leq \| x - \sum_{k=1}^{n} (\phi_k, x)\phi_k \|^2$

$= \|x\|^2 - \sum^{n} |(\phi_k, x)|^2$ //

Thm 5.3 $P_M x = \sum_{k=1}^{\infty} (\phi_k, x)\phi_k$ —(*) ように

$(P_M x, P_M y) = \sum_{k=1}^{\infty} (x, \phi_k)(\phi_k, y)$ — (**)

∵ Bessel ineq. より (*) の右辺は Cauchy 列.

∴ 極限が存在する. $x_1 = \sum^{\infty} (\phi_k, x)\phi_k$

$x_2 = x - x_1$ のとき $(x_2, \phi_k) = (x, \phi_k) - (x_1, \phi_k) = 0$

∴ $x_2 \in M^{\perp}$ ∴ $x = x_1 + x_2$ ∴ $P_M x = x_1$.

(**) はすぐわかる.

Thm 5.4. 次は同値

(1) $\mathcal{H} = M$

(2) $\forall x \in \mathcal{H}$, $x = \sum^{\infty} (\phi_k, x)\phi_k$

(3) $\forall x \in \mathcal{H}$, $\|x\|^2 = \sum^{\infty} |(\phi_k, x)|^2$

(4) $\forall x, y \in \mathcal{H}$, $(x, y) = \sum^{\infty} (x, \phi_k)\overline{(y, \phi_k)}$

(5) $(x, \phi_k) = 0 \ \forall k \Rightarrow x = 0$

(1) $\Leftrightarrow$ (2) の ☺ $\quad P_M x = \sum^{\infty} (\phi_k x)\phi_k$

$\therefore\ M = \mathcal{H} \Leftrightarrow P_M x = x \quad \forall x \in \mathcal{H}$.

(1) $\Rightarrow$ (4) $\quad (x\ y) = (P_M x, P_M y)$ より OK

(4) $\Rightarrow$ (3) $\quad$ 自明 $(x = y)$

(3) $\Rightarrow$ (5) $\quad \|x\| = 0 \quad \therefore\ x = 0$

(5) $\Rightarrow$ (1) $\quad y \in M^{\perp}$ なら $(y, \phi_k) = 0\ \forall k$

$\therefore\ y = 0 \quad \therefore\ M^{\perp} = \{0\} \quad \therefore\ \mathcal{H} = M$.

5
~~B.5~~

Thm $\mathcal{H}$ separable Hilbert space
このとき $\exists$ CONS

∵ $D \subset \mathcal{H}$ dense
$\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{H}$ dense subspace

$D = \{\varphi_k\}$ $(\varphi_k \neq 0)$ 次のキソクで $\{\varphi_k\}$ から
ベクトルを除いていく

$\varphi_n \in \langle\{\varphi_1 \cdots \varphi_{n-1}\}\rangle \Rightarrow$ 除く

$\varphi_n \notin \langle\{\varphi_1 \cdots \varphi_{n-1}\}\rangle \Rightarrow$ 除かない

除かれずに残ったベクトル達を順番をくずさずに $\{\varphi_k'\}$ と番号つける

このとき $\mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(\{\varphi_k'\})$

∵) $\mathcal{L}(D) \supset \mathcal{L}(\{\varphi_k'\})$ は自明

$\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(\{\varphi_k'\})$ の ∵ は以下

▷ $x \in \mathcal{L}(D)$ は $x = a_1\varphi_1 + \cdots + a_n\varphi_n$ と表せる
一方 少なくとも $\varphi_1', \ldots, \varphi_n'$ で表せるから
$x \in \mathcal{L}(\{\varphi_k'\})$ //

$\{\varphi_k'\}$ に Schmidt の直交化法で $\{\psi_k\}$ ONS
をつくると 同様に $\mathcal{L}(\{\varphi_k'\}) = \mathcal{L}(\{\psi_k\})$
と示せる

$\therefore \quad \mathcal{L}(D) = \mathcal{L}(\{\psi_k\})$

特に $\mathcal{L}(\{\psi_k\})$ は dense $\therefore \mathcal{L}(\{\psi_k\})^{\perp} = \{0\}$

∵ $(x, y) = 0 \quad {}^{\forall}y \in \mathcal{L}(\{\psi_k\})$

$\therefore (x, z) = 0 \quad {}^{\forall}z \in \mathcal{H} \quad \therefore x = 0.$

$\therefore (x, \varphi_k) = 0 \Rightarrow (x, y) = 0 \Rightarrow x = 0$

$\therefore \langle\{\psi_k\}\rangle = \mathcal{H}$ //

③ 2017/4/27

Section 6 Linear Operators

- $T : \mathcal{H} \to K$ $\quad T(ax+by) = aTx + bTy$
  $\forall x, y \in D(T),\ a, b \in \mathbb{C}$
  linear operator
- $x_n \in D(T),\ x_n \to x \in D(T) \Rightarrow Tx_n \to Tx$ となるとき
  continuous operator
- $\|Tx\| \le \exists C \|x\| \quad \forall x \in D(T)$ bounded operator

Thm 6.1 $T : \mathcal{H} \to K$ <u>linear operator</u>
このとき bounded $\Leftrightarrow$ continuous

∵ ($\Rightarrow$) $\|Tx - Tx_n\| \le C\|x - x_n\|$
($\Leftarrow$) b'dd でないとして $\|Tv_n\| = 1,\ \|v_n\| \to 0$
となる v_n をつくればいい.
$v_n = u_n / \|Tu_n\|$ このとき $\|Tu_n\| = 1$
$\|Tu_n\| \ge n \|u_n\|$ とすれば $\|v_n\| \le \frac{1}{n} \to 0$ //

$B(\mathcal{H}, K) = \{T : \mathcal{H} \to K\ ;\ \text{linear b'dd},\ D(T) = \mathcal{H}\}$
$\mathcal{H}, K$ norm spaces

$B(\mathcal{H}, K) \ni T \Rightarrow \|Tx\| \le C\|x\| \quad \forall x \in \mathcal{H}$

$$\|T\| \le \sup_{\substack{x \ne 0 \\ x \in D(T)}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}. \qquad B(\mathcal{H}, \mathcal{H}) = B(\mathcal{H})$$

Thm 6.2 $\mathcal{H}$ norm sp. $\mathcal{K}$ Banach sp.
このとき $(B(\mathcal{H}, \mathcal{K}), \|\cdot\|)$ は Banach sp.

∵ $\|\cdot\|$ は norm ok.
$\{T_n\} \subset B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ Cauchy とする
$T_n x$ も Cauchy ∴ $T_n x \to \exists y$
($\mathcal{K}$ は Banach sp)
Define $T: \mathcal{H} \to \mathcal{K}$ by $Tx = \lim_n T_n x$.
実は $T \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$ かつ $\|T - T_n\| \to 0$.

- $\|Tx\| = \lim \|T_n x\| \leq \underset{\|T_n\|}{\underset{\cap}{\cap}} \|x\| \leq M\|x\|$ (Cauchy は bdd)

∴ $\|T\| \in B(\mathcal{H}, \mathcal{K})$

- $\|T_n x - T_m x\| \leq \|T_n - T_m\| \cdot \|x\| \leq \varepsilon \|x\|$ $\forall n, m \geq \exists N$

∴ $\|T_n x - Tx\| \leq \varepsilon \|x\|$

∴ $\|T_n - T\| = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\|T_n x - Tx\|}{\|x\|} \leq \varepsilon$ //

位相：・$T_n \to T$ strong $\Leftrightarrow$ $T_n x - Tx = 0$
・$T_n \to T$ uniform $\Leftrightarrow$ $\|T_n - T\| \to 0$.
s-lim, u-lim

Example: $B(\ell_2) \ni T_n$

$T_n(\{a_1 a_2 \cdots\}) = \{a_n, a_{n+1} \cdots\}$ <u>shift</u>

∴ $\|T_n a\|^2 = \sum_{k=n}^{\infty} |a_k^2| \to 0$ $(n \to \infty)$

∴ $T_n \xrightarrow{s} 0$

一方 $b = \{\underbrace{0 \cdots 0}_{n} b_{n+1} \cdots\}$ $\|T_n b\| = \|b\|$

また常に $\|T_n a\| \leq \|a\|$ ∴ $\sup_{a \neq 0} \dfrac{\|T_n a\|}{\|a\|} = 1$

∴ $\|T_n\| = 1$ $\forall n$. uniform に 0 に収束しない

Thm 6.3 $T : \mathcal{H} \to K$ $D(T) \subset \mathcal{H}$ dense

このとき $\exists_1 \bar{T} \in B(\mathcal{H}, K)$ s.t.

① $T \subset \bar{T}$ ② $\|\bar{T}\| = \|T\|$ ③ $D(\bar{T}) = \mathcal{H}$

ここで $\|T\| = \sup_{\substack{x \in D(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$

∵ $\forall x \in \mathcal{H}$ $\exists x_n \in D(T)$ s.t. $x_n \to x$

このとき $\{Tx_n\}$ は Cauchy なので $\therefore Tx_n \to \exists y \therefore \bar{T}x := y$

これは well-defined

∵) $x_n' \to x$ とするとき $\|Tx_n' - y\| \leq \|Tx_n' - Tx_n\|$

$+ \|Tx_n - y\| \leq \|T\|(\|x_n' - x\| + \|x - x_n\|) + \|Tx_n - y\|$

$y = \bar{T}x$ とかくことにする また ③ 成立 $\to 0$ //

$x \in D(T)$ のとき $Tx = \bar{T}x$

∵) $x_n = x \ \forall n$ とすればいい。

また ① が成立する

- $\|\bar{T}\| = \sup_x \frac{\|\bar{T}x\|}{\|x\|} \geq \sup_{x \in D(T)} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|$
- $\|\bar{T}u\| = \|Tu\| \leq \|T\| \cdot \|u\|$ $\forall u \in D(T)$

$\exists u_n \in D(T)$ s.t. $u_n \to u$

$\|\bar{T}u_n\| \leq \|T\| \|u_n\|$

$\downarrow$ $\downarrow$

$\|\bar{T}u\|$ $\|T\| \cdot \|u\|$ $\therefore \|\bar{T}\| \leq \|T\|$

densely defined bdd op. は一意的に $\mathcal{H}$ 全体へ定義域を拡大できる。

- (一意性) $\forall x \in D(T)$ $\bar{T}x = Sx$ とする $\|\bar{T}x - Sx\| = \lim_n \|\bar{T}x_n - Sx_n\|$

$=$

④ 2017/5/1

Section 7 Unbounded operators

$T, S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ unbounded

和 $D(T+S) = D(T) \cap D(S)$

スカラー $D(\alpha T) = D(T)$

積 $D(ST) = \{x \in D(T) ; Tx \in D(S)\}$

分配法則

Lemma 7.1 $(S_1 + S_2)T = S_1T + S_2T$ —①

$S(T_1 + T_2) \supset ST_1 + ST_2$ —②

∵ ① $D((S_1+S_2)T) = \{x \in D(T) ; Tx \in D(S_1) \cap D(S_2)\}$

$D(S_1T + S_2T) = D(S_1T) \cap D(S_2T)$

$= \{x \in D(T) ; Tx \in D(S_1)\} \cap \{x \in D(T) ; Tx \in D(S_2)\}$

$= \{x \in D(T) ; Tx \in D(S_1) \cap D(S_2)\}$

② $D(ST_1 + ST_2) = D(ST_1) \cap D(ST_2)$

$= \{x \in D(T_1) ; T_1x \in D(S)\} \cap \{x \in D(T_2) ; T_2x \in D(S)\}$

よって ② がわかる //

ちなみに $D(S(T_1+T_2)) = \{x \in D(T_1) \cap D(T_2) ; (T_1+T_2)x \in D(S)\}$

$T_1x \in D(S)$, $T_2x \in D(S)$

と

$(T_1+T_2)x \in D(S)$

は異なる

Banach 空間, Hilbert 空間の例

① $\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d) = \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} ;\ L\text{-meas.} \int |f(x)|^p dx < \infty \}$

$d\mu(x) \to dx$ (μ : Lebesgue meas.)

$(1 \leq p \underset{+}{<} \infty)$

$\mathcal{L}^p(\mathbb{R}^d)/\sim \ = L^p(\mathbb{R}^d)$ ＝これは Banach sp.

∵ $\{f_n\}$ Cauchy列

$\{f_n(k)\}$ 部分列 ∃ $\|g_{k+1} - g_k\| \leq \frac{1}{2^k}$

$= \{g_k\}$

g_k が収束することを示す.

$|g_k(x)| \leq |g_1(x)| + \sum_{k=1}^{n-1} |(g_{k+1}(x) - g_k(x))| = h_n(x) \uparrow$

• $\|h_n\| \leq \|g_1\| + \sum_{k=1}^{n-1} \|g_{k+1} - g_k\| \leq \|g_1\| + 1$

$\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x) (\leq \infty)$ $h_n(x) \uparrow$ なので $h(x)$ は measurable

monotone conv. thm より

i) $h(x) < \infty$ $x \in \mathbb{R}^d \setminus N$ $\mu(N) = 0$

ii) $h \in L^p$

$x \in \mathbb{R}^d \setminus N$ のとき $|g_1(x)| + \sum^{\infty} |g_{k+1}(x) - g_k(x)| < \infty$

だから $g_k(x) \to g(x)$ (Cauchy列 in $\mathbb{C}$) $x \in \mathbb{R}^d \setminus N$

• $|g(x)| \leq |h(x)|$ より $g \in L^p$

• $|g_n(x) - g(x)|^p \leq 2^{p-1} (|g(x)|^p + |g_n(x)|^p)$

$\leq 2^{p-1} \cdot 2 \cdot |h(x)|^p$

Lebesgue の定理より

$\int |g_n(x) - g(x)|^p dx \to 0$ $\therefore \|f_n - g\| \leq \|f_n - f_{n(k)}\|$

$+ \|g_n - g\| \to 0$ //

② $C_b(\mathbb{R}^d) = \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} \ ; \ f : \text{cont}, \ \sup_x |f(x)| < \infty \}$

$\|f\| = \sup_x |f(x)|$ $\quad (C_b(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|)$ は Banach space

(∵) $\{f_n\}$ Cauchy列としよう.

$\sup_x |f_n(x) - f_m(x)| \to 0 \quad \therefore \exists \lim_n f_n(x) = f(x) \ \forall x$

ε-δ 論法 $\forall \varepsilon \ \exists N_\varepsilon$ s.t. $\forall n, m > N_\varepsilon$

$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

$\therefore \ |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

$\therefore \ \|f_n - f\| < \varepsilon \quad \forall n \geq N_\varepsilon \quad \therefore f_n \to f$

$f \in C_b(\mathbb{R}^d)$

∵) 一様収束 ∴ f は cont で

Cauchy列は有界列 ∴ $\|f_n\| \leq \exists M$

$\therefore \ |f_n(x)| \leq M \quad \therefore |f(x)| \leq M. \ \forall x.$

③ $f : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$\{x \in \mathbb{R}^d ; f(x) > a\} = f^{-1}((a, \infty)) \in \mathcal{B}$

$\inf\{ a \in \mathbb{R} ; \mu(f^{-1}(a, \infty)) = 0 \} = \operatorname{ess\,sup} f(x)$

$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d) = \{ f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C} ; \ L\text{-meas.} \ \operatorname{ess.sup}|f(x)| < \infty \}$

$\mathcal{L}^\infty(\mathbb{R}^d) \backslash \sim \ = L^\infty(\mathbb{R}^d)$

ess.sup の def から明かなこと $\quad \operatorname{ess\,sup} f(x) = s$

$\exists a_\varepsilon < s + \varepsilon$ s.t. $\mu(\underbrace{f^{-1}(a_\varepsilon, \infty)}_{\Omega_\varepsilon}) = 0$

i.e., $x \in \mathbb{R}^d \backslash \Omega_\varepsilon \Rightarrow |f(x)| \leq a_\varepsilon < s + \varepsilon$

$\mathbb{R}^d \setminus \Omega_{\frac{1}{m}} \ni x \Rightarrow |f(x)| \le s + \frac{1}{m}$

$\mathbb{R}^d \setminus \Omega \ni x \not\Rightarrow |f(x)| \le s \qquad \Omega = \bigcup_{m=1}^{\infty} \Omega_{\frac{1}{m}}$

$L^\infty(\mathbb{R}^d)$ は Banach space

∵ $\{f_n\}$ Cauchy 列

$\exists \{f_{n(k)}\} = \{g_k\}$ s.t. $\sum_{k=1}^{\infty} \|g_{k+1} - g_k\| \le 1$

$g_n(x) = g_1(x) + \sum_{k=1}^{n-1} (g_{k+1}(x) - g_k(x)) \qquad \lim_n g_n(x) = g(x) \ (\le \infty)$

$x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega_k \Rightarrow |g_{k+1}(x) - g_k(x)| \le \|g_{k+1} - g_k\|$ とできる

$\bigcup \Omega_k = \Omega$ とおけば $\mu(\Omega) = 0$ かつ

$|g_{k+1}(x) - g_k(x)| \le \|g_{k+1} - g_k\| \ \forall k$

$x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$ のとき

$\therefore$ ~~$\{g_n(x)\}$ は Cauchy 列になる~~

$\therefore$ ~~$\exists \lim_n g_n(x) = g(x) \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$~~.

$|g(x)| \le \|g_1\| + 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$

$\therefore \operatorname{ess\,sup} |g(x)| \le \|g_1\| + 1 < \infty \quad \therefore g \in L^\infty$

次に $\forall \varepsilon \ \exists n$ s.t. $|g_n(x) - g(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \Omega$

$\therefore \operatorname{ess\,sup} |g_n(x) - g(x)| < \varepsilon$

$\therefore \|g_n - g\| < \varepsilon$ //

Lemma 7.2 $C_0^\infty(\mathbb{R}^d) \subset L^p$ $(1 \le p < \infty)$ は dense

∵ ~~p=1 のとき示す~~

$f \in L^p$ $f \geq 0$ としておく.

$$f_n(x) = \begin{cases} n & f(x) \geq n \\ f(x) & f(x) < n \\ 0 & \end{cases} \quad |x| \leq n, \quad |x| > n$$

$\therefore \|f_n - f\|_{L^p} \to 0 \ (n \to \infty)$.

よって $f_n = g$ としておく

g に対して step ft h_n が $h_n(x) \uparrow g(x)$

このとき $\int |g(x) - h_n(x)|^p dx \leq 2^{p-1} \int |g|^p + |h_n|^p$

$\leq 2^{p-1} \cdot 2 \int |g|^p$

$\therefore \lim_n \int |g(x) - h_n(x)|^p = 0.$

$$h_n(x) = \sum_{j=1}^{N} a_j \mathbb{1}_{A_j} \qquad 0 \leq a_j \leq n$$

$A_j \subset \mathcal{L}$

かつ $\mu(A_j) < \infty$

A_j の正則性

$\underset{\text{cpt}}{K_j} \subset A_j \subset \underset{\text{open}}{F_j}$ $\qquad \mu(F_j \setminus K_j) < \varepsilon$

$\exists \varphi_j \in C_0^\infty$ s.t. $\begin{cases} \varphi_j(x) = 1 & \text{on } K_j \\ \varphi_j(x) = 0 & \text{on } F_j^c \\ 0 \leq \varphi_j \leq 1 \end{cases}$

$$\varphi = \sum_{j=1}^{N} a_j \varphi_j \in C_0^\infty$$ とおくと

$$\int |h_n(x) - \varphi(x)|^p \leq n^p N \varepsilon$$ とできる

$$\therefore \|f - \varphi\|^p \leq \left(\|f - h_n\|^p + \|h_n - \varphi\|^p\right) 2^{p-1} \quad //$$

Example $C^m(\Omega)$ $\Omega \subset \mathbb{R}$

$B^m(\Omega) = \{ f \in C^m(\Omega) ; f^\alpha$ は bdd $\}$ $|\alpha| \le m$

$\mathcal{H} = B^0(\mathbb{R})$ bdd cont on $\mathbb{R}$ $\|\cdot\|_\infty$ Banach sp.

$T = \frac{d}{dx}$, $D(T) = B^1(\mathbb{R})$ は unbdd on B^0

- $u_n(x) = \sin nx$ $\|u_n\|_{B^0} = 1$
- $Tu_n = n \cos nx$ $\therefore \|Tu_n\|_{B^0} = n$

$\therefore \frac{\|Tu_n\|}{\|u_n\|} = n$ $\therefore \|T\| \geq n$ //

Example $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$

$T = \frac{d}{dx}$, $D(T) = \{ f \in L^2 ; f \in C^1$ かつ $f' \in L^2 \}$

$\varphi \in C_0^1(\mathbb{R})$ に対して $\varphi(nx) = \varphi_n(x) \in C_0^1 \in L^2$

$T\varphi_n = n\varphi'(nx)$

$ndx = dy$

$\|\varphi_n\|^2 = \int |\varphi(nx)|^2 dx = \frac{1}{n}\|\varphi\|^2$

$\|T\varphi_n\|^2 = n^2 \int |\varphi'(nx)|^2 dx = n\|\varphi'\|^2$

const

$\therefore \frac{\|T\varphi_n\|^2}{\|\varphi_n\|} = n^2 \frac{\|\varphi'\|}{\|\varphi\|} \to \infty$ //

bdd op の例

Example $f \in L^p(\mathbb{R})$ $1 \le p \le \infty$

$Ku = f * u = \int_{\mathbb{R}} f(x-y)\, u(y)\, dy$ = のとき

$K \in B(L^q, L^r)$ where $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1$ の関係

$\|Ku\|_r \le \|f\|_p \|u\|_q$

掛け算作用素 $|f(x)|<\infty$ a.e. とする

$f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ measurable function on $\mathbb{R}^d$

- $T_f u = fu$
- $D(T_f) = \{u \in L^p ; fu \in L^p\}$

multiplication op.

Lemma A $1 \le p \lneq \infty$ $D(T_f)$ は dense

∵ $\Omega_N = \{x \in \mathbb{R}^d ; |f(x)| \le N\}$

$\mathbb{R}^d \supseteq \setminus \bigcup_{N=1}^{\infty} \Omega_N = N$ ← null set

$|f(x)| < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \setminus N$

$1_{\Omega_N} \uparrow 1$ a.e $\quad \forall u \in L^p$ に対して $1_{\Omega_N} u = u_N$

もちろん $u_N \in D(T_f)$ ∵ $\int |f u_N|^p dx \le N^p \int |u|^p < \infty$.

さらに $u_N \to u$ in L^p

∵ $\int_{\mathbb{R}^d} |u - u_N|^p = \int |u|^p |1 - 1_{\Omega_N}|^p \to 0$

monotone conv.

結局 $\exists u_N$ s.t. $u_N \in D(T_f)$ かつ $u_N \to \forall u \in L^p$

なので $D(T_f)$ は dense.

Lemma B $f \in L^\infty$ のとき $T_f \in B(L^p)$ かつ $\|T_f\| = \|f\|_\infty$

∵ $\|fu\|_{L^p} \le \|f\|_\infty \|u\|_{L^p}$ $\therefore \|T_f\| \le \|f\|_\infty$

逆向きを示す. $0 < \eta < \|f\|_\infty$ に対して

$x \in \Omega_\eta \Leftrightarrow |f(x)| > \eta \quad |\Omega_\eta| > 0$ $\quad \Omega_\eta$

$u_\eta = u 1_{\Omega_\eta}$ のとき $\|f u_\eta\|_{L^p} \ge \eta \left(\int_{\Omega_\eta} |u|^p\right)^{1/p}$

$$\therefore \quad \frac{\|f u_\eta\|}{\|u_\eta\|} \geq \eta$$ 当い前だよね

$$\therefore \quad \sup_\eta \frac{\|T_f u_\eta\|}{\|u_\eta\|} \geq \sup_\eta \eta = \|f\|_\infty$$

$$\therefore \quad \|f\|_\infty \leq \|T_f\|.$$ うまいね.

Section 8 Closed operator.

Bounded op ⇔ cont op

i.e., $f_n \in \cancel{D(T)}\ \mathcal{H}$ $f_n \to f$ $\cancel{\in D(T)}$ ⇒ $Tf_n \to Tf$

Closed op ⇔

$f_n \in D(T)$ $f_n \to f$ $Tf_n \to g$

⇒ $f \in D(T)$ かつ $Tf = g$

operator は何も言わなければつねに linear とする

$G(T) = \{ (\varphi, T\varphi) \in \mathcal{H} \oplus K \ ; \ \varphi \in D(T) \}$

graph

Lemma 8.1

① $G(T)$ is a subspace かつ $(0, y) \in G(T)$ なら $y = 0$

② $G \subset \mathcal{H} \oplus K$ subspace かつ $(0, y) \in G$ なら $y = 0$

⇒ $^{\exists}T : \mathcal{H} \to K$ linear op s.t. $G = G(T)$.

∵ ① 自明 $D(T) = \{ x \in \mathcal{H} \ ; \ (x, {}^{\exists}y) \in G \}$

② $(x\ y) \in G$ とする。このとき $y = Tx$ と定める。

⚠ これは well-defined ∵) $(x\ y), (x\ y') \in G$

⇒ $(0, y - y') \in G$

∴ $y = y'$ //

〈1〉 T は linear

∵) $\forall x_1, x_2 \in D(T)$ に対して $T(x_1 + x_2) = Tx_1 + Tx_2$ をいう

$(x_1, {}^{\exists}y_1), (x_2, {}^{\exists}y_2) \in G$ ∴ $(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \in G$

ゆえに $y_1 = Tx_1$ $y_2 = Tx_2$, $T(x_1 + x_2) = y_1 + y_2$

同様に $x \in D(T)$ ならば $\alpha x \in D(T)$ かつ

$T(\alpha x) = \alpha Tx$ も示せる。

〈2〉 $G = G(T)$ $G \supset G(T)$ は OK

$\forall (x, y) \in G$ は $y = Tx$ ∴ $(x, y) \in G(T)$

∴ $G \subset G(T)$ //

Def 8.2

① Closed op　　T is a closed op $\Leftrightarrow$ $G(T)$ is closed

② Closable op　　T is a closable $\Leftrightarrow$ $\exists S$ closed s.t. $T \subset S$.

注 T closed. i.e. $(x_n, Tx_n) \to (x, y)$ のとき $(x, y) \in G(T)$ つまり $x \in D(T)$ かつ $y = Tx$.

Lemma 8.3 (1) $T \subset S \Leftrightarrow G(T) \subset G(S)$

(2) T closable のとき $\exists \bar{T}$ s.t.

(1) closed

(2) $\overline{G(T)} = G(\bar{T})$

(3) $\bar{T}$ は最小の閉拡大

∵ (1) 自明

(2) $T \subset S$　S は closed

∴ $x_n \in D(T)$　$Tx_n \to y$　$\Rightarrow$　$x_n \in D(S)$　$Sx_n \to y$

$x_n \to 0$　　$x_n \to 0$

∴ $y = 0$ になる.　　∴ $S0 = 0 = y$

いま $(0, y) \in \overline{G(T)}$ とするとき $\exists (x_n, Tx_n) \to (0, y)$

上のギロンより $y = 0$

つまり $\overline{G(T)} = G(\bar{T})$ となる. $\bar{T}$ は closed

また $G(T) \subset G(\bar{T})$ より $T \subset \bar{T}$

また $T \subset S$ のとき $G(T) \subset G(S)$ ← closed

$\overline{G(T)}$ は $G(T)$ の最小閉拡大だから

$G(T) \subset G(\bar{T}) \subset G(S)$　//

Section 9 Adjoint operators
(共役作用素)

- $(Ax, y)_{\mathbb{C}^n} = (x, A^* y)_{\mathbb{C}^n}$
- $(Ax, y)_{\mathcal{H}} = (x, \overset{\exists}{A^+} y)_{\mathcal{H}}$ A b'dd.

Def 9.1 $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ densely defined.

$D(T^*) = \{ y \in \mathcal{H} ; (Tx, y) = (x, \overset{\exists}{z}) \ \forall x \in D(T) \}$

$T^* y = z$

- これは $D(T)$ が dense なので well-defined
- $(Tx, 0) = (x, 0) = 0$ だから $0 \in D(T^*)$ かつ $T^* 0 = 0$

  $D(T^*)$ がたくさんあるかどうか一般にはわからない
- $y \in D(T^*)$ のとき $|(Tx, y)| \leq \|x\| \, \|z\|$ $\forall x \in D(T)$

$F(\bar{x}) = (Tx, y)$ と def すれば

$F : D(T) \to \mathbb{C}$ b'dd $\therefore \bar{F} : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ b'dd

s.t. $|\bar{F}(\bar{x})| \leq \|x\| \cdot \|z\|$

逆に $|(Tx, y)| \leq C \|x\|$ $\forall x \in D(T)$ のとき

やっぱり $|\bar{F}(\bar{x})| \leq C \|x\|$

Riesz' lemma により $\bar{F}(\bar{x}) = (x, \overset{\exists}{z})$

つまり $\bar{F}(\bar{x}) = (Tx, y) = (x, z)$ $\therefore y \in D(T^*)$

Lemma 9.2 $T, S : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ densely def

(1) $T \subset S \Rightarrow S^* \subset T^*$

(2) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

(3) $D(T+S)$ dense $\Rightarrow (T+S)^* \supset T^* + S^*$

(4) $D(TS)$ dense $\Rightarrow (TS)^* \supset S^* T^*$

∵ (1) と (3) のみ示す.

(1) $y \in D(S^*)$ とする $(Sx, y) = (x, z)$ $\forall x \in D(S)$

特に $x \in D(T)$ $(\subset D(S))$ とすれば

$(Tx, y) = (x, z)$ ∴ $y \in D(T^*)$ かつ $z = T^* y$.

(3) $y \in D(T^*) \cap D(S^*) = D(T^* + S^*)$ とする

$(Tx, y) = (x, z_1)$

$(Sw, y) = (w, z_2)$

∴ $((T+S)x, y) = (x, z_1 + z_2)$ $\forall x \in D(T+S)$

∴ $y \in D((T+S)^*)$ かつ

$(T+S)^* y = z_1 + z_2$. //

closedness と adjoint の関係を check する.

Lemma 9.3 $G(T^*) = U[G(T)^\perp] = [UG(T)]^\perp$

[$U(x \ y) = (y \ -x)$ ✳

$UU = -I$ $U^*U = UU^* = I$ unitary]

∵ $UG(T) \ni U(x, Tx) = (Tx, -x)$ $\forall x \in D(T)$

$[UG(T)]^\perp \ni (y, z)$ とすると $(y, z) \perp (Tx, -x)$

∴ $(y, Tx) - (z, x) = 0$

∴ $(Tx, y) = (x, z)$ ∴ $y \in D(T^*)$

かつ $z = T^* y$

逆も然り i.e. $[UG(T)]^{\perp} \ni (y, z)$

$\Leftrightarrow (y, T^*y) \quad y \in D(T^*)$

$\therefore [UG(T)]^{\perp} = G(T^*)$

$[UG(T)]^{\perp} = U[G(T)]^{\perp}$ はすぐにわかる. //

Lemma 9.4 $D(T)$ is dense.

① T^* is closed (densely detかどうかわからない)

② T closed $\Rightarrow D(T^*)$ dense かつ

$T^{**} = T$

③ T closable $(\bar{T})^* = T^*$

④ T closable $\Leftrightarrow D(T^*)$ dense

このとき $T^{**} = \bar{T}$.

∵ ① $G(T^*) = (UG(T))^{\perp}$ は closed //

② $D(T^*)^{\perp} = \{0\}$ を示せばいい

$D(T^*)^{\perp} \ni x$ とする $(0, x) \in [UG(T^*)]^{\perp}$

∵) $\langle (0, x), (T^*y - y) \rangle = -(x, y) = 0$.

とくに $[UG(T^*)]^{\perp} = G(T)^{\perp\perp} = \overline{G(T)} = G(T)$

$\therefore x = 0$

また $G(T^{**}) = [UG(T^*)]^{\perp} = \cdots = G(T)$ //

③ $G(T^*) = U[G(T)^{\perp}] = U[\overline{G(T)}^{\perp}]$

$= U[G(\bar{T})^{\perp}] = G((\bar{T})^*)$

④ うらへ. つづく.

($\Rightarrow$) $D(T^*) = D((\bar{T})^*)$ は dense

($\Leftarrow$) $D(T^*)$ dense なら T^{**} は well-def

$\therefore\ G(T^{**}) = \cdots = \overline{G(T)} \supset G(T)$

$\therefore\ T^{**} = \bar{T} \supset T$ closable.

T : closable $\Leftrightarrow$ $D(T^*)$ dense.

Non closable なる例 $\mathcal{H}$, $\{\varphi_n\}$ CONS

$\ell : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ unbdd functional

$D(\ell) \subset \mathcal{H}$
dense

$D(A) = D(\ell)$ かつ $A\varphi := \ell(\varphi)\varphi_1$

このとき $(A\varphi_1, y) = \overline{\ell(\varphi)}(\varphi_1, y)$
は y の bdd functional になる (if $(\varphi_1, y) \neq 0$)

$\therefore\ D(A^*) = \{y \in \mathcal{H} ;\ (\varphi_1, y) = 0\}$ //

T : closed op $\quad D \subset \mathcal{H}$

$\overline{T\Gamma_D} = T$ $\quad$ D is called core of T.

Section 10 Symmetric op.

Def 10.1 T : densely defined

① T is a sym op $\Leftrightarrow$ $T \subset T^*$

② T is a s.a. $\Leftrightarrow$ $T = T^*$

Lemma 10.1 Let T be sym.
Then T is closable and $\bar{T}$ is also sym.

(∵) $T \subset T^*$ ∴ $D(T) \subset D(T^*)$ dense
∴ T is closable

$$T \subset T^* = (\bar{T})^* \qquad \therefore \bar{T} \subset (\bar{T})^* \quad //$$

Tの closed ~~ys~~ sym な拡大は常に存在する
T sym closed　　S を T の拡大

$$T \subset S$$
$$T^* \supset S^*$$
$$\therefore T \subsetneq S \subset S^* \subset T^*$$

i.e. $S = T^* \restriction_D$ という形になっている.

ここで $D \subset D(T^*)$

以下 T sym closed. S はその sym closed な拡大として考える.

T : symmetric + closed

T^* : closed

$(D(T^*), \|\cdot\|_T)$ is a Hilbert space

$\|\cdot\|_T$ は $(\varphi, \psi)_T = (\varphi, \psi) + (T^*\varphi, T^*\psi)$

graph inner product.

$\because)$ $\|\varphi_n - \varphi_m\|_T \to 0$

$\Leftrightarrow$ $\|\varphi_n - \varphi_m\| + \|T^*\varphi_n - T^*\varphi_m\|$

$\therefore$ $\exists \varphi$ s.t. $\varphi_n \to \varphi$ $\quad \exists g$, $T^*\varphi_n \to g$

$\therefore$ $\varphi \in D(T^*)$ and $g = T^*\varphi$

$\therefore$ $\|\varphi_n - \varphi\| \to 0$

$D(T) \overset{\text{closed}}{\subset} D(T^*)$

$\therefore$ $D(T^*) = D(T) \oplus_T \overset{?}{D(T)^+}$

実は $D(T^*) = D(T) \oplus_T K_+ \oplus_T K_-$

where $K_+ = \mathrm{Ker}(i - T^*)$

$K_- = \mathrm{Ker}(i + T^*)$ これを示したい

Lemma 10.2 T sym. closed op

Then $\mathbb{C}^+ \ni \lambda \longmapsto \dim \ker(\lambda - T^*) \in \mathbb{Z}_+$

is a constant.

∵ $\lambda = \nu + i\eta\mu$ $\nu, \eta \in \mathbb{R}$

注 $\mathrm{Ran}(\lambda - T)$ is closed

$\|(\lambda - T)\varphi\|^2 = \|(\nu - T) + i\eta\mu\|^2$

$= \|\mu\varphi\|^2 - 2\mathrm{Re}\left((\nu - T)\varphi, i\mu\varphi\right) + \|(\nu - T)\varphi\|^2$

$\geq |\mu|^2 \|\varphi\|^2$ からわかる

注 $\mathrm{Ran}(\bar{\lambda} - T)^\perp = \ker(\lambda - T^*)$

∵) $(\supset)$ $\varphi \in \ker(\lambda - T^*)$

$(\psi, (\lambda - T^*)\varphi) = 0$

$((\bar{\lambda} - T)\psi, \varphi) = 0$ ∴ $\varphi \in \mathrm{Ran}(\bar{\lambda} - T)^\perp$

$(\subset)$ $\varphi \in \mathrm{Ran}(\bar{\lambda} - T)^\perp$

$(\psi, (\lambda - T^*)\varphi) = ((\bar{\lambda} - T)\psi, \varphi) = 0.$

dim ker

~~dim~~ $((\lambda + \eta) - T^*) = \cancel{M}\ \dim M$

$\dim\ker(\lambda - T^*) = \dim N$ とする

$\dim M = \dim N$ 示す

$\dim M \leq \dim N$ を示す 背理法

$\dim M > \dim N$ のとき $M = \underbrace{M \cap N}_{(\neq M)} \oplus \underbrace{M \cap N^\perp}_{(\neq \phi)}$

∴ $M \cap N^\perp \neq \phi$

実は $|\eta| \ll 1$ のとき $M \cap N^\perp = \phi$ になる

$M \cap N^{\perp} \ni \varphi, \quad \|\varphi\| = 1$ とする

$N^{\perp} = \mathrm{Ran}\,(\bar{\lambda} - T) \quad \therefore \varphi = (\bar{\lambda} - T)u$

$\therefore 0 = ((\lambda + \eta - T^*)\varphi, u) = (\varphi, (\bar{\lambda} - T)u) + \bar{\eta}(\varphi, u)$

$= \|\varphi\|^2 - |\eta|\,\|\varphi\|\,\|u\|$

一方 $\|\varphi\| = \|(\bar{\lambda} - T)u\| \geq |\mu|\,\|u\| \quad \therefore \|u\| \leq \dfrac{\|\varphi\|}{|\mu|}$

$\therefore 0 \geq \|\varphi\|^2\left(1 - \dfrac{|\eta|}{|\mu|}\right) > 0$ if $|\eta| < |\mu|$ のとき

全く同様にして $\dim M \geq \dim N$ if $|\eta| < |\mu|/2$

示すことができるから

$\dim M = \dim N$ if $|\eta| < |\mu|/2$.

$\mathbb{C}^+ \to \mathbb{C}^-$ へかえても同じ 」

$D(T^*) \supset X$

(1) X が T-closed $\Leftrightarrow$ $\|\cdot\|_T$ で X が closed

(2) X が T-sym $\Leftrightarrow$ $\forall \varphi, \psi \in X \ (T^*\varphi, \psi) - (\varphi, T^*\psi) = 0$

Lemma 10.3 T sym, closed.

$T \subset S$ closed sym ext

$\Leftrightarrow {}^{\exists}D \ (D(T) \subset D \subset D(T^*))$ s.t. T- closed
T- sym
$S = T^*|_D$

(∵) ($\Rightarrow$) $T^*|_{{}^{\exists}D} = S$ は ok

D の性質を check する

T- closed ∵) $D \ni \varphi_n$, $\varphi_n \to \varphi \in D(T^*)$ in $\|\cdot\|_T$ とする

このとき $\|\varphi - \varphi_n\|^2 + \|T^*\varphi - T^*\varphi_n\|^2 \to 0$

$\|\varphi - \varphi_n\|^2 + \|T^*\varphi - S\varphi_n\|^2 \to 0$

$\therefore$ $\varphi \in D(S) = D$ かつ $T^*\varphi = S\varphi$ $\therefore$ D : T- closed

T- sym ∵) $(T^*\varphi, \psi) - (\varphi, T^*\psi) = (S\varphi, \psi) - (\varphi, S\psi) = 0$

where $\varphi, \psi \in D$.

($\Leftarrow$) $S = T^*|_D$ と定める.

$T \subset S$ は ok

closed ∵) $\varphi_n \in D$ $\varphi_n \to \varphi$, $S\varphi_n \to g$ とする

i.e., $\varphi_n \to \varphi$, $T^*\varphi_n \to g$ T^* は closed より

$\varphi \in D(T^*)$ かつ $g = T^*\varphi$

$\therefore \|\varphi_n - \varphi\|_T \to 0$ $\therefore$ $\varphi \in D$ $\therefore$ $g = T^*\varphi = S\varphi$.

sym ∵) $(S\varphi, \psi) - (\varphi, S\psi) = (T^*\varphi, \psi) - (\varphi, T^*\psi) = 0$.

$\forall \varphi, \psi \in D$

//

2017/5/25 (木)

6

Lemma 10.4 T : sym. closed

$D(T)$, $K_\pm$ は T- closed

∵) $\forall \varphi_n \in D(T)$ $\varphi_n \to \varphi$ in $\|\cdot\|_T$ とする

i.e. $\|\varphi_n - \varphi\|^2 + \|T^*\varphi_n - T^*\varphi\|^2 \to 0$

i.e. $\|\varphi_n - \varphi\|^2 + \|T\varphi_n - T^*\varphi\|^2 \to 0$

∴ $\varphi \in D(T)$ かつ $T^*\varphi = T\varphi$.

$\forall \varphi_n \in K_+$ $\varphi_n \to \varphi$ ∴ $\varphi_n \to \varphi$ in $\|\cdot\|$

K_+ は closed だったから $\varphi \in K_+$, K_- も同様.

Lemma 10.5

$D(T^*) = D(T) \oplus_T K_1 \oplus_T K_2$

∵) (1) 直交している

∵) $D(T) \perp K_1$ $D(T) \ni \varphi$ $K_1 \ni \psi$

$(\varphi, \psi)_T = (\varphi, \psi) + (T^*\varphi, T^*\psi)$

$= (\varphi, \psi) + (T\varphi, i\psi)$

$= (\varphi, (1 + iT^*)\psi) = i(\varphi, (T^* - i)\psi) = 0$

$K_1 \perp K_2$ $K_1 \ni \varphi_1$ $K_2 \ni \psi$

$(\varphi_1, \psi)_T = (\varphi_1, \psi) + (T^*\varphi_1, T^*\psi) = (\varphi_1, \psi) - (\varphi_1, \psi) = 0$

(2) $\psi \perp D(T) \oplus K_1 \oplus K_2 \Rightarrow \psi = 0$

$\varphi \in D(T)$ このとき $0 = (\psi, \varphi)_T = (\psi, \varphi) + (T^*\psi, T^*\varphi)$

$\Rightarrow (T^*\psi, T^*\varphi) = -(\psi, \varphi)$

∴ $T^*T^*\varphi = -\varphi$

∴ $(T^* + i)(T^* - i)\varphi = 0$

$(T^* + i)h = 0$

$\therefore (T^* - i)\varphi \in K_-$　　ここで $h \in K_-$ とすれば

$$
\begin{aligned}
(h, (T^* - i)\varphi) &= -i(h, \varphi) + (h, T^*\varphi) \\
&= -i[(h, \varphi) + (-ih, T^*\varphi)] \\
&= -i[(h, \varphi) + (T^*h, T^*\varphi)] \\
&= -i(h, \varphi)_T = 0
\end{aligned}
$$

$\therefore (T^* - i)\varphi \in K_- \cap K_+^\perp = \{0\}$

$\therefore \varphi \in K_+$　$\therefore \varphi \in K_+ \cap K_+^\perp$　$\therefore \varphi = 0$

Thm 10.6　von Neumann 拡大定理

T : sym + closed.

T の sym closed ext と

$U : K_+ \to K_-$ partial isometry は

1:1 対応する.

$$D(T_U) = \{\varphi \oplus \varphi_+ \oplus U\varphi_+ \,;\, \varphi \in D(A),\ \varphi_+ \in I(U)\}$$

$$T_U(\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+) = T\varphi + i\varphi_+ - iU\varphi_+$$

(ここで $U : K_+ \to K_-$ が partial isometry とは

$\exists I(U) \subset K_+$　$\exists F(U) \subset K_-$

$U : I(U) \to F(U)$ isometry

$F(U) = U I(U)$)

If $\dim I(U) < \infty$ ならば

$$n_\pm(T_U) = n_\pm(T) - \dim I(U)$$

Lemma 10.6

(1) $D(T) \subset D \subset D(T^*)$, T closed, T sym

$\Leftrightarrow \exists D_1 \subset K_+ \oplus_t K_-$ st T closed, T sym

and $D = D(T) \oplus_t D_1$

(2) $D_1 \subset K_+ \oplus_t K_-$ T closed T sym

$\Leftrightarrow D(T) \oplus D_1$ は T-closed, T-sym

∵ (2) から proof する

$\varphi, \psi \in D(T) \oplus D_1$ のとき

$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 \quad \psi = \psi_0 + \psi_1$

$(T^*\varphi_0, \psi_1) - (\varphi_0, T^*\psi_1) = (T\varphi_0, \psi_1) - (\varphi_0, T^*\psi_1) = 0$

$(T^*\varphi_1, \psi_0) - (\varphi_1, T^*\psi_0) = (T^*\varphi_1, \psi_0) - (\varphi_1, T\psi_0) = 0$

$(T^*\varphi_0, \psi_0) - (\varphi_0, T^*\psi_0) = 0$

$(T^*\varphi_1, \psi_1) - (\varphi_1, T^*\psi_1) = 0$

$\therefore (T^*\varphi, \psi) - (\varphi, T^*\psi) = 0 \quad \therefore T$-sym

$D(T) \oplus D_1 \ni \varphi_n = f_n + g_n$, $\exists \varphi \in D(T^*)$

$\|\varphi_n - \varphi\|_T \to 0$ とする $\quad \varphi = f + g \in D(T) \oplus \underline{K_1 \oplus K_2}$

$\therefore \|f_n + g_n - f - g\|_T^2$

$= \|f_n - f\|^2 + \|g_n - g\|^2 \to 0$

$D(T)$ and D_1 は closed だから

$f \in D(T)$, $g \in D_1$ //

① の ☺

$D_1 = D \cap (K_+ \oplus_r K_-)$ とする.

このとき D_1 は T-closed (ok)

$D_1 \ni \varphi_1 \psi$ は $\varphi_1 \psi \in D$ でもあるから T-sym.

② $\varphi \in D$ とする. $\varphi = \underset{\substack{\cap \\ D(T)}}{\varphi_0} + \underset{\substack{\cap \\ K_+ \oplus_r K_-}}{\varphi_1}$

$\varphi_0 \in D$, $\varphi \in D$ ∴ $\varphi_1 \in D$ ∴ $\varphi_1 \in D_1$

つまり $D \subset D(T) \oplus_r D_1$

また $D(T) \oplus_r D_1 \subset D$ は自明.

∴ $D = D(T) \oplus D_1$

Thm 10.7 Von Neumann 拡大定理

T : sym closed

$\{ T \subset S$ sym closed extension$\}$

$\underset{1:1}{\leftrightarrow} \{ U : K_+ \to K_-$ partial isometries$\}$

$D(T_U) = \{ \varphi + \varphi_+ + U\varphi_+ \mid \varphi \in D(T), \varphi_+ \in I(U) \}$

$T_U(\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+) = T\varphi + i\varphi_+ - iU\varphi_+$

If $\dim I(U) < \infty \Rightarrow n_\pm(T_U) = n_\pm(T) - \dim I(U)$

(∵) $T \subset S$ とする. $S = T^* \restriction D$ D T-sym T-closed

$\therefore D = D(A) \oplus D_1$ D_1 T-closed T-sym.

$$D_1 \ni \varphi = \varphi_1 + \varphi_2 \in K_+ \oplus K_-$$

$0 \underset{\uparrow}{=} (T^*\varphi, \varphi) - (\varphi, T^*\varphi)$ を式変形する

T-sym を課す

$$(T^*\varphi_1 + T^*\varphi_2,\ \varphi_1 + \varphi_2) - (\varphi_1 + \varphi_2\ \ T^*\varphi_1 + T^*\varphi_2)$$

$$= (i\varphi_1 - i\varphi_2\ \ \varphi_1 + \varphi_2) - (\varphi_1 + \varphi_2\ \ i\varphi_1 - i\varphi_2)$$

$$= \cancel{(i\varphi_1\ \varphi_1)} + (i\varphi_1\ \varphi_2) + (-i\varphi_2\ \varphi_1) + \cancel{(-i\varphi_2\ \varphi_2)}$$

$$- [\cancel{(\varphi_1\ i\varphi_1)} + (\varphi_1\ -i\varphi_2) + (\varphi_2\ i\varphi_1) + \cancel{(\varphi_2\ -i\varphi_2)}]$$

$$= -2i(\varphi_1\ \varphi_1) + 2i(\varphi_2\ \varphi_2)$$

$\therefore \|\varphi_1\|^2 = \|\varphi_2\|^2$ を得る.

ここで $D_1 \ni \varphi_1 + \varphi_2$ に対して $U: \varphi_1 \mapsto \varphi_2$ という map を考える. これは well-defined

i.e. $D_1 \ni \varphi_1 + \varphi_2'$ とするとき $U\varphi_1 = \varphi_2'$

$\therefore D_1 \ni (\varphi_2 - \varphi_2') + 0$ $\therefore \|\varphi_2 - \varphi_2'\| = 0 \therefore \varphi_2 = \varphi_2'$

$\therefore D_1 \ni \varphi = \varphi_1 + U\varphi_1$ と書き表される

$\therefore D(T_U) = \{\varphi + \varphi_+ + U\varphi_+ \mid \varphi_+ \in I(U), \varphi \in D(T)\}$

逆に $U: K_+ \to K_-$ を partial isometry とすれば

$D(T_U)$ と T_U を上で def すれば

$D(T_U) = D(T) \oplus I(U) \oplus UI(U)$

このとき $D(T_U)$ は T-closed + T-sym

∵) T-closed ∵) $D(T_U) \ni \varphi^n = \tilde{\varphi}_1 + \tilde{\varphi}_2 + \tilde{\varphi}_3$

$\| \varphi^n - \varphi \|_T^2 = \| \varphi_1^n - \varphi_1 \|_T^2 + \| \varphi_2^n - \varphi_2 \|_T^2 + \| \varphi_3^n - \varphi_4 \|_T^2 \to 0$

$\varphi_1 \in D(T)$ は ok

$I(U)$ は closed subspace of K_+

$\therefore \varphi_2^n \to \varphi_2$ in $\|\cdot\|_T$ なら $\varphi_2^n \to \varphi_2$ in $\mathcal{H}$

特に $\varphi_2 \in I(U)$　　同様に $\varphi_3 \in UI(U)$

T-sym. $D(T_U) \ni \varphi, \psi$ とすると

$\varphi = \varphi_0 + \varphi_+ + U\varphi_+$　$\psi = \psi_0 + \psi_+ + U\psi_+$ と表せる

$\therefore (T^*\varphi, \psi) - (\varphi, T^*\psi)$ を計算すると

$= (T\varphi_0 + i\varphi_+ - iU\varphi_+, \psi_0 + \psi_+ + U\psi_+)$

$- (\varphi_0 + i\varphi_+ + U\varphi_+, T\psi_0 + i\psi_+ - iU\psi_+)$

$= \cancel{(T\varphi_0, \psi_0)} + \cancel{(T\varphi_0, \psi_+)} + \cancel{(T\varphi_0, U\psi_+)}$

$- i\cancel{(\varphi_+, \psi_0)} - i\cancel{(\varphi_+, \psi_+)} - i\cancel{(\varphi_+, U\psi_+)}$

$i\cancel{(U\varphi_+, \psi_0)} + i\cancel{(U\varphi_+, \psi_+)} + i(U\varphi_+, U\psi_+)$

$\cancel{(\varphi_0, T\psi_0)} + \cancel{(\varphi_0, i\psi_+)} + \cancel{(\varphi_0, -iU\psi_+)}$

$\cancel{(i\varphi_+, T\psi_0)} + \cancel{(i\varphi_+, i\psi_+)} + \cancel{(i\varphi_+, -iU\psi_+)}$

$\cancel{(U\varphi_+, T\psi_0)} + \cancel{(U\varphi_+, i\psi_+)} + (U\varphi_+, -iU\psi_+)$

$= -2i(\varphi_+, \psi_+) + 2i(U\varphi_+, U\psi_+) = 0$

//

Cor 10.8 T : sym + closed

① T is s.a. $\Leftrightarrow$ $n_+ = n_- = 0$
② T has s.a. ext $\Leftrightarrow$ $n_+ = n_-$ $(\leq \infty)$
③ T has no sym + closed ext. $\Leftrightarrow$ $(n_+, n_-) = (n, 0)$ or $(0, n)$

∵ ① $D(T^*) = D(T) \oplus K_+ \oplus K_-$
T s.a. $\Leftrightarrow$ $D(T^*) = D(T)$ $\therefore$ $K_+ = K_- = \{0\}$
$\Leftrightarrow$ $n_+ = n_- = 0$

② T_U に対して $K_\pm^U$ と $n_\pm(U)$ を考える
$n_\pm(U) = 0$ のとき s.a. だった

$K_+ = \mathrm{Ker}(-i + T_U^*) = \mathrm{Ran}(i + T_U)^\perp$ だった

$(i + T_U)(f + g + Ug) = (i+T)f + 2ig$

$(i+T)f \in \mathrm{Ran}(i+T)$
$2ig \in \mathrm{Ker}(-i + T^*) = \mathrm{Ra}(i+T)^\perp$
$\therefore$ $(i+T)f \perp 2ig$

$\mathrm{Ran}(i + T_U) = \mathrm{Ran}(i+T) \oplus I(U)$
$\therefore$ $\mathrm{Ran}(i+T) \oplus I(U) \oplus K_+^U = \mathcal{H}$
$K_+ = I(U) \oplus K_+^U$ となる
同様 $K_- = F(U) \oplus K_-^U$ となる.
$\dim I(U) = \dim F(U)$
$K_+(U) = K_-(U) = \{0\} \Leftrightarrow n_+ = n_-$

③ ($\Leftarrow$) $(n_+, n_-) = (0, n)$ のとき

$I(U) = \{0\}$ なので $F(U) = \{0\}$ 自明なU.

∴ 非自明な ~~sym~~ sym closed ext はない

($\Rightarrow$) 対偶

$(n_+, n_-) = (n, m)$ $0 < n \leq m$ とする.

このとき $\exists U$ s.t. $\dim I(U) \leq n$.

∴ $\exists$ sym + closed ext. //

⑧ 6/1

partial isometry $I(U)$ についての証明がかけていた

$T \subset S = T^*\restriction_D$ $\quad D = D(T) \overset{\exists}{\oplus} P_1$, $\quad P_1 = P_1(S) \subset K_+ \oplus K_-$

$D_1(S) \ni \varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

T-sym $\therefore \|\varphi_1\| = \|\varphi_2\|$ $\quad \therefore U : \varphi_1 \to \varphi_2$ well-def

$I(U) = \{ \varphi_1 \in K_+ \mid {}^{\exists}\varphi_2 \text{ st } \varphi_1 + \varphi_2 \in D_1 \}$

$I(U)$ は closed $\because$) $I(U) \ni \varphi_n \to \varphi$ in $\|\cdot\|$

そうして $\varphi \in K_+$

このとき $\psi_n \in K_-$ って $\varphi_n + \psi_n \in K_+ \oplus K_-$

$\|\varphi_n\| = \|\psi_n\|$ だから $\|\varphi_n - \varphi_m\| = \|\psi_n - \psi_m\| \to 0$

$\therefore {}^{\exists}\lim \psi_n = \psi \in K_-$

$\therefore \varphi_n + \psi_n \to \varphi + \psi \in K_+ \oplus_T K_-$

$\|\varphi_n - \varphi_m\|_T^2 = \|\varphi_n - \varphi_m\|^2 + \|T^*\varphi_n - T^*\varphi_m\|^2$

$= \|\varphi_n - \varphi_m\|^2 + \|\varphi_n - \varphi_m\|^2 \to 0$

$\therefore \varphi_n \to {}^{\exists}\varphi$ in $\|\cdot\|_T$

同様に $\|\psi_n - \psi_m\|_T \to 0$ $\therefore \psi_n \to \psi$ in $\|\cdot\|_T$

$\therefore \varphi_n + \psi_n \to \varphi + \psi$ in $\|\cdot\|_T$

D_1 は $\|\cdot\|_T$ で closed だから $\varphi + \psi \in D_1$

$\therefore \varphi \in I(U)$ $\quad \therefore I(U)$ は closed.

Cor 10.8 T : sym + closed

① T is s.a. $\Leftrightarrow$ $n_+ = n_- = 0$
② T has s.a. ext $\Leftrightarrow$ $n_+ = n_-$ $(\leq \infty)$
③ T has no sym + closed ext. $\Leftrightarrow$ $(n_+, n_-) = (n, 0)$ or $(0, n)$

∵ ① $D(T^*) = D(T) \oplus K_+ \oplus K_-$
T s.a. $\Leftrightarrow$ $D(T^*) = D(T)$ $\therefore$ $K_+ = K_- = \{0\}$
$\Leftrightarrow$ $n_+ = n_- = 0$

② T_U に対して $K_\pm^U$ として $n_\pm(U)$ を考える
$n_\pm(U) = 0$ のとき s.a. だった

$K_+ = \mathrm{Ker}(-i + T_U^*) = \mathrm{Ran}(i + T_U)^\perp$ だった

$(i + T_U)(f + g + Ug) = (i+T)f + 2ig$

$(i+T)f \in \mathrm{Ran}(i+T)$
$2ig \in \mathrm{Ker}(-i + T^*) = \mathrm{Ra}(i+T)^\perp$
$\therefore$ $(i+T)f \perp 2ig$

$\mathrm{Ran}(i + T_U) = \mathrm{Ran}(i+T) \oplus I(U)$
$\therefore$ $\mathrm{Ran}(i+T) \oplus I(U) \oplus K_+^U = \mathcal{H}$
$K_+ = I(U) \oplus K_+^U$ となる
同様 $K_- = F(U) \oplus K_-^U$ となる.
$\dim I(U) = \dim F(U)$
$K_+(U) = K_-(U) = \{0\} \Leftrightarrow n_+ = n_-$

③ ($\Leftarrow$) $(n_+, n_-) = (0, n)$ のとき

$I(U) = \{0\}$ なので $F(U) = \{0\}$ 自明なし.

$\therefore$ 非自明な ~~sym~~ sym closed ext はない

($\Rightarrow$) 対偶

$(n_+, n_-) = (n, m)$ $0 < n \leq m$ とする.

このとき $\exists U$ s.t. $\dim I(U) \leq n$.

$\therefore \exists$ sym + closed ext. //

境界条件とL^2理論

5/31 (2017)

測度空間の完備性について

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ 完備 meas. sp.

$f_n : X \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ meas $\forall n$

$f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ 関数.

fの定義域$= X$ としておく i.e. $\forall x \in X$で

$f(x) \in \overline{\mathbb{R}}$ は確定している

仮定 $f_n(x) \to f(x)$ $\forall x \in X \setminus N$

where $\mu(N) = 0$

このとき fは $\mathcal{B}$-meas.

$\because$ $\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f_n(x), & x \in X/N \\ \infty, & x \in N \end{cases}$

$N = \{x \mid \nexists \lim_n f_n(x)\}$

このとき $\tilde{f}_n$ は $\mathcal{B}$-meas

$\because$) $\alpha \leq \infty$ とする

$[\tilde{f}_n < \alpha] = [\tilde{f}_n < \alpha] \cap N \cup [\tilde{f}_n < \alpha] \cap N^c$

$= [\tilde{f}_n < \alpha] \cap N \cup [f_n < \alpha] \cap N^c = X \cup Y$

" $X \in \mathcal{B}$ (完備性) 実は $\alpha < \infty$なら $\emptyset$ どちらも$\emptyset$

必要ない $\alpha = \infty$なら $\neq \emptyset$

$Y \in \mathcal{B}$ $\therefore [\tilde{f}_n < \alpha] \in \mathcal{B}$ //

よって $\lim_n \tilde{f}_n(x) = \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \setminus N \\ \infty & x \in N \end{cases}$

$\tilde{f}(x)$は $\mathcal{B}$-meas $\alpha \leq \infty$ とする

$\mathcal{B} \ni [\tilde{f} < \alpha] = [\tilde{f} < \alpha] \cap N \cup \underbrace{[\tilde{f} < \alpha] \cap N^c}$

$= \emptyset \cup [f < \alpha] \cap N^c$

$\therefore [f < \alpha] \cap N^c \in \mathcal{B}$ また $[f < \alpha] \cap N \in \mathcal{B}$ (完備)

$\therefore [f < \alpha] \in \mathcal{B}$ //

次に $f_n : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$ が
a.e. で収束したとしよう すなわち

$$\exists \lim_n f_n(x), \quad x \in X \setminus N$$

$$\mu(N) = 0.$$

そこで $f(x) := \lim_n f_n(x) \quad x \in X \setminus N$

としておく. $x \in N$ に対しては 来

$f(x) := \underset{(\leq \infty)}{\text{arbitary}} \quad x \in N$ としておく

このとき f は meas ?

答 f は meas.

∵ $\tilde{f}_n(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \setminus N \\ \infty & x \in N \end{cases}$

は $\mathcal{B}$-meas.

さらに $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in X \setminus N \\ \infty & x \in N \end{cases}$

は $\tilde{f}_n(x) \to \tilde{f}(x) \quad \forall x \in X$ なので $\tilde{f}$ は

$\mathcal{B}$-meas.

$$\mathcal{B} \ni [\tilde{f} < \alpha] = [\tilde{f} < \alpha] \cap N \cup [\tilde{f} < \alpha] \cap N^c \quad (\alpha \leq \infty)$$

$$= \phi \cup [\tilde{f} < \alpha] \cap N^c$$

$$= \phi \cup [f < \alpha] \cap N^c$$

$\therefore [f < \alpha] \cap N^c \in \mathcal{B}$

一方 $[f < \alpha] \cap N \in \mathcal{B}$ (完備性)

$\therefore [f < \alpha] \in \mathcal{B}$

絶対連続関数 $f : (\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda) \to (\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}))$

$\exists h \in L^1$ s.t.

$$f(x) = f(0) + \int_0^x h(t)\,dt$$

また f は $x \in \mathbb{R} \setminus N$ ($\lambda(N) = 0$) 微分存在して

$$f'(x) = h(x) \quad x \in \mathbb{R} \setminus N$$

微妙なのは $f'(x)$ は $\forall x \in \mathbb{R}$ では定ぎされていない。

しかし $f'(x)$ も meas 関数の a.e. での極限であり $(\mathbb{R}, \mathcal{L}, \lambda)$ が完備なので

$$\tilde{f}' = \begin{cases} f'(x) & x \in \mathbb{R} \setminus N \\ \text{arbitrary} & x \in N \end{cases}$$

とても $\tilde{f}'$ は $\mathcal{L}$-meas.

さらに $\tilde{f}' = h$ a.e 実際は

$$\tilde{f}' = h \quad \text{on } \mathbb{R} \setminus N$$

また

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \tilde{f}'(x)\,dx$$ とできる.

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \overset{= h_f}{h_f(t)}\,dt \qquad \exists h_f : \text{可積分}$$

hは一意的に決まらない。 $h_f = g$ a.e. のとき

$f(x) = f(0) + \int_0^x g(t)\,dt$ とできるから

$[h] = \frac{d}{dx} f$ と表現することにする

φ, ψ が a.c. のとき $\varphi\cdot\psi$ も a.c.

$\therefore\ (\varphi\psi)(x) - \varphi\psi(0) = \int_0^x h_{\varphi\psi}(t)\,dt$

$h_{\varphi\psi} = h_\varphi \psi + \varphi h_\psi$ / $(\varphi\psi)' = h_{\varphi\psi}$ on $\mathbb{R}\setminus N$, $\exists N$ ← null set

⑥ $AC^2 \subset L^2$ を次で定義する。 f a.c. $[f]$ かつ $\|[f]\|_{L^2} < \infty$

注 $[f] = [g]$ とするとき g は a.c. とは限らない。

注

$AC^2 = \{[f] ; f \text{ a.c. かつ } \|[f]\| < \infty\}$

$AC^2 \ni [f], [g]$ かつ $[f] = [g]$ とするとき

$[f] = [\varphi]$ φ a.c.
$[g] = [\psi]$ ψ a.c. $\quad \therefore\ f = g$ a.e
$f = \varphi$ a.e
$g = \psi$ a.e

$\therefore\ \varphi = \psi$ a.e

$\therefore\ \varphi - \psi = 0$ a.e. かつ $\varphi - \psi$ は a.c.

$\therefore\ \varphi = \psi$.

f a.c. のとき $T[f]=[h_f]$ と定める.

また代表現を取り変えて $[f]=[g]$ とするとき

$T[g]=[h_f]$ と決める.

(注) $[g]=[\ell]$ のとき $[g]=[\ell]=[f]$, $\exists f$ a.c.

$\therefore\ T[g]=[h_f]=T[\ell]$ $\qquad T=\frac{d}{dx}$ $\quad i\frac{d}{dx}=P$

$$(P[f],[g])-([f],P[g]) \qquad \varphi,\psi \text{ a.c.}$$

$$=(P[\varphi],[\psi])-([\varphi],P[\psi])$$

$$=(i[h_\varphi],[\psi])-([\varphi],i[h_\psi])$$

$$=-i\int \overline{h_\varphi}\psi+\overline{\varphi}h_\psi=-i\left[(\overline{\varphi}\psi)(1)-(\overline{\varphi}\psi)(0)\right]=0$$

※ どんな代表元をとっても $(P[f],[g])-([f],P[g])$

$=-i\int \overline{h_\varphi}\psi+\overline{\varphi}h_\psi$ になる.」

Section 11 Examples

① $i\frac{d}{dx} = T$ in $L^2(\mathbb{R})$

$F : L^2 \to L^2$ unitary

$F^{-1} k F := i\frac{d}{dx}$ $\quad D(T_k) = \{f \mid \int |kf|^2 < \infty\}$

$F^{-1} T_k F = i\frac{d}{dx}$, $\quad D(i\frac{d}{dx}) = \{f \mid \int |k\hat{f}|^2 dk < \infty\}$

T_k : sym

$\because)$ $(T_k f, g) = (f, T_k g)$

T_k : closed

$\because)$ $f_n \to f$, $T_k f_n \to g$

$f_n \to f$ a.e. $\quad \therefore kf = g$ a.e. かつ $kf \in L^2$

$kf_n \to g$ a.e

Deficiency index を check する.

$K_+ = \mathrm{Ker}(T_k^* - i) = \mathrm{Ran}(T_k + i)^\perp$

$C_0^\infty \subset (T_k + i) C_0^\infty \subset C_0^\infty$ dense.

$\therefore K_\pm = 0$ $\qquad T_k$ s.a.

$F^{-1} \mathrm{Ran}(T_k \pm i) F = \mathcal{H}$ $\quad \therefore i\frac{d}{dx}$ s.a.

② a.c. について(復習)

f : a.c. $\Longleftrightarrow$ $^{\exists}h$ 可積分 s.t. 一意的ではない

$$f(x) = f(0) + \int_0^x h_f(t)\,dt$$

$^{\exists}f'(x)$ $x \in \mathbb{R}\setminus N$ and $f'(x) = h_f(x)$ $x \in \mathbb{R}\setminus N$

注 $\tilde{f}'(x) = \begin{cases} f'(x) & x \in \mathbb{R}\setminus N \\ \text{arbitrary} & x \in N \end{cases}$ meas.

$\leq \infty$

$$f(x) = f(0) + \int_0^x \tilde{f}'(x)\,dx$$

これを L^2-theory へもち上げる:

f a.c. $[f]$ 同値類

$T[f] = i[h_f]$ と定める.

注 $[f] \ni g$ は a.c. とは限らない

注 $[f_1] = [g_1]$ とする. f_1, f_2 a.c.

$[f_2] = [g_2]$

つまり $[g_1] = [g_2]$ このとき $f_1 = f_2$

∵) $g_1 = g_2$ a.e.

$f_1 = g_1 = g_2 = f_2$ a.e $\therefore f_1 - f_2 = 0$ a.e.

$f_1 - f_2$ a.c. 一般論 $f_1 = f_2$.

注 T は well-defined

$T[g] = T[f] = i[h_f]$

$^{\exists}f$ a.c.

$T[g] \to i\frac{d}{dx}g$ と書く.

$$D(T) = \{ \varphi \mid \varphi \in AC,\ i\frac{d}{dx}\varphi \in L^2,\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \}$$

正確には

$$= \{ [\varphi] \mid \varphi \in AC,\ h_\varphi \in L^2,\ \varphi(0) = \varphi(1) = 0 \}$$

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 h_\varphi(t)\,dt \qquad h_\varphi = \varphi' \text{ とかく}$$

Lemma 10.1 T is sym.

∵ 形式的なやり方 $\varphi, \psi \in D(T)$

このとき $(T\varphi, \psi) - (\varphi, T\psi) = -i \int_0^1 \bar{\varphi}'\psi + \bar{\varphi}\psi'$

$= -i\,(\bar{\varphi}(1)\psi(1) - \bar{\varphi}(0)\psi(0))$

$= 0$.

L^2 theory で境点の話がでてきて気持ち悪いので
正確には次のようにする:

$\varphi, \psi \in D(T)$ とするとき $\varphi \overset{\exists 1}{=} [f]$, $\psi \overset{\exists 1}{=} [g]$ s.t.

f, g AC $f(0) = f(1) = 0$ $g(0) = g(1) = 0$

$\therefore (T[f], [g]) - ([f], T[g])$

$= (ih_f, g) - (f, ih_g) = -i[(h_f, g) + (f, h_g)]$

$= -i \int \bar{h}_f g + \bar{f} h_g = (\bar{f}(1)g(1) - \bar{f}(0)g(0))(-i) = 0$ ┘

Lemma 10.2 T is closed

∵ $\varphi_n \in D(T)$ $\varphi_n \to \varphi$, $T\varphi_n \to \psi$ とする

$\varphi_n = [f_n]$ f_n AC $f_n(0) = f_n(1) = 0$

$\varphi = [f]$, $\psi = [g]$ $T\varphi_n = [h_{f_n}] \times i$

$$f_n(x) = \underset{0}{\underset{\shortparallel}{f_n(0)}} + \int_0^x h_{f_n}(y)\,dy$$

(1) $\left| \int_0^x h_{f_n}(y)\,dy - \int_0^x (-i) g(y)\,dy \right| \to 0$ $\forall x \in [0,1]$ がわかる.

(2) $f_n(x) \to f(x)$ a.e.

つまり $f(x) = \int_0^x (-i) g(y)\,dy$ a.e.

(右辺 $= \rho(x)$ とおく)

$\because) \int_0^1 h_{f_n}(y)\,dy = 0$

g : AC, $g(0)=0$, $g(1)=0$ $\rightarrow g(1)$ //

$\therefore$ $g = f$ a.e. $\therefore$ $[g]=[f]$

つまり L^2 でみると $[g]=[f] \in D(T)$

また $T[f] = T[g] = i\wedge_{(-i)}[g]$ 終 //

$\therefore$

~~Remark 1.3~~

⑨ 2017/6/8

Lemma 10.3 $D(T^*) = \{[\varphi] \mid \varphi \text{ AC},\ h_\varphi \in L^2\}$

$T^*[\varphi] = i[h_\varphi]$.

$D(T^*) \supset \{\cdots\}$

∵) $(T\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi)$

$(\varphi\psi)' = \varphi'\psi + \varphi\psi'$

ok

$D(T^*) \subset \{\cdots\}$ を示す.

∵) $j \in C_0^\infty([0,1])$ $\int_0^1 j(x)dx = 1$

$j_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} j(x/\varepsilon)$

i) $j_\varepsilon(x-\beta) - j_\varepsilon(x-\alpha) = f_\varepsilon(x)$

$\underline{0 < \alpha < \beta < 1}$

ii) $g_\varepsilon(x) = \int_0^x f_\varepsilon(t)\,dt$

このとき $g_\varepsilon(x) \to -\mathbb{1}_{(\alpha,\beta)}$ in L^2

このとき $\int_0^1 j_\varepsilon(x-t)\varphi(t)\,dt \to \varphi(t)$ in L^2 $\forall \varphi \in L^2$

よって $\forall \psi \in D(T^*)$ に対して

$(Tg_\varepsilon, \psi) = (g_\varepsilon, T^*\psi)$

注) $T^*[\psi] \ni \rho$ を任意に一つとってくる

$\text{Ⓕ}_{\text{II}} \to -\int_\alpha^\beta \rho(x)\,dx$

$\text{Ⓕ}_{\text{I}} \to \int_0^1 -i\left(j_\varepsilon(x-\beta) - j_\varepsilon(x-\alpha)\right)\psi(x)\,dx$ 部分積分

$\to -i\left(\psi(\beta) - \psi(\alpha)\right)$ a.e.

$\therefore\ i\left(\psi(\beta) - \psi(\alpha)\right) = \int_\alpha^\beta \rho\,dx$ a.e.

$\psi(\beta) - \psi(\alpha) = -i\int_\alpha^\beta \rho\,dx$ a.e.

$\alpha, \beta \in [0,1] \setminus N$

$$\begin{cases} \psi_1(x) = \psi(\alpha_0) - i\int_{\alpha_0}^x \cdots & x \geq \alpha_0 \\ \psi_2(x) = \psi_1(\alpha_0) + i\int_x^{\alpha_0} \cdots & x < \alpha_0 \end{cases}$$

$\alpha_0 \in [0,1] \setminus N$

そうすると $\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi_1 & x \geq \alpha_0 \\ \psi_2 & x < \alpha_0 \end{cases}$ とすれば

これが示せる $\tilde{\psi} = \psi \quad x \in [0,1] \setminus N$

$$\tilde{\psi}(\beta) - \tilde{\psi}(\alpha) = -i \int_\alpha^\beta \rho(x)\,dx$$

$\tilde{\psi}$ AC かつ $[\tilde{\psi}] = [\psi]$

$$T[\psi] = T[\tilde{\psi}] = [\rho] = [h_{\tilde{\psi}}]$$

$$\overset{\shortparallel}{T^*[\psi]}$$

$T = T^*$ で $T = i\frac{d}{dx}$ とかく約束だった //

Lemma 10.4 $(n_+, n_-) = (1,1)$

∵ $(T^* \pm i)\varphi = 0$

$i\varphi' \pm i\varphi = 0 \quad \therefore \varphi' = \mp\varphi$

$\varphi' = \mp\varphi$ a.e. (cont.)

φ'は cont と思える

φ' AC かつ $(T^* \pm i)\varphi' = 0$

$\therefore \varphi''$ AC かつ $(T^* \pm i)\varphi'' = 0 \cdots\cdots \varphi \in C^\infty$

$\varphi(x) = e^{\pm x}$

$K_+ = \{e^{+x}\}, K_- = \{e^{-x}\}$

$\int_0^1 e^{2x}dx = \frac{1}{2}(e^2-1)$

$\int_0^1 e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}(e^{-2}-1) = \frac{1}{2}\frac{e^2-1}{e^2}$

$\therefore \varphi_+ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{e^2-1}}e^{+x}$

$\therefore \varphi_- = \frac{\sqrt{2}\,e}{\sqrt{e^2-1}}e^{-x}$

$$D(T^*) = D(T) \oplus_T K_+ \oplus_T K_-$$

$T \subset S = T_U \quad : \quad U : \beta\varphi_+ \to \gamma\beta\varphi_- \quad \gamma \in S^1$ のみ

$$D(S) = \{\varphi + \beta\varphi_+ + \gamma\beta\varphi_+ \mid \beta \in \mathbb{C}\}$$

◎ $\gamma \in S^1$ に対して

$\psi \in D(S)$ は $\psi(0) = \beta\varphi_+(0) + \gamma\beta\varphi_-(0) = \dfrac{\sqrt{2}\beta(1+\gamma e)}{\sqrt{e^2-1}}$

$\psi(1) = \beta\varphi_+(1) + \gamma\beta\varphi_-(1) = \dfrac{\sqrt{2}(\gamma+e)\beta}{\sqrt{e^2-1}}$

$$\left|\frac{\psi(1)}{\psi(0)}\right| = \left|\frac{\gamma+e}{1+\gamma e}\right| = \left|\frac{1}{\gamma}\,\frac{\gamma+e}{\bar{\gamma}+e}\right| = 1$$

$\therefore \psi(1) = \alpha\psi(0) \qquad \alpha \in S^1$

◎ $\alpha \in S^1$ に対して $\psi(1) = \alpha\psi(0)$ とする時

$$\psi = \varphi + \beta\varphi_+ + \gamma\beta\varphi_-$$

$$\gamma = \frac{\alpha - e}{1 - \alpha e}$$

$\therefore \{U : K_+ \to K_-\} \underset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\psi(1) = \alpha\psi(0),\ \alpha \in S^1\}$

$T_\alpha\psi = T\varphi + i\beta\varphi_+ - i\gamma\beta\varphi_-$

$\underset{\substack{\uparrow \\ 1\text{-dim}}}{K_+} = K_+^\alpha \oplus \underset{\substack{\uparrow \\ 1\text{-dim}}}{I(U)} \qquad \therefore K_+^\alpha = \{0\}$

同様に $K_-^\alpha = \{0\}$

Thm 10.5

$\alpha \in S^1$ と T_α の s.a. 拡大は 1:1.

Section 11 Spectrum (bounded operators)

$A \in B(\mathcal{H})$, $D(A) = \mathcal{H}$, $\|A\varphi\| \le \|A\| \, \|\varphi\|$

$A \overset{\exists}{B} = \overset{\exists}{B} A = I$ となる $B \in B(\mathcal{H})$ のとき $A \in \mathcal{O}$

$\mathcal{O}$ は群, *

$\rho(A) = \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda - A \in \mathcal{O} \}$ resolvent set

$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$ spectrum

Lemma 11.1 $\sigma(A)$ は closed

かつ $\sigma(A) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \le \|A\| \}$

∵ $\rho(A)$ open を示す.

i.e. $\lambda \in \rho(A)$ のとき $|\lambda - \lambda'| \ll 1$ なら $\lambda' \in \rho(A)$ を示す. $\exists (\lambda' - A)^{-1}$ をいう.

$$\left[\begin{array}{l} |x-1| < 1 \text{ のとき } x^{-1} = (x-1+1)^{-1} = (1-(1-x))^{-1} \\ \qquad = \sum_{n=0}^{\infty} (1-x)^n \end{array} \right]$$

$\|A - I\| < 1$ のとき $A \in \mathcal{O}$ 実際 $A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (1-A)^n$

$$\|(\lambda' - A)(\lambda - A)^{-1} - 1\| = \|[(\lambda' - A) - (\lambda - A)](\lambda - A)^{-1}\|$$
$$\le |\lambda - \lambda'| \, \|\lambda - A\|^{-1} < 1 \quad \text{とできる}$$

$\therefore (\lambda' - A)(\lambda - A)^{-1} \overset{\exists}{B} = I$

同様 $\therefore C(\lambda - A)^{-1}(\lambda' - A) = I$ $\therefore \lambda' - A \in \mathcal{O}$.

次に $\lambda > \|A\|$ のとき $\lambda - A \in \mathcal{O}$ をいえばよい

$\lambda - A = \lambda \underbrace{(1 - \frac{1}{\lambda}\|A\|)}$

$\|1 - (1 - \frac{1}{\lambda}A)\| = \|\frac{1}{\lambda}A\| < 1$ $\therefore$ $1 - \frac{1}{\lambda}A \in \mathcal{O}$ $\therefore \lambda - A \in \mathcal{O}$ //

Lemma 11.1′ 実は $B(\mathcal{H}) \supset \mathcal{O}$ は open

(∵) $\mathcal{O} \ni A$ とする $\|A - B\| < \varepsilon$ のとき $B \in \mathcal{O}$ を示せばいい.

$\|BA^{-1} - I\| < 1$ を示せばいい. ∵) $BA^{-1} \overset{\exists}{C} = I$ ↓ ∴ $B \in \mathcal{O}$

$\|A^{-1}B - I\| < 1$ 〃 $CA^{-1}B = I$ ↑

どちらも (∵) 同じなので $\|BA^{-1} - 1\| < 1$ を示す.

$\|BA^{-1} - 1 = \|(B - A)A^{-1}\| \leq \|B - A\| \cdot \|A^{-1}\| < 1.$

(注) $\|A - 1\| < 1 \Rightarrow {}^{\exists}A \in \mathcal{O}$ の∵)

$A = A - 1 + 1 = 1 - (1 - A) \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (1-A)^n = A^{-1}$

Lemma 11.1″ $\rho : A \to A^{-1}$ は cont

∵) $A_n \to A$ のとき $\rho(A_n) \to \rho(A)$ i.e. $A_n^{-1} \to A^{-1}$

$\|A_n^{-1} - A^{-1}\| = \|A^{-1}(AA_n^{-1} - 1)\| \leq \|A^{-1}\| \, \underline{\|AA_n^{-1} - 1\|}$

$\|AA_n^{-1} - 1\| = \|(A_nA^{-1})^{-1} - 1\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|1 - A_nA^{-1}\|^n$

$= \sum_{n=1} \|(A - A_n)A^{-1}\|^n \leq \sum_n \|(A - A_n)\|^n \|A^{-1}\|^n$

$= \dfrac{\|A - A_n\| \cdot \|A^{-1}\|}{1 - \|A - A_n\| \cdot \|A^{-1}\|} \to 0 \quad (\|A - A_n\| \to 0)$

$r(A) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(A)\}$ spectral radius.

$A^*A = AA^* \Rightarrow r(A) = \|A\|$ が知られている

$\mathbb{P}$: polynomials / $\mathbb{C}$

$\mathbb{P} \ni p(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$. 今から $A \in B(\mathcal{H})$ かつ s.a. としておく.

$p(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 1$ と定める.

* $p(A) + Q(A) = (p+Q)(A)$ $\alpha p(A) = (\alpha p)(A)$
* $(pQ)(A) = p(A) \cdot Q(A) = Q(A)p(A)$
* $p(A)^* = \bar{p}(A)$
* $\|p(A)\| = \|p\|_\infty \leftarrow \|f\|_\infty = \sup\{p(t) \mid t \in \sigma(A)\}$ ok.

$\because$ $p(A)p(A)^* = p(A)\bar{p}(A) = \bar{p}(A)p(A) = p(A)^* p(A)$

$\therefore$ $\|p(A)\| = r(p(A)) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(p(A))\}$

$= \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in p(\sigma(A))\} = \sup\{|p(t)| \mid t \in \sigma(A)\}$

$= \|p\|_\infty$

Lemma 11.2 $\sigma(p(A)) = p(\sigma(A))$

$\because$ $(\supset)$ 対偶 $\mu \notin \sigma(p(A)) \to \mu \notin p(\sigma(A))$

$\mu - p(A) \in \mathcal{I}$ $\mu - p(\lambda) = \alpha \prod_k^n (\lambda - \mu_k)$

$\therefore$ $\mu - p(A) = \alpha \prod^n (A - \mu_k)$ $\therefore$ $A - \mu_k \in \mathcal{I}$ $\forall k$

$\therefore$ $\mu_k \notin \sigma(A)$ $\therefore$ $p(x) = \mu$ となる x は $x = \mu_1 \cdots \mu_n$ のみ. しかし $\mu_k \notin \sigma(A)$ $\therefore$ $\mu \notin p(\sigma(A))$

$(\subset)$ $\mu \in \sigma(p(A))$ とする.

$\mu - p(A) \notin \mathcal{I}$ $\therefore$ $\exists \mu_k$ s.t. $\mu_k - A \notin \mathcal{I}$

つまり $\mu_k \in \sigma(A)$ $p(\mu_k) = \mu$ $\therefore$ $\mu \in p(\sigma(A))$

$C(\sigma(A))$: $\sigma(A)$ 上の cont function ($\mathbb{C}$)

Weierstraß の近似定理より

$\mathbb{P} \subset C(\sigma(A))$ は dense i.e. $\forall f \in C(\sigma(A))$ に対して $\|P_n - f\|_\infty \to 0$ $(n \to \infty)$ $^\exists P_n \in \mathbb{P}$.

Lemma 11.3 $^{\exists 1}\Phi : C(\sigma(A)) \to B(\mathcal{H})$ s.t.

(1) linear (2) $*$-homo (3) isometry

(4) $\Phi(1) = I$, $\Phi(t) = A$

∵) $\Phi_0 : \mathbb{P} \to B(\mathcal{H})$ を $\Phi_0(P) = P(A)$ と定める.

このとき (1)−(4) をみたす.

$^{\exists 1}\bar{\Phi} : C(\sigma(A)) \to B(\mathcal{H})$ s.t. $\bar{\Phi} \supset \Phi_0$

$\bar{\Phi}$ も (1)−(4) をみたす.

例 $\bar{\Phi}(f)\bar{\Phi}(g) = \bar{\Phi}(fg)$ ✓

∵) $\|\bar{\Phi}(fg) - \bar{\Phi}(P_n Q_n)\| + \|\bar{\Phi}(P_n Q_n) - \bar{\Phi}(P_n)\bar{\Phi}(Q_n)\|$
$+ \|\bar{\Phi}(P_n)\bar{\Phi}(Q_n) - \bar{\Phi}(f)\bar{\Phi}(g)\|$

$\|\bar{\Phi}(fg) - \bar{\Phi}(P_n Q_n)\| \leq \|fg - P_n Q_n\| \to 0$

$\|\bar{\Phi}(P_n)\bar{\Phi}(Q_n) - \bar{\Phi}(f)\bar{\Phi}(Q_n)\| + \|\bar{\Phi}(f)\bar{\Phi}(Q_n) - \bar{\Phi}(f)\bar{\Phi}(g)\|$
$\to 0$

一意的な存在は linear, $*$-homo, $\bar{\Phi}(t) = A$, $\bar{\Phi}(1) = I$ より $\bar{\Phi}(P) = P(A)$ $P \in \mathbb{P}$ となるため

//

$\bar{\Phi}(f) = f(A)$ $f \in C(\sigma(A))$ と定める

Lemma 11.4　$A \in B(\mathcal{H})$ s.a.

$f \in C(\sigma(A))$ のとき

$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$ —(*)

∵ (注) $f \in \mathbb{P}$ のときは —(*) が成立している

(∩) (⊂) 対偶 $f(\sigma(A)) \not\ni \mu \to \sigma(f(A)) \not\ni \mu$

$g(\lambda) = \dfrac{1}{\mu - f(\lambda)}$　$\lambda \in \sigma(A)$　$\in C(\sigma(A))$ とする.

まず

$$g(\lambda)(\mu - f(\lambda)) = 1$$

Φをかけると　$*$-homo より

$$g(A)(\mu - f(A)) = I = (\mu - f(A))\, g(A)$$

$\therefore \mu - f(A) \in \mathcal{G}$　$\therefore \mu \notin \sigma(f(A))$.

(⊃) 対偶 $\sigma(f(A)) \not\ni \mu \to f(\sigma(A)) \not\ni \mu$

$\mu - f(A) \in \mathcal{G}$　$\therefore \exists (\mu - f(A))^{-1} \rightsquigarrow \dfrac{1}{\mu - f(\lambda)} \in C(\sigma(A))$

そこで $p_n \in \mathbb{P}$ が $p_n \to f(A)$　とは言えない!

$\mathcal{G}$ は open だったから $p_n \in \mathcal{G}$ $(n \gg 1)$

$\therefore \exists (\mu - p_n(A))^{-1}$　$\therefore \mu \notin \sigma(p_n(A)) \Leftrightarrow \mu \notin p_n(\sigma(A))$

$\therefore \dfrac{1}{\mu - p_n(\lambda)} \in C(\sigma(A))$　OK

Lemma 11.2 から $\mu \notin \sigma(P_n(A)) \to \mu \notin P_n(\sigma(A))$

だから $\exists \dfrac{1}{\mu - P_n(\lambda)} = g_n(\lambda)$ がわかる.

そうすると $g_n(\lambda)(\mu - P_n(\lambda)) = 1$

$$\|g_n(\lambda) - g_m(\lambda)\| = \|g_n(A) - g_m(A)\|$$

$$= \|(\lambda - P_n(A))^{-1} - (\lambda - P_m(A))^{-1}\|$$

$$= \|(\lambda - P_m(A))^{-1}(P_n(A) - P_m(A))(\lambda - P_n(A))^{-1}\|$$

$$\leq \underbrace{\|(\lambda - P_m(A))^{-1}\|}_{\text{b'dd}} \cdot \underbrace{\|(\lambda - P_n(A))^{-1}\|}_{\text{b'dd}} \underbrace{\|P_n(A) - P_m(A)\|}_{\to 0}$$

状況は $\mu - P_n(A) \to \mu - f(A)$ ok

$\mu - f(A) \in \mathcal{D}$ $\therefore \exists T$ が $T(\mu - f(A)) = (\mu - f(A))T = I$

$\therefore (\mu - P_n(A))^{-1} \to T$ ($A \to A^{-1}$ の cont から)

特に $\|(\lambda - P_n(A))^{-1}\|$ は有界.

つまり $\{g_n(\lambda)\}$ は Cauchy 列だから $\exists g \in C(\sigma(A))$

s.t. $g_n \to g$ in $\|\cdot\|_\infty$.

つまり $g_n(\mu - P_n) \to g(\mu - f)$ $(=1)$

つまり $\mu \notin f(\sigma(A))$ //

Section 12 ⑪ 2017/6/22

$(X, \mathcal{B}, \mu)$ meas. space

$E : \mathcal{B} \to P(\mathcal{H})$ ここで $P(\mathcal{H})$ $\mathcal{H}$上のproj.

(1) $E(X) = \mathbb{1}$ (2) $E(\sum^{\infty} A_n) = \sum^{\infty} E(A_n)$
$A_n \in \mathcal{B}$

このとき E を $(X, \mathcal{B})$ 上の spectral measure という.

次がすぐにわかる. $E(\phi) = 0$, $E(A \cup B) = E(A) + E(B)$
$E(A \cap B) = E(A) \cdot E(B)$

$L^{\infty}(X)$, $\|f\|_{\infty} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|$

$\boxed{A_i \cap A_j = \phi \quad \sum A_j = X}$

$m(X) = \{ \sum a_j \mathbb{1}_{A_j} \mid a_j \in \mathbb{C}, A_j \in \mathcal{B} \}$

Lemma 12.1 E は $(X, \mathcal{B})$ 上の spectral m.
このとき $\exists \Phi : L^{\infty} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ s.t.

① $\Phi(\mathbb{1}_A) = E(A)$ $A \in \mathcal{B}$
② $\|\Phi(f)\| \leq \|f\|_{\infty}$
③ $\Phi(\cdot)$ linear in $\cdot$.

(∵) $m(X)$ 上に Φ を次で def する.

$f = \sum a_j \mathbb{1}_{A_j}$ に対して

$\Phi(f) = \sum a_j E(A_j)$

(注) これは表現に依らない.

i.e. $f = \sum b_i \mathbb{1}_{B_i} = \sum a_j \mathbb{1}_{A_j}$ のとき

$$\sum b_i \mathbb{1}_{B_i} = \sum b_i \mathbb{1}_{B_i \cap A_j} = \sum_{ij} b_i \mathbb{1}_{B_i \cap A_j}$$
$$= \sum_{ij} a_j \mathbb{1}_{A_j \cap B_i}$$

∴ $A_j \cap B_i$ 上で $a_j = b_i$ に注意する.

$$\therefore \sum a_j E(A_j) = \sum_{ij} a_j E(A_j \cap B_i)$$
$$= \sum_{ij} b_i E(A_j \cap B_i)$$
$$= \sum b_i E(B_i) \quad //$$

このとき $\Phi(f+g) = \Phi(f) + \Phi(g)$

$\Phi(\alpha f) = \alpha \Phi(f)$ $\quad f, g \in m(X)$

$\alpha \in \mathbb{C}$ ok

$$\|\Phi(f)x\|^2 = \|\sum_j a_j E(A_j)x\|^2 = \sum_j |a_j|^2 \|E(A_j)x\|^2$$
$$\leq \|f\|_\infty^2 \sum_j (x, E(A_j)x) = \|f\|_\infty^2 \|x\|^2$$

$\Phi : L^\infty \to B(\mathcal{H})$ 一意的に拡大できる

Φ の一意性は $\exists \Psi : L^\infty \to B(\mathcal{H})$ のとき

$\Psi(\sum a_j \mathbb{1}_{A_j}) = \sum a_j \Psi(\mathbb{1}_{A_j}) = \sum a_j E(A_j)$

からわかる

$\Phi(f) = \int_X f\, dE = T_f \quad (f \in L^\infty)$ と表す.

Lemma 12.2 $f, g \in L^\infty$. このとき

$$T_{fg} = T_f \cdot T_g, \quad T_f^* = T_{\bar{f}}$$

∵ T_f の def から $\exists P_n \in m(X)$ s.t.

$P_n \to f$ $(\|\cdot\|_\infty)$ そこで $T_f = \lim_n T_{P_n}$

$T_p T_q = T_{pq} \quad p, q \in m(X)$

∵) $p = \sum a_j \mathbb{1}_{A_j} \quad q = \sum b_i \mathbb{1}_{B_i}$

$pq = \sum_{i,j} a_j b_i \mathbb{1}_{A_j \cap B_i}$

一方 $T_p = \sum a_j E(A_j)$

$T_q = \sum b_i E(B_i)$

$T_{pq} = \sum a_j b_i E(A_j \cap B_i) = T_p T_q.$

又 $T_p^* = T_{\bar{p}} \quad p \in m(X)$

∵) $T_p^* = \sum \bar{a}_j E(A_j) = T_{\bar{p}}$

以上より ⊙ $T_f T_g = \lim_n T_{P_n} T_{q_n}$

$= \lim_n T_{P_n q_n} = T_{fg}$

⊙ $T_f^* = \lim_n (T_{P_n})^* = \lim_n T_{\bar{P}_n} = T_{\bar{f}}.$

E : $(X, \mathcal{B})$ 上の spectral measure
のとき $(x, E(\cdot)y)$ は $\mathbb{C}$-valued measure.

Lemma 12.3 $(x, E(\cdot)x) \ll \mu$

∵ $N \in \mathcal{B}$ が $\mu(N) = 0$ とする.

$(\Phi(\mathbb{1}_N)x, x) = (x, E(N)x) = \int \mathbb{1}_N \, d(x, E(\cdot)x)$

$\leq \|x\|^2 \, \|\mathbb{1}_N\|_\infty = 0$ //

Lemma 12.4 $f \in L^\infty(X)$ とする.

$(x, \Phi(f)y) = \int f(w) \, d(x, E(w)y)$.

∵ $x = y$ のとき 考える.

STEP 1 $f = \sum^{n} a_j \mathbb{1}_{A_j}$ のとき

$(x, \Phi(f)x) = \sum a_j (x, E(A_j)x)$

$= \sum a_j \int \mathbb{1}_{A_j} \, d(x, E(\cdot)x) = \int f \, d(x, E(\cdot)x)$.

STEP 2 $f \in L^\infty$ のとき $\exists p_n \in m(X)$
s.t. $p_n \to f$ in $\|\cdot\|_\infty$

$(x, \Phi(f)x) = \lim_n (x, \Phi(p_n)x)$

$= \lim_n \int p_n(w) \, d(x, E(w)x)$

$p_n \to f$ a.e. in μ 又 $\|p_n\| \leq \exists m$

$(x, E(\cdot)x) \ll \mu$ だから Lebesgue の収束定理
より $= \int \lim_n p_n = \int f \, d(x, E(w)x)$

STEP 3 $x, y \in \mathcal{H}$ のとき

$$(x, \Phi(f)\, y) = \sum_{n=0}^{3} \frac{i^n}{4} \Big(\underbrace{x + i^n y}_{\xi_n},\ \Phi(f)\, \underbrace{(x + i^n y)}_{\xi_n} \Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{3} \frac{i^n}{4} \int f(\omega)\, d\,(\xi_n\ E(\omega)\, \xi_n)$$

$$\sum_{n=0}^{3} \frac{i^n}{4} (\xi_n\ E(A)\, \xi_n) = (x,\ E(A)\, y) \quad //$$

Section 13 Spectral measure の存在

Ω cpt + Hausdorff とする

cpt + H $\doteqdot$ metric space

cpt + H のとき 第2可算公理
$\cong$ metrizable

$(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ Borel measurable space

$R_\Omega = \{ \mathbb{C}$-valued measure on $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega)) \mid$
正則, 有限 測度の一次結合 $\}$

注 Ω loc. cpt + H で def で出る
Ω cpt metric sp で def することもある

- radon measure という
- 正則 $\Leftrightarrow$ $\mu(A) = \sup\{\mu(K) \mid \overset{\text{cpt}}{K} \subset A\}$
$\inf\{\mu(O) \mid \underset{\text{open}}{O} \supset A\}$

~~$(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ Ω cpt + H.~~

~~$R_\Omega = \left\{ \text{正則, 有限, 正測度の一次結合/}\mathbb{C} \text{ で表される測度全体} \right\}$~~

~~これを radon measure という~~

$$|\mu|(S) = \sup\left\{ \sum_k^n |\mu(S_k)| \quad \sum S_k = S \right\}$$

$\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$ $\qquad$ $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ Banach sp.

注 Ω : locally cpt. H としても $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ Banach sp.

Riesz-Markov-角谷 の定理

$\forall \varphi \in C(\Omega)' \ \exists_1 \mu \in R$ s.t.

$\varphi(f) = \int_\Omega f \, d\mu \quad \forall f \in C(\Omega)$

このとき $\|\varphi\| = \|\mu\|$ $\qquad$ i.e. $R \cong C(\Omega)'$ isometry equivalent.

(正値 etc は必要ない)

注 Ω: locally cpt - H のとき

$R_\Omega \cong C_0(\Omega)'$ $\qquad$ $C_0(\Omega) = \{ f \text{ cont} \mid \text{無限遠点で消える} \}$

$\forall \varepsilon$ $\{ \omega \in \Omega \mid |f(\omega)| \geq \varepsilon \}$ が cpt $\Leftrightarrow$ 無限遠点で消える

Riesz representation theorem

$\mathcal{H}$ Hilbert space

Let $F \in \mathcal{H}^*$. Then $\exists_1\ \Phi_F \in \mathcal{H}$ s.t.

$$F(\Phi) = (\Phi_F, \Phi) \quad \text{and} \quad \|F\| = \|\Phi_F\|.$$

∵ $F : \mathcal{H} \to \mathbb{C}$

$\dim \operatorname{Ran} F = 1$ $\qquad (\operatorname{Ran} F)^\perp = \operatorname{Ker} F$

たしかめる.

① $\operatorname{Ker} F = \mathcal{H}$ のとき

$F(\Phi) = 0 = (0, \Phi)$.

② $\operatorname{Ker} F \neq \mathcal{H}$ のとき

$(\ker F)^\perp \ni \exists\ \Phi_0$ $\qquad$ (1-dim)

$$\mathcal{H} = \ker F \oplus (\ker F)^\perp$$

$$\Phi_F = \Phi_0 \cdot \frac{\overline{F(\Phi_0)}}{\|\Phi_0\|^2}$$

(i) $\Phi \in \ker F$ のとき

$F(\Phi) = 0 = (\Phi_F, \Phi) = 0$

(ii) $\Phi = \alpha \Phi_0$ のとき

$F(\alpha \Phi_0) = \alpha F(\Phi_0) = (\Phi_F, \alpha \Phi_0)$

(iii) $\Phi \in \mathcal{H}$ は $\Phi = \Phi - \frac{F(\Phi)}{F(\Phi_0)}\Phi_0 \oplus \frac{F(\Phi)}{F(\Phi_0)}\Phi_0$ 〃

(12) 2017/~~7~~6/29

$\varphi : C(\Omega) \longrightarrow \mathbb{C}$ RMK

$\Downarrow$ $\wr$

$\Phi : C(\Omega) \longrightarrow B(\mathcal{H})$ spectral m.

Thm 13.1 Ω cpt. + H

$\Phi : C(\Omega) \to B(\mathcal{H})$ s.t.

① linear ② $*$-homo ③ $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$

このとき $\exists_1$ 正則 spectral m. $E : B(\overset{\Omega}{\cancel{\mathcal{H}}}) \to P(\mathcal{H})$

s.t.

$$\Phi(f) = \int_\Omega f \, dE \qquad f \in C(\Omega)$$

(∵) (存在) $f \geq 0$ $g = \sqrt{f}$ $\therefore f = \bar{g} g$

$\therefore \Phi(f) = \Phi(\bar{g} g) = \Phi(g)^* \Phi(g) \geq 0$

$\therefore f \in C(\Omega)$ で $\bar{f} f \leq \|f\|^2$ なら

$$\Phi(\bar{f})\Phi(f) \leq \|f\|^2 \mathbb{1} \qquad \therefore \|\Phi(f)\| \leq \|f\|^2$$

$\forall x \; y \in \mathcal{H}$

$\varphi_{xy}(f) = (x, \Phi(f) y)$ $\qquad \varphi_{xy} \in C'(\Omega)$

$\therefore |\varphi_{xy}(f)| \leq \|x\| \, \|y\| \, \|f\|$ ✓ $\underline{\underline{f \in C(\Omega)}}$

RMK より $\varphi_{xy}(f) = \int_\Omega f \, d\mu_{xy}$ $\exists_1$

$$\mu_{xy} \in R_\Omega$$

また $\int f \, d\mu_{x+x'y} = \int f \, d\mu_{xy} + \int f \, d\mu_{x'y}$

だから $\mu_{x+x'y} = \mu_{xy} + \mu_{x'y}$

y についても同様.

又 $\| \mu_{xy}(S) \| \leq \| \mu_{xy} \| = \| \varphi_{xy} \| \leq \| x \| \| y \|$

Riesz rep Thm より

$\mu_{xy}(S) = (x, E(S) y)$.

(加法性)

- $(x, E(S) x) = \mu_{xx}(S) \leq \| \mu \| \leq \| x \|^2$

  $\therefore \quad 0 \leq E(S) \leq 1$

- $(x, E(\Omega) x) = \mu_{xx}(\Omega) = \varphi_{xx}(\mathbb{1}) = \| x \|^2$

  $\therefore \quad (x, E(\Omega) y) = (x, y) \quad \therefore \quad E(\Omega) = \mathbb{1}$

- $(x, E(A+B) x) = \mu_{xx}(A+B)$

  $= (x, E(A) x) + (x, E(B) x)$.

  $\therefore \quad E(A+B) = E(A) + E(B)$

- $\sum_{n}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{N} A_n + \sum_{n=N+1}^{\infty} A_n$

  $\| [E(\sum^{\infty} A) - E(\sum^{N} A)] x \|^2 = \| E(\sum_{N+1}^{\infty} A) x \|^2$

  $\leq \| E(\sum_{N+1}^{\infty} A)^{1/2} x \|^2 = \mu_{xx}(\sum_{N+1}^{\infty} A_n) \to 0$ 」

  (~~[illegible]~~)

  一般に $(x, A^2 x) \leq (x, Ax)$ $\quad \underline{0 \leq A \leq 1}$

  ~~$(x, A(1-A)x)$~~ $\quad \sqrt{A} = \Phi(A)$

射影性) $S \in \mathcal{B}(\Omega)$ に対して $E(S)^2 = E(S)$ を示す.

基本的なアイデアは $E(S) = \Phi(\mathbb{1}_S)$ と $\Phi(\mathbb{1}_S)^2 = \Phi(\mathbb{1}_S)$ によるが $\Phi(\mathbb{1}_S)$ は $\mathbb{1}_S \notin C(\Omega)$ なので def されていない

近似をつかう $S \in \mathcal{B}(\Omega)$ に対して

$$\underbrace{K_1 \subset K_2 \cdots}_{\text{compact}} \subset S \subset \cdots \subset \underbrace{O_2 \subset O_1}_{\text{open}}$$ が存在する

$$\mu_{xx}(O_n / K_n) \to 0$$

Urysohn の不等式より

$K \subset S$ に対して $\exists O_n \supset K$ (open) s.t.

(cont)

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in K \\ \leq 1 & x \text{ ow} \\ 0 & x \in O_n^c \end{cases} \qquad f_n \to \mathbb{1}_K \quad (n \to \infty)$$

$$\left(x, \left(\Phi(f_n) - E(K)\right)x\right) = \int (f_n - \mathbb{1}_K)\mu_{xx} \geq 0 \quad \to 0 \ (n \to \infty)$$

$\because$ $\Phi(f_n) - E(K) \geq 0$ の bdd op. さらに $\Phi(f_n) - E(K) \leq \mathbb{1}$

$(x, A_n x) \to 0 \Rightarrow \|A_n x\| \to 0$.

$(x, A_n x) - (x, A_n^2 x) = (x, (1 - A_n)A_n x)$

$\exists \Phi' : C(\Omega) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$

$f \mapsto \Phi'(f) = (1 - A_n) A_n$

$(1-x)x = \sqrt{x}(1-x)\sqrt{x}$

$\therefore$ $\Phi(f_n) \to E(K)$ strongly

同様に $\Phi(f_n^2) \to E(K)$ strongly

$$\therefore \|(E(K) - E(K)^2)x\| \leq \underbrace{\|(E(K) - \Phi(f_n))x\|}_{\to 0} + \underbrace{\|(\Phi(f_n) - \Phi(f_n^2))x\|}_{=0} + \underbrace{\|(\Phi(f_n^2) - E(K)^2)x\|}_{\to 0} \to 0$$

$\therefore$ $E(K) = E(K)^2$.

ここで $K_1 \subset K_2 \subset \cdots S \subset \cdots \subset O_2 \subset O_1$ を思い出す.

$(x, (E(S) - E(K_n))x) = \int \mathbb{1}_{S \setminus K_n} \mu_{xx} \to 0$

同様に $E(K_n) - E(S)$ strongly.

$\therefore \|(E(S) - E(S)^2)x\| \leq \|(E(S) - E(K_n))x\| + \|E(K_n)x - E(K_n)^2 x\|$
$+ \|(E(K_n)^2 - E(S)^2)x\| \to 0.$ //

一意性は RMK, Riesz rep の一意性から従う

$\because$ ~~$(x, \Phi(f)x) = \int_\Omega f(t)(x, E(t)x)$~~

~~$\mu_{xy}(S) = (x, E(S)y)$~~

$\Phi(f) = \int_\Omega f \, dF$ とする $f \in C(\Omega)$

$(x, \Phi(f)x) = \int_\Omega f \, \underline{d(x, F_t x)}$

RMK より $\mu_{xx} = (x, F(\cdot)x)$

RMK より $\mu_{xy} = (x, F(\cdot)y)$ $\quad \forall S \in B(\Omega)$

さらに $\mu_{xy}(S) = (x, E(S)y) = (x, F(S)y)$

Riesz rep より $E(S) = F(S)$. //

Thm 13.2 $A \in B(\mathcal{H})$ s.a. このとき $\exists_1$ 正則 spe. measure E on $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ st ① $\mathrm{supp}\, E = \sigma(A)$

② $\int f \, dE = f(A)$ $\forall f \in C(\mathbb{R})$

(T_f と表せる) $\quad$ ($\Phi(f)$ と表せる)

($f \in L^\infty$) $\quad$ $f \in C(\sigma(A))$

$\because$ Lemma 11.3 で $\exists \Phi : C(\sigma(A)) \to B(\mathcal{H})$

$\therefore$ Thm 13.1 から $\exists_1$ $E : B(\sigma(A)) \to P(\mathcal{H})$ st

$\Phi(f) = \int_{\sigma(A)} f \, dE$

$\tilde{E}(S) = E(S \cap \sigma(A))$ $\quad S \in B(\mathbb{R})$ として def

$\tilde{E}$ は $(\mathbb{R}, B(\mathbb{R}))$ 上の spectral measure.

$f \in L^\infty(\mathbb{R})$ のとき $\int_{\mathbb{R}} f\,dE = \int_{\sigma(A)} f\,d\tilde{E}$

$f \in C(\sigma(A))$ のとき

$$\int_{\sigma(A)} f\,dE = f(A)$$

$$\tilde{f} = \begin{cases} f(x) & x \in \sigma(A) \\ \forall g(x) & x \in \sigma(A)^c \end{cases}$$

cont.

$g \in L^\infty$

$$\int_{\mathbb{R}} \tilde{f}\,d\tilde{E} = \int_{\sigma(A)} f\,dE = f(A)$$

f の $\sigma(A) \to \mathbb{R}$ への $\exists$ 拡大を $\tilde{f}$ とする

$\mathrm{supp}\,\tilde{E} = \sigma(A)$ の ∵

$$\mathrm{supp}\,\tilde{E} = \bigcap \{ K \subset \mathbb{R} \mid \text{closed } E(K) = 1 \}$$

$$= \left[\bigcup \{ O \subset \mathbb{R} \mid \text{open } E(O) = 0 \} \right]^c = K$$

$\mathrm{supp}\,\tilde{E} \subset \sigma(A)$ もしかして自明?

∵) $\lambda \in \mathrm{supp}\,\tilde{E}$. このとき $E(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \neq 0 \ \forall \varepsilon$

$\exists x \quad E(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)x = x, \quad E(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)^c x = 0$

$$\|(\lambda - A)x\|^2 = (x, (\lambda-A)^2 x) = \int (\lambda - t)^2 d(x, \tilde{E}_t x)$$

$$= \int_{(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon)} |\lambda - t|^2 d(x, \tilde{E}_t x) \leq \varepsilon^2 \downarrow 0$$

$\therefore \lambda \in \sigma(A)$

$\mathrm{supp}\,\tilde{E} \supset \sigma(A)$

∵) ~~$\forall \lambda \in \sigma(A)$~~ $\lambda \notin \mathrm{supp}\,\tilde{E}$ とする

$\frac{1}{t-\lambda} \in C(K)$　　$\mathbb{R} = K \cup K^c$ にわける

$$g(t) = \begin{cases} \frac{1}{t-\lambda} & t \in K \\ 0 & t \notin K \end{cases} \in L^\infty$$

$\therefore B := \int g(t)\, d\tilde{E}_t$

このとき　$(A-\lambda)B = \int (t-\lambda) \mathbb{1}_{\sigma(A)} d\tilde{E}_t \int g(t)\, d\tilde{E}_t$

「注　$A-\lambda = \int_{\sigma(A)} (t-\lambda)\, dE_t = \int_{\mathbb{R}} (t-\lambda) \mathbb{1}_{\sigma(A)}\, d\tilde{E}_t$」

$(t-\lambda)\mathbb{1}_{\sigma(A)}$, $g(t)$ は $\in L^\infty(\mathbb{R})$ なので

homo より

$$(A-\lambda)B = \int (t-\lambda)\mathbb{1}_{\sigma(A)}\, g(t)\, d\tilde{E}_t$$

$$= \int_K (t-\lambda)\mathbb{1}_{\sigma(A)} \frac{1}{t-\lambda}\, d\tilde{E}_t$$

$$= \int_K \mathbb{1}_{\sigma(A)}\, d\tilde{E}_t = \int_{K\cap\sigma(A)} dE_t = \int_K dE_t = 1$$

$$\int_{K^c} dE_t = E(K^c) = E\Big(\bigcup_{\text{open}} \{\cdots\}\Big) = 0$$

重要

実は $\bigcup\{\cdots\} = \sum_{n=1}^{\infty} O_n$ と表せる.

同様に $B(A-\lambda) = I$　$\therefore \lambda \notin \sigma(A)$ //

⑬ 2017/ 7/6

先週まで復習

1) A bdd s.a. op.

$\exists_1 \Phi : C(\sigma(A)) \to B(\mathcal{H})$ ① linear ② $*$-homo ③ $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$

$\Phi(f) = f(A)$

2) E spectral meas on $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$

$\exists_1 T_f = \int_\Omega f \, dE_t \in B(\mathcal{H})$ $\forall f \in L^\infty(\Omega)$ ① linear ② $*$-homo ③ $T_{\mathbb{1}} = \mathbb{1}$

3) Thm 13.1 Ω cpt Hausdorff

$\Phi : C(\Omega) \to B(\mathcal{H})$ ① linear ② $*$-homo ③ $\Phi(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$

$\Rightarrow \exists$ 正則 spectral meas on $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ s.t.

$T_f = \Phi(f)$ $\forall f \in C(\Omega)$

Cor 1) と 2) から A bdd $\Rightarrow \exists E = E_A$ spectral meas on $(\sigma(A), \mathcal{B}(\sigma(A)))$

s.t. $\Phi(f) = T_f$ $\forall f \in C(\sigma(A))$

$\tilde{E}(S) = E_A(S \cap \sigma(A))$ $\forall S \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$

$\tilde{E}$ spectral measure on $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$\mathrm{supp}\, \tilde{E} = \sigma(A)$ かつ $\Phi(f) = \int_{\mathbb{R}} f \, d\tilde{E}$ $\forall f \in C(\mathbb{R})$

Section 14 Spectral thm for unitary gp.

$\mathbb{P}_1 = \{ p(e^{it}) : p(x) = a_n x^{-n} + \cdots + a_0 + \cdots + a_{+n} x^n \ \forall n \}$

① $\mathbb{P}_1 \underset{\text{dense}}{\subset} C(\mathbb{T})$ $\quad \mathbb{T} = [0, 2\pi]$

② $\mathbb{P}_1 \ni p \mapsto p(U) = a_n U^{-n} + \cdots + a_0 \mathbb{1} + \cdots + a_n U^n$

Fact $p \in \mathbb{P}_1$ st $p(z) \geq 0 \ \forall z \in \mathbb{T}$
$\Rightarrow \exists q \in \mathbb{P}_1$ st $p = \bar{q} q$ on $\mathbb{T}$.

i.e. $p(e^{it}) = \overline{q(e^{it})}\, q(e^{it})$

Lemma 14.1 $U \in B(\mathcal{H})$ unitary, $p, q \in \mathbb{P}_1$
このとき ① $(p+q)(U) = p(U) + q(U)$ $\quad (\alpha p)(U) = \alpha p(U)$
② $(pq)(U) = p(U) q(U)$, $\quad p(U)^* = \bar{p}(U)$
③ $\| p(U) \| \leq \| p \|_\infty$

∵ ①~② は OK

$$p(U)^* = \left(a_{-n} U^{-n} + \cdots + a_0 + \cdots + a_n U^n \right)^*$$
$$= \bar{a}_{-n} U^n + \cdots + \bar{a}_0 + \cdots + \bar{a}_n U^{-n} \quad \text{) 一致している}$$

$$\bar{p}(U) = \bar{a}_n U^n + \cdots + \bar{a}_0 + \cdots + \bar{a}_n U^n$$

③ $\| p \|^2 \bar{p} p \overset{\exists}{=} \bar{q} q$
$\therefore \| p \|^2 (x, x) - \| p x \|^2 = \| q x \|^2 \geq 0$ //

Thm 14.2 $U \in B(\mathcal{H})$ unitary op.

このとき $\exists_1$ spectral measure E s.t.

$$f(U) = \int_{(0,2\pi]} f(e^{it})\, dE_t \quad {}^\forall f \in C(\mathbb{T})$$

かつ

$$\sigma(U) = \{ e^{it} ; t \in \operatorname{supp} E \}$$

∵ bounded op と ∵ はほとんど同じ

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \mathbb{P}_1 & \to & B(\mathcal{H}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ p & \mapsto & p(U) \end{array}$$

① linear

② $*$-homo

③ $\|\Phi(p)\| \le \|p\|$

④ $\Phi(1) = 1$

⑤ $\Phi(f_0) = U$.

$\rightsquigarrow$

$\exists_1 \bar{\Phi} : C(\mathbb{T}) \to B(\mathcal{H})$

$\therefore \exists$ spectral measure F on $(\mathbb{T}, \mathcal{B}(\mathbb{T}))$

s.t.

$$\int_{\mathbb{T}} f(t)\, dF_t = f(U)$$

$\varphi : (0, 2\pi] \to \mathbb{T}$ 1:1, onto

$\varphi^{-1} : \mathbb{T} \to (0, 2\pi]$ 1:1, onto a image

measure で表すと

$$f(U) = \int_{[0,2\pi)} f(\varphi(y))\, dE\circ\varphi(y)$$

$\varphi(y) = e^{iy}$ $\quad E\circ\varphi(S) = F\circ\varphi(S)$

(注) $F\circ\varphi$ は spectral measure

∵) $F\circ\varphi(\sum S_j) = \sum F\circ\varphi(S_j)$

$F\circ\varphi = E$ //

一意性は F の一意性からわかる.

$\sigma(U) = \{ e^{it} \mid t \in \operatorname{supp} E \}$
$(=B)$

$\sigma(U) \supset B$

∵) $B \ni e^{iy}$ $y \in \operatorname{supp} E$

このとき $E(y-\varepsilon, y+\varepsilon) \neq 0$ ∴ $\exists x \in E(y-\varepsilon, y+\varepsilon)\mathcal{H}$

s.t. $E(y-\varepsilon, y+\varepsilon)x = x$, $E(y-\varepsilon, y+\varepsilon)^c x = 0$

∴ $\|(U - e^{iy})x\|^2 = \int |e^{it} - e^{iy}|^2 d(x, E(y)x)$

$= \int_{(y-\varepsilon,\ y+\varepsilon)} |e^{it} - e^{iy}|^2 dE \leq \varepsilon^2$ とできるから

∴ $e^{iy} \in \sigma(U)$ //

$\sigma(U) \subset B$

∵) $\lambda \notin B$ とするとき $e^{it} - \lambda \neq 0$ $\forall t \in \operatorname{supp} E$

$K = \int (e^{it} - \lambda)^{-1} dE_t$

$\uparrow$

~~$C(\mathbb{T})$~~ $C((0, 2\pi])$ or $(z-\lambda)^{-1} \in C(\mathbb{T})$

∴ $K(U - \lambda) = (U - \lambda)K = \mathbb{1}$

∴ K は bdd inverse だから $\lambda \notin \sigma(U)$ //

Section 15 Unbounded operator

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

つねに $|\{x \in \mathbb{R} \mid |f(x)| = \infty\}| = 0$ としておく.

$$f_n(t) = \begin{cases} f(t) & |f(t)| \leq n \\ 0 & |f(t)| > n \end{cases}$$

このとき $f_n(t) \to f(t)$ a.e.

実際は $N = \{x \mid |f(x)| = \infty\}$ をとって

$\forall t \in \mathbb{R} \setminus N$ で $f_n(t) \to f(t)$ がいえる.

E spectral measure

$\mathcal{B}(\mathbb{R}) \to P(\mathcal{H})$

つまり $f \in L^\infty$ に対して $T_f = \int f dE$ が定義できる.

$T_{f_n} = T_n$ としておく.

Lemma 15.1 $x \in \mathcal{H}$ ① $\Leftrightarrow$ ②

① $\{T_n x\}$ Cauchy ② $\int |f(t)|^2 d(x, E_t x) < \infty$

(∵) 復習 $*$-hom $f, g \in L^\infty$ なら

$T_f T_g = T_{fg}$ つまり $\int f dE \int g dE = \int fg dE$ だから.

$\therefore \|(T_m - T_n)x\|^2 = (x, (T_m - T_n)^2 x) = \int |f_n - f_m|^2 d\mu_{xx}$

$\mu_{xx}(-) = (x, E(-)x)$ は measure.

① ⇒ ② ∴ $\{f_n\}$ は $L^2(\mathbb{R}, \mu_{xx})$ で Cauchy 列

∴ $\exists g \in L^2$ s.t. $f_n \to g$ in L^2 特に $f_n \to g$ a.e.

一方 $f_n \to f$ だったから $g = f$ a.e.

∴ $\int |f|^2 \mu_{xx} < \infty$

② ⇒ ①

$\|(T_n - T_m)x\|^2 = \int |f_n - f_m|^2 \mu_{xx}$

$|f_n - f_m| \leq 2|f|$ ∴ $\lim_{n,m} \int |f_n - f_m|^2 = \int \lim_{n,m} |f_n - f_m|^2 = 0.$

∴ $\{T_n x\}$ は Cauchy 列

Lemma 15.2 Lemma 15.1 で ① と ② をみたす x は dense

∵ D を ①② をみたす x とする.

$A_n = \{ t \in \mathbb{R} \mid |f(t)| \leq n \}$ measurable

$E(A_n)x$ 示すべき i) $E(A_n)x \to x$

$E(A_n)x = x_n$ ii) $E(A_n)x \in D$

ii) $\int |f(t)|^2 d(x_n, E(t)x_n)$

$(E(A_n)x, E(S)E(A_n)x) = (x, E(S \cap A_n)x)$

$= \int \mathbb{1}_{A_n \cap S} d(x, Ex)$

∴ $\int \sum a_j \mathbb{1}_{A_j} d(x_n, Ex_n) = \int (\sum a_j \mathbb{1}_{A_j}) \mathbb{1}_{A_n} d(x, Ex)$

∴ $\int |f(t)|^2 \mathbb{1}_{A_n} d(x, E(t)x) < \infty$

i) を示す.

$$\|E(S_n)x - x\|^2 = \int |1_{S_n} - 1|^2 d(x, Ex) \to 0$$

(以前に $(x, Ex) \ll \mu$ いった)

しめすときの考え方

$x \in D$ とするとき $\{T_n x\}$ Cauchy なので

$\therefore \exists \lim_n T_n x = Tx$ とする $D(T) = D$.

Lemma 15.3 T は closed かつ $\|Tx\|^2 = \int |f|^2 dE$

(∵) $T'x = \lim_n T_n^* x$ (存在する) $\forall x \in D$ $D(T') = D$ とする

∵) $\|T_n^* x - T_m^* x\|^2 = \int |\bar{f}_n - \bar{f}_m|^2 dE \to 0$

$\therefore$ T, T' densely defined

$$(Tx, y) = \lim_n (T_n x, y) = \lim_n (x, T_n^* y)$$
$$= (x, T'y)$$

$\therefore$ $T' \subset T^*$ がわかる.

$T' \supset T^*$ を示したい. つまり $D(T^*) \subset D$ をいう.

$y \in D(T^*)$ とする

$(Tx, y) = (x, z)$ $\forall x \in D$.

$\therefore (T_n x, y) = (TE(A_n)x, y) = (E(A_n)x, z)$

$= (x, E(A_n)z)$ $\therefore T_n^* y = E(A_n)z$

$\therefore \int |f_n(t)|^2 d(y, E_t y) = \|T_n^* y\|^2 = \|E(A_n)z\|^2$

$\leq \|z\|^2$ monotone conv. より

$|f|^2 \in L^1$ $\therefore y \in D$

$\therefore T' = T^*$

$(T'x, y) = \lim_n (T_n^* x\ y) = \lim_n (x, T_n y) = (x\ Ty)$ $\forall y \in D(T)$

より $(T')^* \supset T$

$(T')^* \subset T$ を示す. つまり $D((T')^*) \subset D$

$\forall y \in D((T')^*)$ とする

$(T'x\ \ y) = (x\ \ z)$ $\forall x \in D$

$(T_n^* x\ \ y) = ((T^* E(A_n))^* x\ \ y) =$

$\underline{T E(A_n) x = E(A_n) T x \quad \forall x \in D}$

$= ((E(A_n)T)^* x\ \ y) = (T^* E(A_n) x\ \ y)$

$= (E(A_n) x, z) = (x, E(A_n) z)$

$\therefore T_n y = E(A_n) z$

$\int |f_n(t)|^2 d(y\ E_t y) = \|T_n y\|^2 \leq \|z\|^2$

$\therefore y \in D$ $\therefore$

$\therefore (T')^* = T$

$\therefore T' = T^*$ $\therefore T = (T')^* = T^{**}$ $\therefore$ closed

また $\int |f(t)|^2 d(x\ E_x) = \|Tx\|^2$ をみたす

closed op T を $\int f(t) dE_t$ と表す

$T = \int f(\lambda)\, dE_\lambda$ closed op

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad |\{x \mid |f(x)| = \infty\}| = 0$
- $D(T) = \{x \mid \int |f(t)|^2 d(x, Ex) < \infty\}$

注 $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ のとき $\int f(\lambda)\, dE_\lambda$ は Section 11 の $\int f\, dE$ と一致する.

Lemma 15.4 f Borel meas.

① $(\int f\, dE)^* = \int \bar{f}\, dE$

② f : 実 $\Rightarrow$ $\int f\, dE$ は s.a.

③ $\int f\, dE + \int g\, dE \subset \int f+g\, dE$

④ $\int f\, dE \int g\, dE \subset \int fg\, dE$

∵ ① $T_f^* = T_f' = T_{\bar{f}}$ Lemma 15.3の∵

② ①から従う

③ $h = f + g$ $\quad x \in D(T_f) \cap D(T_g)$ とする

(1) $x \in D(h)$ ∵) $\int |f+g|^2 d\|Ex\|^2$

$\leq 2 \int |f|^2 + |g|^2\, d\|Ex\|^2 < \infty$

(2) $x \in D(T_f) \cap D(T_g)$ のとき

$T_f x + T_g x = T_h x$

∵) f_n, g_n, h_n は bdd op

$\|(T_{f_n} + T_{g_n} - T_{h_n})x\|^2 = \int |f_n + g_n - h_n|^2 d\|Ex\|^2$

$\downarrow 0$ Lebesgue.

$T_{f_n} x \to T_f x$

$T_{g_n} x \to T_g x$

$T_{h_n} x \to T_h x$ $\quad \therefore T_f + T_g = T_h$ on $D(T_f) \cap D(T_g)$

//

④ $x \in D(T_f T_g)$ i.e. $x \in D(T_g)$ かつ $T_g x \in D(T_f)$.

(1) $x \in D(T_{fg})$

$\because)$ $\int |fg|^2 d\|Ex\|^2 \underset{※}{=} \int |f|^2 d\|E T_g x\|^2 < \infty$

※ $|g|^2 d\|Ex\|^2 = d\|E T_g x\|^2$

i.e. $d\|Ex\|^2 \gg d\|E T_g x\|^2$ になっている

$\|E(S) T_g x\|^2 = \lim \|E(S) T_{g_n} x\|^2 = \lim \|T_{\mathbb{1}_S} T_{g_n} x\|^2$

$= \lim \|T_{\mathbb{1}_S g_n} x\|^2 = \lim \int |\mathbb{1}_S g_n|^2 d\|Ex\|^2$

$= \int \mathbb{1}_S |g|^2 d\|Ex\|^2$

$\|E(S) T_g x\| = \int \mathbb{1}_S \, d\|E T_g x\|^2$ //

(2) $\|(T_{fg} - T_f T_g)x\| \leq \|(T_{fg} - T_{f_n g})x\|$

$+ \|(T_{f_n g} - T_{f_n g_m})x\| + \|(T_{f_n} T_{g_m} - T_{f_n} T_g)x\|$

$+ \|(T_{f_n} T_g - T_f T_g)x\| = Ⓐ + Ⓑ + Ⓒ + Ⓓ$

Ⓓ $\to 0$ は ok.

Ⓒ $\to 0$ $(m \to \infty)$ ok

Ⓑ $= \int |f_n|^2 |g - g_m|^2 d\|Ex\|^2 \leq n^2 \int |g - g_m|^2 d|Ex|^2$

$\to 0$ $(m \to \infty)$

Ⓐ $= \int |f - f_n|^2 |g|^2 d\|Ex\|^2 \to 0$ $(n \to \infty)$

//

最終回 2017/7/27

- Spectral measure E, $f \in L^\infty$

$\rightsquigarrow$ $T_f := \int f\, dE$ は bdd op.

$T_f + T_g = T_{f+g}$, $T_f T_g = T_{fg}$, $T_f^* = T_{\bar f}$

- Spectral measure E, f measurable

$\rightsquigarrow$ $T_f := \int f\, dE$ は closed

$$D(T_f) = \{x \mid \int |f|^2 d\|Ex\|^2 < \infty\}$$

$T_f + T_g \subset T_{f+g}$ $\quad T_f \cdot T_g \subset T_{fg}$ $\quad T_f^* = T_{\bar f}$

- A bdd s.a. $\Rightarrow$ $\exists E$ st $A = \int t\, dE_t$
- A s.a. $\Rightarrow$ $\exists E$ st $A = \int_{\sigma(A)} t\, dE_t$

↖ 自不要

---

von Neumann a idea

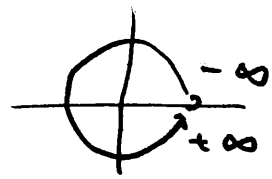
T: s.a. $\longrightarrow$ U unitary op をつくれた!!

$$U = \int_{(0, 2\pi]} e^{i\theta}\, dE_\theta$$

$$\mathbb{R} \ni t \longmapsto \frac{t-i}{t+i} \in S^1 \subset \mathbb{C}$$

$$\frac{t-i}{t+i} = e^{i\theta(t)}$$

θ	$0 \to 2\pi$
t	$-\infty \to +\infty$



θ : ↑ cont.

又は $\dfrac{t-i}{t-i} = \dfrac{t^2-1}{t^2+1} - \dfrac{2t}{t^2+1} i = (\cos\theta + i\sin\theta) \times (-1)$

$t = \tan\dfrac{\theta}{2}$

Thm 15.6 (von Neumann)

T. s.a. に対し $\exists_1$ E spectral measure

s.t. $T = \int t \, dE_t$

∵ $(T-i)(T+i)^{-1} = U$ Cayley 変換.

$$U = \int_{(0,2\pi]} e^{it} dF_t = \int_{(0,2\pi)} e^{it} dF_t \quad (\mathrm{Ker}(1-U) = \{0\})$$

$$\frac{t-i}{t+i} = e^{i\theta(t)}$$

$(-\infty, \infty) \ni t \mapsto \theta(t) \in (0, 2\pi)$

$(-\infty, \infty) \xleftarrow{\psi = \theta^{-1}} (0, 2\pi)$

$$\therefore U = \int_{(0,2\pi)} e^{i\theta\circ\theta^{-1}(t)} dF_t = \int_{(-\infty,\infty)} e^{i\theta(\xi)} dF_{\theta(\xi)}$$

$dF_{\theta(\xi)} := E_\xi$ と def して

$\tilde{T} = \int_{(-\infty,\infty)} t \, dE_t$ とおき $\tilde{U} = \int \frac{t-i}{t+i} dE_t$

$$\begin{cases} T((1-U)\eta = i(1+U)\eta \\ \tilde{T}(1-\tilde{U})\eta = i(1+\tilde{U})\eta \end{cases}$$

とこうすれば $\tilde{U} = \int e^{i\theta(t)} dE_t = \int e^{i\theta(t)} dF_{\theta(t)} = U$.

$\therefore \underset{\overset{\shortparallel}{D(T)}}{\mathrm{Ran}(1-U)} = \mathrm{Ran}(1-\tilde{U}) = D(\tilde{T})$

かつ $T = \tilde{T}$ //

一意性は $T = \int t \, dG_t$ のとき

$$U = \int \frac{t-i}{t+i} dG_t = \int e^{i\theta(t)} dG_t = \int_{(0,2\pi)} e^{it} dG_{\theta^{-1}(t)}$$

$$= \int_{(0,2\pi)} e^{it} dF_t$$

$\therefore dG_{\theta^{-1}(t)} = dF_t$

$\therefore dG_t = dF_{\theta(t)} = dE_t$. //

$(U_t)_{t\in\mathbb{R}}$ ① $U_0 = 1$ ② $U_t U_s = U_{t+s}$

③ $t \mapsto U_t$ strongly cont. 1径数 unitary group.

T s.a. $\exists_1$ spectral meas E st

$\int t\, dE_t = T$

$U_t := \int e^{it\lambda} dE_\lambda = e^{itT}$ と表わる.

Lemma 15.7 U_t $(-\infty < t < \infty)$ は 1径数 unitary group

(∵) $U_t U_s = U_{t+s}$, $U_0 = 1$ は ok.

weak cont は

$((U_t - 1)x, x) = \int (e^{it\lambda} - 1)\, d\|E_\lambda x\|^2 \to 0.$ //

これは strong cont をもいっている. 」

(注) $\left\| \frac{1}{t}(U_t - 1)x - iTx \right\|^2$

$= \int \underbrace{\left| \frac{e^{it\lambda} - 1}{t} - i\lambda \right|^2}_{\leq 2|\lambda|} d\|E_\lambda x\|^2 \to 0.$

$(|e^{it\lambda} - 1| \leq |\lambda|$ だから$)$

形式的には $\frac{d}{dt} e^{itT} x = iTx$ //

Thm 15.8 (Stone theorem)

$\{U_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ 1径数 unitary group

$\Rightarrow \exists E$ ~~s.a.~~ spectral meas st $U_t = \int e^{it\lambda} dE_\lambda.$