

経路積分と GIBBS 測度による量子場の数理

廣島 文生

九州大学 大学院数理学研究院

平成 27 年 8 月 22 日 version 7

概要

このノートは 2013 年 9 月に東大で開催された数理物理サマースクール 2013 の予稿集と、翌 2014 年 11 月に北大でおこなった集中講義のノートに応用編を加えたものである。量子力学における Feynman-Kac 公式と場の量子論へのパス測度の応用、そして応用編からなる。

第 I 部では、Itô 積分と Lévy 過程を復習して、Feynman-Kac 公式の説明をする。特に Schrödinger 作用素 $-\frac{1}{2}\Delta + V$, 磁場とスピンを含んだ Schrödinger 作用素 $\frac{1}{2}(\sigma \cdot (p-a))^2 + V$, その準相対論的モデル $\sqrt{(\sigma \cdot (p-a))^2 + m^2} + V$ と、それらの一般化した作用素

$$h_p^\Psi(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}, V) = \Psi(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})) + V$$

に対する Feynman-Kac 公式を与える。

第 II 部では、Nelson 模型といわれるスカラー場の模型の生成する熱半群の Feynman-Kac 型経路積分表示を与え、その応用として (1) 基底状態の存在・非存在, (2) 基底状態の空間的指数減衰性, (3) 基底状態に付随した Gibbs 測度, (4) オブザーバブルの基底状態に関する期待値, (5) 紫外発散のくりこみ, を議論した。

第 III 部では、応用として多様体上への QFT の拡張, 紫外切断のない基底状態の存在, enhanced binding を議論した。

目次

第I部	Feynman-Kac 公式	8
1	確率論的準備	8
1.1	Brown 運動	8
1.2	確率積分	10
1.3	Lévy 過程	12
1.4	Semi-martingale に対する Itô の公式	18
2	Feynman-Kac 公式	21
2.1	Schrödinger 作用素と Feynman-Kac 公式	21
2.2	ベクトルポテンシャルと Feynman-Kac-Itô 公式	24
2.3	スピン 1/2 と spin-Feynman-Kac-Itô 公式	27
2.4	スペクトルゼータ関数	31
3	経路積分表示	33
3.1	Bernstein 関数と subordinator	33
3.2	一般化されたベクトルポテンシャル	36
3.3	確率積分の拡張	37
3.4	一般化された Feynman-Kac-Itô 公式	38
3.5	相対論的 Schrödinger 作用素の経路積分表示	43
3.6	Lieb-Thirring 不等式	44
4	スピンを含む経路積分表示	46
4.1	スピン 1/2	46
4.2	一般化されたスピン	47
4.3	一般化された spin-Feynman-Kac-Itô 公式	50
4.4	スピン 1/2 相対論的 Schrödinger 作用素の経路積分表示	58
4.5	固有状態の空間的減衰性	62
4.6	参考文献など	63
5	Kato クラスと Ψ-Kato クラス	63
5.1	Kato-クラス	63
5.2	Ψ -Kato クラス	64

6	$P(\phi)_1$ 過程	68
6.1	基底状態変換と $P(\phi)_1$ 過程	68
6.2	Dirichlet 原理	77
6.3	Mehler 公式	79
6.4	Rabi 模型	82
6.5	参考文献など	85
 第 II 部 場の量子論		86
7	Boson Fock 空間	86
7.1	お話	86
7.2	Boson Fock 空間	87
7.3	\mathcal{Q} -空間	92
7.4	Wiener-Itô-Segal 同型	92
7.5	スカラー場	94
7.6	Euclid 場と Markov 性	95
7.7	Euclid 群と射影作用素の分解	101
8	Nelson 模型	101
8.1	Nelson 模型の形式的な導出	101
8.2	Fock 空間上の Nelson 模型	102
8.3	汎関数空間上の Nelson 模型	104
8.4	Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示	105
8.5	ユークリッド場の一般化と Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示	106
8.6	赤外発散, 紫外発散, 基底状態の存在・非存在	108
8.7	埋蔵固有値の摂動問題	109
8.8	ペアポテンシャル	110
8.9	参考文献など	112
9	赤外正則条件と基底状態の存在	112
9.1	存在	112
9.2	参考文献など	119
10	赤外発散と基底状態の非存在	119
10.1	非存在	119
10.2	参考文献など	124

11	Martingale 性と固有ベクトルの空間的減衰性	124
11.1	固有ベクトルの空間的減衰性	124
11.2	参考文献など	128
12	Gibbs 測度	128
12.1	Gibbs 測度の定義	128
12.2	局所弱収束と Nelson 模型に付随した Gibbs 測度の存在	130
12.3	参考文献など	135
13	基底状態に関する期待値	135
13.1	$F(\phi(f))$ の期待値	135
13.2	ガウス domination	138
13.3	第 2 量子化作用素の期待値	141
13.4	個数作用素の期待値	143
13.5	参考文献など	145
14	紫外切断のくりこみ理論	146
14.1	正則化された Hamiltonian の汎関数積分表示	146
14.2	くりこまれた作用	148
14.3	一般的なベクトルへの拡張	158
14.4	下からの一様有界性	160
14.5	弱結合極限における実行ポテンシャル	163
14.6	基底状態エネルギーと紫外切断のくりこみ項	165
14.7	ポーラロン模型	166
14.8	参考文献など	168
第 III 部 応用編		169
15	紫外切断のない基底状態の存在	169
15.1	E. Nelson による作用素論的なくりこみ	169
15.2	実行質量	172
15.3	弱極限	172
15.4	紫外領域	174
15.5	赤外領域	176
15.6	赤外正則条件下での基底状態の存在	178
15.7	参考文献など	180

16	Enhanced binding	180
16.1	概略	180
16.2	基底状態の Enhanced binding による存在	182
16.3	参考文献など	189
17	多様体上の Nelson 模型	189
17.1	概観	189
17.2	ローレンツ多様体上のクライン・ゴールドン 方程式	190
17.3	短距離ポテンシャルを与える計量	193
17.4	時間不変なローレンツ多様体上の Nelson 模型	196
17.5	基底状態の存在	197
17.6	基底状態の非存在	198
17.7	紫外切断のくりこみ	201
17.8	参考文献など	201
18	その他の模型	202
18.1	スピン・ボゾン模型	202
18.2	準相対論的 Nelson 模型	202
18.3	Pauli-Fierz 模型	203
18.3.1	スピンがない場合	203
18.3.2	スピンがある場合	203
18.3.3	$V = 0$ の場合	203
18.4	準相対論的 Pauli-Fierz 模型	204
18.4.1	スピンがない場合	204
18.4.2	スピンがある場合	204

主な記号

\mathcal{F}	$L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の Fock 空間
\mathcal{H}_N	$\mathcal{H}_N = L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}$ は全ヒルベルト空間をあらわす
ω	dispersion relation $\omega(k) = \sqrt{ k ^2 + \nu^2}$, $\nu \geq 0$. ほとんどの場合 $\nu = 0$
$d\Gamma$	第 2 量子化
Γ	第 2 量子化, $\Gamma(e^{-ith}) = e^{-itd\Gamma(h)}$
H_f	量子場の自由 Hamiltonian $H_f = d\Gamma(\omega)$
$\Phi(f)$	Sigal 場 $\Phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(f) + a(\bar{f}))$
$\phi(f)$	$(\mathcal{Q}, \Sigma, \mu)$ 上の $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ を指数に持つガウス超過程
$\phi_E(f)$	$(\mathcal{Q}_E, \Sigma_E, \mu_E)$ 上の $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1})$ を指数に持つガウス超過程
\mathbb{E}_Q	確率測度 Q に関する期待値 $\int \cdots dQ$
\mathbb{E}_Q^x	パス空間上の確率測度 Q^x に関する期待値 $\int \cdots dQ^x$
$(B_t)_{t \in \mathbb{R}}$	Brown 運動
$(\Omega, \mathcal{F}, W^x)$	Brown 運動の定義されている確率空間
$(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{W}^x)$	\mathbb{R} 上の Brown 運動の定義されている確率空間
Ω	$C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$
$\tilde{\Omega}$	$C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$
\mathcal{F}_t^B	Brown 運動の自然なフィルトレーション ¹
\mathbb{E}_W	$x = 0$ とした \mathbb{E}_W^0 の省略形
$(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, Q)$	一般的な確率空間
H_p	Schrödinger 作用素 $-\frac{1}{2}\Delta + V$
φ_p	H_p の規格化された正の基底状態
Σ_p	H_p の本質的スペクトルの下限
$(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$	H_p に付随した $P(\phi)_1$ 過程
\mathcal{X}	$C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^d)$
$(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathcal{N}_0^x)$	$P(\phi)_1$ 過程 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ の定義されている確率空間
$(N_t)_{t \geq 0}$	Poisson 過程
$(\Omega_\mu, \mathcal{F}_\mu, \mu)$	Poisson 過程の定義されている確率空間
θ_{N_t}	$\theta_{N_t} = (-1)^{N_t}$
dN_s	Lévy 過程に付随した counting 測度
dN_0	\mathbb{R}^d 上の確率測度 $dN_0 = \varphi_p(x)^2 dx$
Ψ	Bernstein 関数
$(T_t^\Psi)_{t \geq 0}$	Bernstein 関数に付随した subordinator
$(\Omega_\nu, \mathcal{F}_\nu, \nu)$	subordinator の定義されている確率空間

H	Nelson Hamiltonian $H = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + H_I$
H_g	計量 g のローレンツ空間に定義された Nelson Hamiltonian
dP_0	$\mathbb{R}^d \times \mathcal{Q}$ 上の確率測度 $dP_0 = dN_0 \otimes d\mu$
dN_0	$\mathbb{R}^d \times \mathcal{X}$ 上の確率測度 $dN_0 = dN_0 \otimes dN_0^x$
dN_T	$\mathbb{R}^d \times \mathcal{X}$ 上の確率測度 $dN_T = \frac{1}{Z_T} e^{S[-T, T]} dN_0$
E	H のスペクトルの下限 $\inf \sigma(H)$
Ψ_g	Nelson Hamiltonian H の基底状態に至るところ正.
L_p	H_p の基底状態変換 $L_p = \theta_W(H_p - E_p)\theta_W^{-1}$
L	汎関数空間上の Nelson Hamiltonian $L = L_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \tilde{H}_f + \tilde{H}_I$
I_{IR}	赤外正則条件, 赤外特異条件を定義するときの積分 $I_{\text{IR}} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{ \hat{\varphi} ^2}{\omega^3} dk$
$Q_{[-t, t]}$	$Q_{[-t, t]} = e^{-\int_{-t}^t V(B_s) ds} J_0^* e^{-\phi_E(\int_{-t}^t \dot{J}_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s) ds)} J_t$
\mathcal{L}_t	$\mathcal{L}_t = \phi(B_{-t}) Q_{[-t, t]} \phi(B_t)$
$d\mu_T$	$\mu_T(A) = \frac{1}{Z_T} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_W^x[\mathbb{1}_A \mathcal{L}_T]$ で $(\Omega, \sigma(\mathcal{G}))$ 上の確率測度を表す
$d\mu_\infty$	$(\Omega, \sigma(\mathcal{G}))$ に定義された Gibbs 測度
$W(x, T)$	Nelson 模型のペアポテンシャル $W(x, T) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{ \hat{\varphi}(k) ^2}{2\omega(k)} e^{-T\omega(k)} e^{-ik \cdot x} dk$
$S[-T, T]$	$\frac{1}{2} \int_{-T}^T ds \int_{-T}^T dt W(X_t - X_s, t - s)$
$h(a)$	$\frac{1}{2}(p - a)^2$
$h_2(a)$	$\frac{1}{2}(\sigma \cdot (p - a))^2$
$h^\Psi(a, V)$	$\Psi(h(a)) + V$
$K^\Psi(a, V)$	$\Psi(h(a)) + V$, ただし V は Kato 分解可能クラス
\mathcal{M}	$\mathcal{M} = \mathcal{M}(U, U_1, \dots, U_{p-1})$ 一般化されたスピン作用素
h_p	$h_p = h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) = h(a) + \mathcal{M}(U, U_1, \dots, U_{p-1})$
h_p^Ψ	$h_p^\Psi = h_p^\Psi(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}, V) = \Psi(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})) + V$
$\Pi_t(x)$	熱核 $(2\pi t)^{-d/2} \exp(- x ^2/2t)$
$\mathcal{B}(K)$	位相空間 K 上のボレルシグマ代数
$\sigma(H)$	H のスペクトラム
\mathbb{Z}_p	$\{\theta_1^{(p)}, \dots, \theta_p^{(p)}\}$

第I部

Feynman-Kac 公式

1 確率論的準備

確率空間, Wiener 測度, Brown 運動, Lévy 過程, Lévy 測度, Lévy-Khintchine 公式, Markov 過程, Martingale, 確率積分, Itô の公式など, 必要最小限の確率論の基本的アイテムを復習する.

1.1 Brown 運動

\mathbb{R}^d に値をとる連続パスの全体を

$$\Omega = C([0, \infty); \mathbb{R}^d)$$

で表す. Ω は線形空間になる. Ω で $f_k \rightarrow f (k \rightarrow \infty)$ とは

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sup_{0 \leq t \leq n} |f_k(t) - f(t)|) \wedge 1}{2^n} = 0$$

と定める. これは f_k が $[0, \infty)$ の任意のコンパクト集合上で f に一様収束することと同値である. これを Ω の局所一様位相という. Ω を位相空間とみなして, そのボレルシグマ代数²を \mathcal{F} で表す. 実はこのようにして定義した \mathcal{F} は, Ω の柱状集合

$$C = \bigcup_{\substack{0 \leq t_1 < \dots < t_n < \infty \\ 1 \leq n}} \{w \in \Omega | (w(t_1), \dots, w(t_n)) \in A_1 \times \dots \times A_n, A_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, n\}$$

から生成されるシグマ代数 $\sigma(C)$ と一致する, i.e., $\sigma(C) = \mathcal{F}$. 柱状集合で定義すると位相のことを気にしなくていいので便利なことも多い. d 次元の熱核を

$$\Pi_t(x) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(\frac{-|x|^2}{2t}\right), \quad t > 0$$

²全ての開集合を含む最小のシグマ代数.

で表す. 柱状集合 $\mathcal{C} = \{w \in \Omega | w(t_1) \in F_1, \dots, w(t_n) \in F_n, F_j \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), j = 1, \dots, n\} \in \mathcal{F}$ に対して

$$W^x(\mathcal{C}) = \int_{\mathbb{R}^{dN}} \left(\prod_{j=1}^n \mathbb{1}_{F_j}(x_j) \right) \left(\prod_{j=1}^n \Pi_{t_j - t_{j-1}}(x_j - x_{j-1}) \right) dx_1 \cdots dx_n, \quad x_0 = x,$$

で決まる集合関数は, Ω 上の確率測度に一意的に拡張できる. これを可測空間 (Ω, \mathcal{F}) 上の Wiener 測度といい, $W^x, x \in \mathbb{R}^d$, で表す. 特に $W^0 = W$ とおく. さて, このとき座標過程

$$B_t(\cdot) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \Omega \ni w \mapsto w(t), \quad t \geq 0, \quad (1.1)$$

は $x \in \mathbb{R}^d$ から出発する $(\Omega, \mathcal{F}, W^x)$ 上の d 次元 Brown 運動になる. つまり

(1) $W^x(B_0 = x) = 1$.

(2) $t \mapsto B_t$ は a.s. に³連続.

(3) $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ に対して $\{B_{t_i} - B_{t_{i-1}}\}_{1 \leq i \leq n}$ は独立な n 個の確率変数族.

(4) $B_{t_i} - B_{t_{i-1}}$ は平均がゼロ, 分散 $t_i - t_{i-1}$ のガウス過程.

$\mathbb{E}_W^x[\dots] = \int_{\Omega} \dots dW^x$ と表す⁴. そうすると, 次が従う.

$$\mathbb{E}_W^x[f(B_t)] = \mathbb{E}_W^0[f(B_t + x)], \quad f \text{ 有界ボレル可測関数.}$$

また, $x = 0$ から出発する B_t の分布関数は Π_t なので

$$\mathbb{E}_W^x[f(B_t)] = \int_{\mathbb{R}^d} \Pi_t(x - y) f(y) dy$$

となる. さらに, これから

$$\mathbb{E}_W^x[f(B_t)] = (e^{t\Delta/2} f)(x)$$

もわかる. Markov 過程と Martingale について復習する. 以降, $\mathbb{E}_Q[Z|\mathcal{G}]$ は部分シグマ代数 $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ で条件付けられた確率変数 Z の条件付き期待値を表す.

³a.s.=almost surely

⁴一般にパス上の確率測度で時刻 0 で x から出発するパス全体の測度が 1 になるものを Q^x と書くとき $\mathbb{E}_{Q^x} = \mathbb{E}_Q^x$ と表す.

定義 1.1 (Markov 過程と Martingale) $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, Q)$ を確率空間とし, $(\mathcal{B}_t)_{t \geq 0}$ をフィルトレーション⁵とする.

(1) 確率過程 $(X_t)_{t \geq 0}$ が $(\mathcal{B}_t)_{t \geq 0}$ に関して Markov 過程であるとは⁶

$$\mathbb{E}_Q[f(X_t)|\mathcal{B}_s] = \mathbb{E}_Q[f(X_t)|\sigma(X_s)], \quad t \geq s,$$

が任意の有界ボレル可測関数 $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ に対して成り立つことである.

(2) 確率過程 $(Y_t)_{t \geq 0}$ が $(\mathcal{B}_t)_{t \geq 0}$ に関して Martingale であるとは

$$\mathbb{E}_Q[|Y_t|] < \infty, \quad \mathbb{E}_Q[Y_t|\mathcal{B}_s] = Y_s, \quad t \geq s,$$

となることである.

Brown 運動 $(B_t)_{t \geq 0}$ は自然なフィルトレーション $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s; 0 \leq s \leq t)$ に関して Markov 過程であり Martingale である. Markov 性から

$$\mathbb{E}_W^x[f(B_t)|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}_W^{B_s}[f(B_{t-s})]$$

となることがわかる. $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ のとき, $\mathbb{E}_W[f(B_t)|\mathcal{F}_t] \in L^2(\mathbb{R}^d)$ になり, $f \mapsto \mathbb{E}_W[f(B_t)|\mathcal{F}_t]$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の射影になる.

1.2 確率積分

確率積分を定義しよう. 区間 $[0, T]$ の分割を $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ とし, f_j は $\mathcal{F}_{t_j}^B$ -可測な \mathbb{C}^d -値関数であると仮定する. このとき階段関数

$$\phi(t, w) = \sum_{j=0}^{n-1} f_j(w) \mathbb{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t) \quad (1.2)$$

に対して

$$\int_0^T \phi(t, w) \cdot dB_t = \sum_{j=0}^{n-1} f_j(w) \cdot (B_{t_{j+1}}(w) - B_{t_j}(w)) \quad (1.3)$$

と定めると, f_j の $\mathcal{F}_{t_j}^B$ -可測性から

$$\mathbb{E}_W \left[\left(\int_0^T \phi(t, w) \cdot dB_t \right)^2 \right] = \mathbb{E}_W \left[\int_0^T |\phi(t, w)|^2 dt \right]$$

⁵非減少な部分シグマ代数の族.

⁶ $\sigma(\dots)$ とは \dots が生成する最小のシグマ代数を表す.

が従う. (1.3) を拡張するために関数のクラスを定義する. 次の (1)-(3) を満たす関数全体を $M(0, T)$ と表す.

(1) $f: \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ は $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F})/\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 可測.

(2) $f(t, \cdot)$ は \mathcal{F}_t^B 可測, $0 \leq t \leq T$.

(3) $\mathbb{E}_W \left[\int_0^T |f(t, w)|^2 dt \right] < \infty$.

補題 1.2 $f \in M(0, T)$ に対して

$$\mathbb{E}_W^0 \left[\int_0^T |f(t, w) - \phi_n(t, w)|^2 dt \right] \rightarrow 0$$

となる (1.3) のような階段関数列 ϕ_n が存在する.

補題 1.2 より $f \in M(0, T)$ に対して $\int_0^T \phi_n(s, w) \cdot dB_s$ が $L^2(\Omega, dW)$ でコーシー列になるので I_T を

$$I_T = s - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^T \phi_n(s, w) \cdot dB_s \quad \text{in } L^2(\Omega, dW) \quad (1.4)$$

と定める. このとき, (1.4) は ϕ_n の選び方によらないことも示せる.

定義 1.3 (確率積分) $f \in M(0, T)$ に対して I_T を確率積分といい, 次のように表す.

$$I_T = \int_0^T f(t, w) \cdot dB_t. \quad (1.5)$$

また, $(I_t)_{t \geq 0}$ には連続修正⁷ が存在することも示せるので, 以降, $t \mapsto I_t$ は a.s. に連続であるとみなす. さらに, $(I_t)_{t \geq 0}$ は,

$$\text{(平均)} \quad \mathbb{E}_W^0 [I_t] = 0, \quad (1.6)$$

$$\text{(分散)} \quad \mathbb{E}_W^0 [|I_t|^2] = \mathbb{E}_W^0 \left[\int_0^t |f(s, w)|^2 ds \right] \quad (1.7)$$

の (Ω, \mathcal{F}, W) 上の Martingale になる. (1.7) を Itô isometry という. (1.5) は, さらに広いクラスの f に拡張できる. 第 3 節を見よ.

⁷ $(X_t)_{t \geq 0}$ が $(Y_t)_{t \geq 0}$ の連続修正とは $t \mapsto X_t$ が a.s. に連続でかつ $X_t = Y_t$ a.s. が t ごとに成り立つこと.

補題 1.4 $f = (f_1, \dots, f_n)$, $f_j \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$, に対して⁸

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{2} f(B_{(j-1)t/2^n}) \cdot (B_{jt/2^n} - B_{(j-1)t/2^n}) = \int_0^t f(B_s) \cdot dB_s, \quad (1.8)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{2^n} \frac{1}{2} (f(B_{jt/2^n}) + f(B_{(j-1)t/2^n})) \cdot (B_{jt/2^n} - B_{(j-1)t/2^n}) \\ = \int_0^t f(B_s) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \nabla \cdot f(B_s) ds \end{aligned} \quad (1.9)$$

が成立する.

(1.9) の右边を $\int_0^t f(B_s) \circ dB_s$ と書いて Stratonovich 積分という. Brown 運動を半開区間 $[0, \infty)$ から全空間 \mathbb{R} へ拡張しておくとう便利なことがある. $\tilde{\Omega} = C(\mathbb{R}; \mathbb{R}^d)$ とおく. 座標過程 $(\tilde{B}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ が (1)-(5) を満たす d -次元 Brown 運動になる確率空間 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}}, \tilde{W}^x)$ が構成できる.

- (1) $\tilde{W}^x(\tilde{B}_0 = x) = 1$.
- (2) \tilde{B}_t と \tilde{B}_s ($t > 0, s < 0$) は独立.
- (3) $(\tilde{B}_{t_i} - \tilde{B}_{t_{i-1}})_{1 \leq i \leq n}$ ($0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$) は独立なガウス型確率変数族で $\tilde{B}_t - \tilde{B}_s$ の平均は 0, 分散は $t - s$ ($t > s$), また, $(\tilde{B}_{-t_{i-1}} - \tilde{B}_{-t_i})_{1 \leq i \leq n}$ ($0 = -t_0 > -t_1 > \dots > -t_n$) は独立なガウス型確率変数族で $\tilde{B}_{-t} - \tilde{B}_{-s}$ の平均は 0, 分散は $s - t$ ($-t > -s$).
- (4) $\mathbb{R} \ni t \mapsto \tilde{B}_t$ は連続 a.s.
- (5) $dx \otimes \tilde{W}^x$ に関する $\tilde{B}_{t_0}, \dots, \tilde{B}_{t_n}$ の同分布はシフト不変. つまり

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{\tilde{W}^x} \left[\prod_{i=0}^n f_i(\tilde{B}_{t_i}) \right] = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{\tilde{W}^x} \left[\prod_{i=0}^n f_i(\tilde{B}_{t_i+s}) \right].$$

1.3 Lévy 過程

Lévy 過程について簡単に復習する. $(\mathcal{G}, \mathcal{B}, Q)$ を確率空間, $(B_t)_{t \geq 0}$ をフィルトレーションとする.

⁸ $C_b^2(\mathbb{R}^d)$ は 2 階までの偏導関数が全て有界かつ連続な関数の空間.

定義 1.5 (Lévy 過程) 確率過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$, $\eta_t(\cdot) : \mathcal{Y} \rightarrow \mathbb{R}^d$, が d 次元 Lévy 過程とは以下の (1)-(5) を満たすことである.

- (1) $P(\eta_0 = 0) = 1$.
- (2) $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ に対して $\{\eta_{t_i} - \eta_{t_{i-1}}\}_{1 \leq i \leq n}$ が独立な n 個の確率変数族.
- (3) $\eta_{t+u} - \eta_{s+u}$ の分布が u によらない.
- (4) 任意の $t \geq 0$, $\epsilon > 0$ に対して $\lim_{s \rightarrow t} Q(|\eta_t - \eta_s| > \epsilon) = 0$.
- (5) $t \mapsto \eta_t$ は a.s. に右連続で, 左極限が存在する⁹.

例 1.6 Brown 運動は Lévy 過程である.

例 1.7 \mathbb{N}^\times -値¹⁰ Lévy 過程 $(N_t)_{t \geq 0}$ が

$$Q(N_t = n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}, \quad n \in \mathbb{N}^\times$$

となるとき, $(N_t)_{t \geq 0}$ を intensity $\lambda > 0$ の Poisson 過程という.

例 1.8 $(N_t)_{t \geq 0}$ を intensity $\lambda > 0$ の Poisson 過程とするとき

$$\tilde{N}_t = N_t - \lambda t, \quad t \geq 0,$$

を compensated Poisson 過程という. このとき, $\mathbb{E}_Q[\tilde{N}_t] = 0$, $\mathbb{E}_Q[\tilde{N}_t^2] = \lambda t$ になり, 自然なフィルトレーションで $(\tilde{N}_t)_{t \geq 0}$ は Martingale になる.

例 1.9 $(N_t)_{t \geq 0}$ を intensity $\lambda > 0$ の Poisson 過程とする. Z_n , $n \in \mathbb{N}$, を互いに独立で分布が等しい確率変数の族とする¹¹. このとき

$$Y_t = \sum_{n=1}^{N_t} Z_n, \quad t \geq 0,$$

は Lévy 過程になる. これを複合 (compound) Poisson 過程という.

⁹右連続で, 左極限が存在するパスを càdlàg パス (=continue à droite, limitée à gauche) という.

¹⁰ $\mathbb{N}^\times = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

¹¹iid (independently identified distribution) という.

$\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ のボレル集合全体の生成するシグマ代数を $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ とおく. $(\eta_t)_{t \geq 0}$ を Lévy 過程とする. $s \mapsto \eta_s$ の左極限 η_{s-} がいつも存在するので, 時刻 $t = s$ でのジャンプを $\Delta\eta_s = \eta_s - \eta_{s-}$ と定める. 時刻 $t > 0$ までの, 大きさが $U \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ のジャンプの総数は

$$N(t, U) = \#\{0 < s \leq t \mid \Delta\eta_s \in U\} \quad (1.10)$$

となる. $U \not\ni 0$ に注意せよ. $N(t, U) < \infty$ a.s. は知られている.

定義 1.10 (Lévy 測度) $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ 上の測度 ν で

$$\int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} 1 \wedge |z|^2 \nu(dz) < \infty$$

となるものを Lévy 測度という.

命題 1.11 Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ から (1.10) で定義された \mathbb{N}^\times -値確率過程 $(N(t, U))_{t \geq 0}$ は intensity $\nu(U) = \mathbb{E}_Q[N(1, U)]$ の Poisson 過程になる. つまり

$$Q(N(t, U) = n) = \frac{(\nu(U)t)^n}{n!} e^{-\nu(U)t}.$$

また $\nu(\cdot) : \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, \infty)$ は Lévy 測度になる.

命題 1.11 で $\nu(\cdot)$ を $(\eta_t)_{t \geq 0}$ に付随した Lévy 測度という. これは有限測度とは限らない.

$$\nu(|z| < 1) = \infty \quad (1.11)$$

ということも一般にはありえる. これは, 時刻 1 までの大きさが 1 より小さいジャンプの個数の期待値が発散していることをいっている. 一般に $A \in \mathcal{B}([0, \infty))$, $U \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ に対して $N(A, U) = \#\{s \in A \mid \Delta\eta_s \in U\}$ と定めて, N を $\mathcal{B}([0, \infty)) \times \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d)$ 上のランダムな counting 測度に拡張できる.

$$\tilde{N}(t, U) = N(t, U) - t\nu(U) \quad (1.12)$$

とおく. $t\nu(U)$ は $N(t, U)$ の compensator と呼ばれる. Lévy 過程で重要な事実を述べる.

$$\int_0^t \int_{0 < |z| < 1} z \tilde{N}(dtdz) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^t \int_{\varepsilon < |z| < 1} z \tilde{N}(dtdz)$$

とする. ここで, $\lim_{\varepsilon \downarrow 0}$ は $L^2(\mathcal{P})$ の位相での極限.

命題 1.12 (Lévy-Itô 分解) Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ は次のように分解できる.

$$\eta_t = \alpha t + \sigma \cdot B_t + \int_0^t \int_{0 < |z| < 1} z \tilde{N}(dtdz) + \int_0^t \int_{|z| \geq 1} z N(dtdz). \quad (1.13)$$

ここで, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^d$, B_t は $(\mathcal{F}, \mathcal{B}, Q)$ 上の 0 から出発する Brown 運動, $N(dtdz)$ は $(\eta_t)_{t \geq 0}$ に付随したランダムな counting 測度, そして

$$\tilde{N}(dtdz) = N(dtdz) - dt\nu(dz).$$

さらに,

(1) 3 つの確率過程

$$(\alpha t)_{t \geq 0}, (\sigma \cdot B_t)_{t \geq 0}, \left(\int_0^t \int_{0 < |z| < 1} z \tilde{N}(dtdz) + \int_0^t \int_{|z| \geq 1} z N(dtdz) \right)_{t \geq 0}$$

は独立.

(2) $\int_{0 < |z| < 1} |z| \nu(dz) < \infty$ のとき, 4 つの確率過程

$$(\alpha t)_{t \geq 0}, (\sigma \cdot B_t)_{t \geq 0}, \left(\int_0^t \int_{0 < |z| < 1} z \tilde{N}(dtdz) \right)_{t \geq 0}, \left(\int_0^t \int_{|z| \geq 1} z N(dtdz) \right)_{t \geq 0}$$

は独立.

命題 1.12 より Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ は Brown 運動 $\sigma \cdot B_t$, 非ランダムな項 αt , 大きなジャンプ $\int_0^t \int_{|z| \geq 1} z N(dtdz)$, そして小さなジャンプ $\int_0^t \int_{0 < |z| < 1} z \tilde{N}(dtdz)$ からなることがわかる.

命題 1.13 (Lévy-Khintchine 公式) $(\eta_t)_{t \geq 0}$ が $(\mathcal{F}, \mathcal{B}, Q)$ 上の Lévy 過程ならば η_t の特性関数

$$\mathbb{E}_Q[e^{iu\eta_t}] = e^{t\psi(u)}$$

は 3 つ組み (A, β, ν) , 非負値対称行列 A , $\beta \in \mathbb{R}^d$, Lévy 測度 ν によって

$$\psi(u) = i\beta \cdot u - \frac{1}{2} u \cdot Au + \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} (e^{iuz} - 1 - iuz \mathbb{1}_{|z| < 1}) \nu(dz) \quad (1.14)$$

と表せる. 逆に 3 つ組み (A, β, ν) が与えられたとき, (1.14) を満たす Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ が存在する.

この命題から Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ と 3 つ組み (A, β, ν) を同一視することができる. $\psi(u)$ または 3 つ組み (A, β, ν) を $(\eta_t)_{t \geq 0}$ のシンボルという.

例 1.14 Intensity λ の Poisson 過程 $(N_t)_{t \geq 0}$ は常にジャンプの大きさが 1 なので, 付随する Lévy 測度は 1 に重みを持ったデルタ測度 $\nu = \lambda \delta_{\{1\}}$ になる. 対応する 3 つ組は $(0, 0, \lambda \delta_{\{1\}})$ である. もちろん, $\nu(\mathbb{R} \setminus \{0\}) = 1$ なので確率測度である.

例 1.15 d 次元 Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ のシンボルが $\psi(u) = -|u|^\alpha$, $0 < \alpha \leq 2$, のとき, $(\eta_t)_{t \geq 0}$ を α 安定過程という. 対応する 3 つ組は $(A, \beta, \nu(dy)) = (0, 0, cdy/|y|^{d+\alpha})$ になる. ここで $c > 0$ は定数.

Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ の再帰性と非再帰性についてコメントする. これはシンボル $\psi(u)$ と深い関係がある.

定義 1.16 (再帰性と非再帰性) $(\mathcal{G}, \mathcal{B}, Q)$ 上の Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ に対して, $Q(\liminf_{t \rightarrow \infty} |\eta_t| = 0) = 1$ のとき再帰的といい, $Q(\lim_{t \rightarrow \infty} |\eta_t| = \infty) = 1$ のとき非再帰的という.

Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ は必ず再帰的か非再帰的になることが知られている.

命題 1.17 (再帰性と非再帰性 1) $a > 0$ を固定する. シンボル ψ の Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ に関して次は同値.

(1) $(\eta_t)_{t \geq 0}$ は再帰的.

$$(2) \lim_{z \downarrow 0} \int_{|u| \leq a} \Re \left(\frac{1}{z - \psi(u)} \right) du = \infty.$$

$$(3) \limsup_{z \downarrow 0} \int_{|u| \leq a} \Re \left(\frac{1}{z - \psi(u)} \right) du = \infty.$$

命題 1.18 (再帰性と非再帰性 2) シンボル ψ の Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ が再帰的であるための必要十分条件は $\int_{|u| \leq a} \Re \left(\frac{1}{-\psi(u)} \right) du = \infty$ が任意の $a > 0$ で成立すること.

命題 1.18 からすぐに d 次元 α 安定過程 ($0 < \alpha \leq 2$) は $\alpha < d$ のとき非再帰的, $\alpha \geq d$ のとき再帰的であることが分かる.

Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ に対して, $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \ni U \mapsto N(t, U)$ は Poisson ランダム測度といわれるものである. また, 時刻 s までの全てのジャンプの回数を数えるランダムな counting 測度を

$$dN_s = \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} N(ds dz) \quad (1.15)$$

と定義する. このとき, もちろん時刻 t までの全てのジャンプの回数は

$$\int_0^{t+} dN_s = N((0, t], \mathbb{R}^d \setminus \{0\})$$

となる¹². さらに, $(\eta_t)_{t \geq 0}$ に付随した counting 測度 dN_s での積分は

$$\int_0^{t+} f(s, \eta_s) dN_s = \sum_{r \in (0, t], \eta_{r+} \neq \eta_{r-}} f(r, \eta_r) \quad (1.16)$$

となる. ただし (1.16) ではジャンプする時刻 r だけの和 (有限個) をとる.

Lévy 過程と正値性保存作用素の関係をのべておく.

定義 1.19 (正値性保存作用素と正値性改良作用素) $L^2(M, d\rho)$ 上の有界作用素 T が $f \geq 0$ ならば $Tf \geq 0$ となるとき T を正値性保存作用素 (positivity preserving operator) という. また $f \geq 0$ (ただし $f \not\equiv 0$) ならば $Tf > 0$ となるとき正値性改良作用素 (positivity improving operator) という.

例 1.20 $e^{t\Delta}$ は $\Pi_t(x - y)$ を積分核にもつ $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の積分作用素なので正値性改良作用素であり, $e^{t\frac{d}{dx}}$ はシフト作用素 $f \mapsto f(\cdot + t)$ なので正値性保存作用素である.

命題 1.21 (正値性保存作用素の特徴付け) $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$ でその実部が下から有界であるとす. このとき $e^{tF(-i\nabla)}$ が正値性保存作用素であることと Lévy-Kintchine 公式の 3 つ組 (A, β, ν) で

$$F(u) = i\beta \cdot u - \frac{1}{2}u \cdot Au + \int_{\mathbb{R}^d} (e^{iuz} - 1 - iuz\mathbb{1}_{|z| \leq 1})\nu(dz) \quad (1.17)$$

と表せることは同値である.

¹² $\int_0^{t+} = \int_{(0, t]}$ のこと.

1.4 Semi-martingale に対する Itô の公式

ここでは Semi-martingale に対する Itô の公式を紹介する. 確率空間 $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, Q)$ の上のフィルトレーション \mathcal{B}_t を考える. $g(t, z, w) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ が

(1) $g(t, \cdot, \cdot)$ は $(\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}_t)/\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 可測

(2) $t \mapsto g(t, z, w)$ は左連続

となるとき $(g(t, z, w))_{t \geq 0}$ は predictable という.

$$\mathbb{F} = \left\{ h = h(s, z, w) : \text{predictable} \left| \int_0^{t^+} \int_{\mathbb{R}^d} |h| N(ds dz) < \infty \text{ a.e.} \right. \right\},$$

$$\mathbb{F}^2 = \left\{ h = h(s, z, w) : \text{predictable} \left| \mathbb{E}_Q \left[\int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} |h|^2 ds \nu(dz) \right] < \infty \right. \right\},$$

$$\mathbb{F}^{2, \text{loc}} = \left\{ h = h(s, z, w) : \text{predictable} \mid \exists \tau_n : \mathcal{B}_t\text{-停止時刻 } s.t. \tau_n \uparrow \infty \text{ かつ } \mathbb{1}_{[0, \tau_n]}(t)h \in \mathbb{F}^2 \right\}$$

とおこう¹³. 次を仮定する.

(1) $f^i(t, w) \in \mathbb{R}^n$ と $g^i(t, w) \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, は \mathcal{B}_t -可測.

(2) $\mathbb{E}_Q[\int_0^t |f^i(s, \cdot)|^2 ds] < \infty$.

(3) $g^i(\cdot, w) \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ a.e. $w \in \mathcal{Y}$.

(4) $h_1^i \in \mathbb{F}$, $h_2^i \in \mathbb{F}^{2, \text{loc}}$.

このとき $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, Q)$ 上の n 次元確率過程 $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^n)$ を次で定義する.

$$X_t^i = \int_0^t f^i \cdot dB_s + \int_0^t g^i ds + \int_0^{t^+} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} h_1^i N(ds dz) + \int_0^{t^+} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} h_2^i \tilde{N}(ds dz). \quad (1.18)$$

ここで, $N(ds dz)$ は, ある Lévy 過程 $(\eta_t)_{t \geq 0}$ のランダムな counting 測度である. この X_t を Semi-martingale と呼ぶことにする. X_t に対して次の命題が成立する.

¹³ τ が \mathcal{B}_t の停止時刻とは $\{w \in \mathcal{Y} \mid \tau(w) \leq t\} \in \mathcal{B}_t$ となることである.

	dt	dB_t^i	$N(dtdz)$	$\tilde{N}(dtdz)$
dt				
dB_t^j		$\delta_{ij}dt$		
$N(dtdz)$				
$\tilde{N}(dtdz)$				$dt\nu(dz)$

図 1: Itô の公式

命題 1.22 (Semi-martingale に対する Itô の公式) $(X_t)_{t \geq 0}$ は (1.18) で与えられた Semi-martingale とする. ただし, 各点で $h_1^i h_2^j = 0, i \neq j$, と仮定する. $F \in C^2(\mathbb{R}^n)$ のとき次が成立する.

$$\begin{aligned}
& F(X_t) - F(X_0) \\
&= \sum_{i=1}^N \int_0^t F_i(X_s) f^i \cdot dB_s + \sum_{i=1}^N \int_0^t F_i(X_s) g^i ds + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_0^t F_{ij}(X_s) f^i \cdot f^j ds \\
&+ \int_0^{t+} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \nabla_{h_1} F(X_s) N(ds dz) + \int_0^{t+} \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \nabla_{h_2} F(X_s) \tilde{N}(ds dz) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d \setminus \{0\}} \nabla_{h_2}^2 F(X_s) ds \nu(dz).
\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}
F_i(X_s) &= \partial_i F(X_s), \\
F_{ij}(X_s) &= \partial_i \partial_j F(X_s), \\
\nabla_{h_j} F(X_s) &= F(X_{s-} + h_j) - F(X_{s-}), \\
\nabla_{h_2}^2 F(X_s) &= F(X_s + h_2) - F(X_s) - h_2 \cdot \nabla F(X_s).
\end{aligned}$$

連続な部分は微分, 不連続な部分は差分になっていることが分かる. X_t の生成子 L

$$LF(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{E}_W^x [F(X_t) - F(X_0)]$$

を求めるときに, 本質的に Itô の公式と $dB_s, \tilde{N}(ds dz)$ の平均がゼロ¹⁴という事実を使う. 図 1 の約束の下で形式的に

$$dF = F_i dX_t^i + \frac{1}{2} F_{ij} dX_t^i dX_t^j$$

と表せる.

¹⁴ $\mathbb{E}_Q[N(ds dz)] = ds \nu(dz)$.

補題 1.23 (積公式) $(L_t)_{t \geq 0}$ と $(M_t)_{t \geq 0}$ は 2 つの Semi-martingale とする. このとき

$$d(L_t M_t) = dL_t \cdot M_t + L_t \cdot dM_t + dL_t \cdot dM_t$$

となる.

命題 1.22 でジャンプの項がないときは $dX_t = f \cdot dB_t + gdt$ に対して,

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_{i=1}^N \int_0^t F_i(X_s) f^i \cdot dB_s + \sum_{i=1}^N \int_0^t F_i(X_s) g^i ds + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^N \int_0^t F_{ij}(X_s) f^i \cdot f^j ds$$

になる. 微分形式では

$$dF = F_i f^i \cdot dB_t + \left(F_i g^i + \frac{1}{2} F_{ij} f^i \cdot f^j \right) dt$$

と形式的に表される. いくつかの例を示す.

例 1.24 $F = e^{-\int_0^t V(B_s) ds}$ のとき $X_t = \int_0^t V(B_s) ds$ と思えば

$$dF = -e^{\int_0^t V(B_s) ds} V(B_t) dt.$$

例 1.25 $F = e^{-i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s - \int_0^t V(B_s) ds}$ のとき $X_t = -i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s - \int_0^t V(B_s) ds$ と思えば

$$dF = e^{-i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s - \int_0^t V(B_s) ds} \left(-i a(B_t) \cdot dB_t + \frac{1}{2} (-i \nabla \cdot a(B_t) - |a(B_t)|^2) dt - V(B_t) dt \right).$$

例 1.26 $X_t = (-1)^{N_t}$ とする. ここで $(N_t)_{t \geq 0}$ は Poisson 過程. このとき

$$X_t - X_0 = -2 \int_0^{t+} X_{s-} dN_s$$

になる.

例 1.27 $F = e^{\int_0^{t+} W(B_s) dN_s}$ のとき

$$dF = e^{\int_0^{t+} W(B_s) dN_s} - 1 = \int_0^t e^{\int_0^{r+} W(B_s) dN_s} (e^{W(B_r)} - 1) dN_r \quad (1.19)$$

となる.

2 Feynman-Kac 公式

この章で Feynman-Kac 公式の概略を述べて Itô の公式に慣れることを目標とする。詳しい条件, 定理などは第 3 節でのべる。

2.1 Schrödinger 作用素と Feynman-Kac 公式

自己共役で下から有界な Schrödinger 作用素

$$H_p = -\frac{1}{2}\Delta + V \quad (2.1)$$

の生成する熱半群 e^{-tH_p} を Brown 運動 $(B_t)_{t \geq 0}$ で表すのがいわゆる Feynman-Kac の公式である。以降, 定義域の議論を避けるために何も言及しないときは $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ と仮定する。Schrödinger 作用素 H_p の生成する熱半群の期待値 $(f, e^{-tH_p}g)$ は次の Feynman-Kac の公式で与えられる。

$$(f, e^{-tH_p}g) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_0)} g(B_t) e^{-\int_0^t V(B_s) ds} \right].$$

証明の方法はいろいろ知られている。Itô の公式を使って証明するのが手早いですが, トロツタ積公式を使った証明は例えば無限自由度系などへの応用範囲が広い。

命題 2.1 (トロツタ積公式) A, B をヒルベルト空間 \mathcal{H} 上の正の自己共役作用素とする。 $A+B$ が $D(A) \cap D(B)$ 上で本質的に自己共役であると仮定する。このとき $C = \overline{A+B|_{D(A) \cap D(B)}}$ とすると,

$$s - \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-(t/n)A} e^{-(t/n)B})^n = e^{-tC}.$$

命題 2.2 (Feynman-Kac 公式) V は下から有界で, $-\frac{1}{2}\Delta$ に相対有界¹⁵で

$$\|Vf\| \leq a\|-\frac{1}{2}\Delta f\| + b\|f\|, \quad 0 \leq a < 1, \quad 0 \leq b$$

と仮定する。このとき

$$(f, e^{-tH_p}g) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_0)} g(B_t) e^{-\int_0^t V(B_s) ds} \right] \quad (2.2)$$

¹⁵一般に $D(T) \supset D(S)$ で $\|Tf\| \leq a\|Sf\| + b\|f\|$ が任意の $f \in D(S)$ で成り立つとき, T は S に相対有界という。また上式を満たす a の下限を相対閾値ということにする。

証明: H_p は $D(-\Delta/2) \cap D(V) = D(-\Delta/2)$ 上で自己共役なので, 命題 2.1 のトロツタ積公式から

$$\begin{aligned} (f, e^{-tH_p}g) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f, (e^{-\frac{t}{n}(-\frac{1}{2}\Delta)} e^{-\frac{t}{n}V})^n g \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_0)} g(B_t) e^{-\sum_{j=1}^n (t/n)V(B_{jt/n})} \right] = (2.2) \end{aligned}$$

のようにして Feynman-Kac 公式が示せる. □

Itô の公式による命題 2.2 の別証明.

$$T_t g(x) = \mathbb{E}_W^x [g(B_t) e^{-\int_0^t V(B_r) dr}]$$

と定める. V は下から有界なので $\sup_x \mathbb{E}_W^x [e^{-\int_0^t V(B_r) dr}] < \infty$ に注意. このとき $\|T_t g\| \leq c \|g\|$ となる. ここで c は t に依らない定数である. よって $T_t : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ は有界作用素になる. 次に T_t が C_0 半群¹⁶ であることを示そう. $T_0 = \mathbb{1}$ は自明. $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき

$$\begin{aligned} (f, T_t T_s g) &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \bar{f}(x) \mathbb{E}_W^x [(T_s g)(B_t) e^{-\int_0^t V(B_r) dr}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \bar{f}(x) \mathbb{E}_W^x [\mathbb{E}_W^{B_t} [e^{-\int_0^s V(B_{r'}) dr'} g(B_s)] e^{-\int_0^t V(B_r) dr}]. \end{aligned}$$

Brown 運動の Markov 性から

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \bar{f}(x) \mathbb{E}_W^x [\mathbb{E}^x [e^{-\int_t^{t+s} V(B_{r'}) dr'} | \mathcal{F}_t] e^{-\int_0^t V(B_r) dr}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \bar{f}(x) \mathbb{E}_W^x [e^{-\int_0^{t+s} V(B_{r'}) dr'}] \\ &= (f, T_{s+t} g) \end{aligned}$$

が従う. これは任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ まで拡大できるから $T_s T_t g = T_{s+t} g$ が従う. 次に $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow 0} (f, T_t g) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \bar{f}(x) \mathbb{E}_W^x [g(B_t) e^{-\int_0^t V(B_r) dr}] = (f, g)$$

が簡単に示せる. 近似して $\lim_{t \rightarrow 0} (f, T_t g) = (f, g)$ が任意の $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ で示せる. この弱収束は強収束を意味するから, $\lim_{t \rightarrow 0} T_t = \mathbb{1}$ がわかる. 半群性と $\|T_t\| \leq c$ から $t \mapsto T_t$ の強連続性が

¹⁶ S_t が C_0 半群とは $S_0 = \mathbb{1}$, $S_s S_t = S_{s+t}$ かつ $t \mapsto S_t$ が強連続.

わかる. 次に T_t が対称であることをみる. $\tilde{B}_s = B_{t-s} - B_t$ とすれば $\tilde{B}_t \stackrel{d}{=} B_t$ なので¹⁷,

$$\begin{aligned} (f, T_t g) &= \mathbb{E}_W^0 \left[\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) e^{-\int_0^t V(\tilde{B}_r+x) dr} g(\tilde{B}_t + x) dx \right] \\ &= \mathbb{E}_W^0 \left[\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(y - \tilde{B}_t) e^{-\int_0^t V(\tilde{B}_s - \tilde{B}_r + y) dr} g(y) dy \right] \\ &= \mathbb{E}_W^0 \left[\int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(y + B_t) e^{-\int_0^t V(B_{t-s} + y) dr} g(y) dy \right] \\ &= (T_t f, g) \end{aligned}$$

となるから対称性が示された. よって次の Stone の定理から $T_t = e^{-tK}$, $t \geq 0$, となる自己共役作用素 K が存在することがわかる. この K を求めよう. $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする. Itô の公式より

$$\begin{aligned} T_t g(x) - g(x) &= \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\int_0^t V(B_r) dr} g(B_t) - g(x) \right] \\ &= \mathbb{E}_W^x \left[\int_0^t e^{-\int_0^s V(B_r) dr} (-V(B_s)g(B_s) + \frac{1}{2}\Delta g(B_s)) ds \right] + \mathbb{E}_W^x \left[\int_0^t e^{-\int_0^s V(B_r) dr} \nabla g(B_s) dB_s \right] \end{aligned}$$

なので

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}(f, (T_t - \mathbb{1})g) &= \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}^d} \bar{f}(x) \mathbb{E}_W^x \left[\int_0^t e^{-\int_0^s V(B_r) dr} (-V(B_s)g(B_s) + \frac{1}{2}\Delta g(B_s)) ds \right] dx \\ &\rightarrow (f, -H_p g)(t \rightarrow 0). \end{aligned}$$

$C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は H_p の芯なので, $K = H_p$ が示せた. □

命題 2.3 (Stone の定理) $S_t, t \geq 0$, が対称な C_0 半群ならば, 下から有界な自己共役作用素 A が存在して $S_t = e^{-tA}$ と表せる.

証明: [LHB11, Proposition 3.26]. □

(2.2) の表示から熱半群 e^{-tH_p} の性質や, また H_p のスペクトルなど様々なことが分かる. 一度, 経路積分表示が出来てしまえば, 逆に (2.2) の右辺が有界になるような V のクラスを設定し, (2.2) の右辺から決まる対称な C_0 半群の自己共役な生成子として H_p を定義することも出来る. そのような V の例として Kato クラスや Stummel クラスなどがよく知られている.

¹⁷ $Z \stackrel{d}{=} Y$ は Z と Y が同分布をもつことを意味する.

Schrödinger 方程式の固有値問題を考える.

$$H_p \Phi = E_p \Phi$$

としよう. このとき $x \in \mathbb{R}^d$ を固定した確率過程

$$X_t(x) = e^{tE_p} e^{-\int_0^t V(B_r+x)dr} \Phi(B_t + x), \quad t \geq 0$$

を定義することができる. $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ を Brown 運動 $(B_t)_{t \geq 0}$ の自然なフィルトレーションとする.

命題 2.4 (Martingale 性) $(X_t(x))_{t \geq 0}$ は $(\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0}$ に関して Martingale になる. つまり

$$\mathbb{E}_W^0[X_t(x)|\mathcal{F}_s^B] = X_s(x), \quad s \leq t.$$

証明: $(B_t)_{t \geq 0}$ の Markov 性から

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_W^0[X_t(x)|\mathcal{F}_s^B] &= e^{tE} e^{-\int_0^s V(B_r+x)dr} \mathbb{E}_W^0[e^{-\int_s^t V(B_r+x)dr} \Phi(B_t + x)|\mathcal{F}_s^B] \\ &= e^{tE} e^{-\int_0^s V(B_r+x)dr} \mathbb{E}_W^{B_s} [e^{-\int_0^{t-s} V(B_r+x)dr} \Phi(B_{t-s} + x)] \\ &= e^{sE} e^{-\int_0^s V(B_r+x)dr} \Phi(B_s + x) = X_s(x) \end{aligned}$$

となる. □

一般に停止時刻 τ に対して $(X_{t \wedge \tau})_{t \geq 0}$ も Martingale になるから,

$$\mathbb{E}_W^0[X_{t \wedge \tau}(x)] = \mathbb{E}_W^0[X_0(x)] = \Phi(x)$$

が従う. よって $|\Phi(x)| \leq \mathbb{E}_W^0[e^{-\int_0^{t \wedge \tau} (V(B_s) - E)ds}] \|\Phi\|_\infty$ と評価できる. この評価は, 例えば $\Phi(x)$ の減衰の様子を調べるときに有用になる. 第 11.1 節を見よ.

2.2 ベクトルポテンシャルと Feynman-Kac-Itô 公式

次元を $d = 3$ としよう. ベクトルポテンシャル a とミニマル結合した Hamiltonian の経路積分表示を構成しよう. $a = (a_1, a_2, a_3)$, $a_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, をベクトルポテンシャルとする. a_j はもちろん \mathbb{R} 値である. $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の作用素¹⁸

$$H(a, V) = \frac{1}{2}(p - a)^2 + V \tag{2.3}$$

は $D(-\Delta)$ 上で自己共役になる.

¹⁸ $p = (-i\partial_{x_1}, -i\partial_{x_2}, -i\partial_{x_3})$.

命題 2.5 (Feynman-Kac-Itô 公式) $a = (a_1, a_2, a_3)$, $a_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき

$$(f, e^{-tH(a,V)}g) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_0)} g(B_t) e^{-\int_0^t V(B_s) ds} e^{-i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s} \right]. \quad (2.4)$$

証明: Feynman-Kac 公式の別証明と同様の方法で示す.

$$Z_t = e^{X_t}, \quad X_t = -i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s - \int_0^t V(B_s) ds$$

とおき

$$(Q_t f)(x) = \mathbb{E}_W^x [Z_t f(B_t)]$$

とする. Q_t が対称な C_0 半群になることを示す. すぐに $Q_t \rightarrow \mathbb{1}(t \rightarrow 0)$ は分かる. また, $x \in \mathbb{R}^d$ ごとに

$$\begin{aligned} Q_s Q_t f(x) &= \mathbb{E}_W^x \left[e^{-i \int_0^s a(B_r) \circ dB_r} \mathbb{E}^{B_s} [f(B_t) e^{-i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s}] \right] \\ &= \mathbb{E}_W^x \left[e^{-i \int_0^s a(B_r) \circ dB_r} \mathbb{E}_W^x [f(B_{s+t}) e^{-i \int_s^{s+t} a(B_r) \circ dB_r} | \mathcal{F}_s^B] \right] \\ &= Q_{s+t} f(x). \end{aligned}$$

これは命題 2.2 の別証明と同様に L^2 空間上の等式として示すことができる. よって半群性が示せた. 次に対称性を示す. $\tilde{B}_s = B_{t-s} - B_t$ とすれば $B_t \stackrel{d}{=} \tilde{B}_t$ なので

$$\begin{aligned} (f, Q_t g) &= \int_{\mathbb{R}^3} dx \overline{f(x)} \mathbb{E}_W^x \left[e^{-i \int_0^t a(\tilde{B}_s) \circ d\tilde{B}_s} e^{-\int_0^t V(\tilde{B}_s)} g(\tilde{B}_t) \right] \\ &= \mathbb{E}^0 \left[\int_{\mathbb{R}^3} dx \overline{f(x)} e^{-i \int_0^t a(x + \tilde{B}_s) \circ d\tilde{B}_s} e^{-\int_0^t V(x + \tilde{B}_s)} g(x + \tilde{B}_t) \right]. \end{aligned}$$

簡単のために

$$I_j = \frac{1}{2} \left(a(x + \tilde{B}_{tj/n}) + a(x + \tilde{B}_{t(j-1)/n}) \right) (\tilde{B}_{tj/n} - \tilde{B}_{t(j-1)/n})$$

とおく. このとき $\sum_{j=1}^n I_j \rightarrow \int_0^t a(x + \tilde{B}_s) \circ d\tilde{B}_s$ ($n \rightarrow \infty$) が $L^2(\Omega)$ で成り立つ. ある部分列 $(\sum_{j=1}^{n'} I_j)_{n'}$ は $\int_0^t a(x + \tilde{B}_s) \circ d\tilde{B}_s$ に a.s. に収束する. 改めて n' を n とかく. x を $y - \tilde{B}_t$ に変数変換すれば,

$$(f, Q_t g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}_W^0 \left[\int_{\mathbb{R}^3} dy \overline{f(y - \tilde{B}_t)} e^{-i \sum_{j=1}^n \tilde{I}_j} e^{-\int_0^t V(y - \tilde{B}_t - \tilde{B}_s)} g(y) \right].$$

ここで

$$\tilde{I}_j = \frac{1}{2} \left(a(y - \tilde{B}_t + \tilde{B}_{jt/n}) + a(y - \tilde{B}_t + \tilde{B}_{t(j-1)/n}) \right) (\tilde{B}_{tj/n} - \tilde{B}_{t(j-1)/n}).$$

そうすると $L^2(\Omega)$ の位相で

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \tilde{I}_j = - \int_0^t a(y + B_s) \circ dB_s$$

となる. これは

$$(f, Q_t g) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_t) e^{-i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s} e^{-\int_0^t V(B_s) ds}} \right] g(x) = (Q_t f, g) \quad (2.5)$$

を意味する. よって Q_t は対称である. その結果 Q_t は, 対称な C_0 半群になるから $Q_t = e^{-tK}$ となる自己共役作用素 K が一意的存在する. K を求めよう.

$$dX_t = -ia \cdot dB_t - \frac{i}{2} (\nabla \cdot a) dt - V dt$$

なので

$$dZ_t = Z_t dX_t + \frac{1}{2} Z_t (dX_t)^2 = Z_t \left(-\frac{i}{2} (\nabla \cdot a) - \frac{1}{2} a \cdot a - V \right) dt + Z_t (-ia) \cdot dB_t$$

が Itô の公式から従う. $Y_t = f(B_t)$ とおく. $dY_t = (1/2) \Delta f dt + \nabla f \cdot dB_t$ と積公式から

$$\begin{aligned} d(Z_t Y_t) &= Z_t \left(-\frac{i}{2} (\nabla \cdot a) dt - \frac{1}{2} (a \cdot a) dt + (-ia) \cdot dB_t - V dt \right) Y_t \\ &\quad + Z_t \left(\frac{1}{2} \Delta f dt + \nabla f \cdot dB_t \right) + Z_t (-ia) \cdot \nabla f dt \\ &= -H(a, V) f Z_t dt + Z_t (\nabla f + (-ia) f) \cdot dB_t \end{aligned}$$

が得られる. よって

$$(Q_t f)(x) - f(x) = \int_0^t (Q_s H(a, V) f)(x) ds.$$

これから L^2 の意味で

$$\text{s-lim}_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (Q_t f - f) = -H(a, V) f$$

となることが Feynman-Kac 公式の別証明と同様に示せるから $K = H(a, V)$. \square

これは Feynman-Kac-Itô の公式といわれている. (2.4) はかなり広いクラスの (a, V) まで拡張できる. 詳しくは第3節を見よ.

注意 2.6 (1) Feynman-Kac-Itô 公式では被積分関数に $e^{-i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s}$ が現れ, 作用素 $e^{-tH(a,V)}$ の自己共役性に反するような印象を受ける. しかし, $e^{-i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s} \rightarrow e^{-\int_0^t a(B_s) \circ dB_s}$ としてしまうと, S_t の対称性がこわれる. これは, $(p - A)^2 = (-i\nabla - A)^2 = -(\nabla - iA)^2$ とみれば理解できる.

(2) e^{-tH_p} と全く同様にして, $e^{-tH(a,V)}$ の積分核は形式的には

$$e^{-tH(a,V)}(x, y) = \Pi_t(x - y) \mathbb{E}_W^x \left[e^{-i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s - \int_0^t V(B_s) ds} \Big| B_t = y \right]$$

で与えられる. 特に $|e^{-tH(a,V)}(x, y)| \leq e^{-tH_p}(x, y)$ が各点ごとに成立していることがわかる.

2.3 スピン 1/2 と spin-Feynman-Kac-Itô 公式

$H(a, V)$ にスピン 1/2 を導入しよう. 2×2 パウリ行列を

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

とし, $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ とおく. パウリ行列は

$$\sigma_\mu \sigma_\nu = i \sum_{\lambda=1}^3 \epsilon^{\lambda\mu\nu} \sigma_\lambda$$

を満たす. ここで, $\epsilon^{\lambda\mu\nu}$ は反対称な Levi-Civita テンソルで $\epsilon^{123} = 1$ である. σ_μ は対称でトレース=0の行列であり, 反正準交換関係

$$\sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2\delta_{ij} I_2$$

を満たす. $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$ 上の作用素 $H_S(a, V)$ を

$$H_S(a, V) = \frac{1}{2}(\sigma \cdot (p - a))^2 + V = H(a, V) - \frac{1}{2}\sigma \cdot b \quad (2.6)$$

で定義する. ここで $b = \nabla \times a$ である. $H_S(a, V)$ も $D(-\Delta)$ 上で自己共役である.

さて, Lévy 過程で $e^{-tH_S(a,V)}$ の経路積分表示を構成しよう. そのためにスピン変数 θ を導入しよう. 2次加法群を

$$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{-1, +1\}$$

とおく.

$$\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2) \ni f(x) = \begin{bmatrix} f(x, +1) \\ f(x, -1) \end{bmatrix} \mapsto f(x, \theta) \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2) \quad (2.7)$$

の対応関係で,

$$L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2) \cong L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2) \quad (2.8)$$

とみなす. $H_S(a, V)$ を行列で表示すれば

$$H_S(a, V) = \begin{pmatrix} H(a, V) - \frac{1}{2}b_3 & -\frac{1}{2}(b_1 - ib_2) \\ -\frac{1}{2}(b_1 + ib_2) & H(a, V) + \frac{1}{2}b_3 \end{pmatrix}$$

なので, $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ 上では

$$(H_S(a, V)f)(\theta) = \left(H(a, V) - \frac{1}{2}\theta b_3 \right) f(\theta) - \frac{1}{2}(b_1 + i(-\theta)b_2)f(-\theta), \quad \theta \in \mathbb{Z}_2, \quad (2.9)$$

となる. そこで, (2.9) を $H_S(a, V)$ の定義として $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ 上の自己共役作用素とみなす. \mathbb{C}^2 -値 L^2 関数上の作用素が \mathbb{C} -値 L^2 関数上の作用素に見直せたことになる. さらに, スピンの部分はかけ算作用素と見なすことができる. これはありがたい.

さて, $(N_t)_{t \geq 0}$ を $(\Omega_\mu, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ 上の intensity 1 の Poisson 過程とする.

$$\theta_{N_t} : \mathbb{Z}_2 \times \Omega_\mu \rightarrow \mathbb{Z}_2, \quad (\theta, w) \mapsto \theta \times (-1)^{N_t(w)}$$

と定義する. 直積確率空間 $(\Omega \times \Omega_\mu, \mathcal{F} \times \mathcal{F}_\mu, W^x \otimes \mu)$ 上の $(x, (-1)^\alpha) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2$ から出発する $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2$ -値確率過程を

$$\xi = (\xi_t)_{t \geq 0} = (B_t, \theta_{N_t+\alpha})_{t \geq 0}$$

で定義する. $\mathbb{E}_{W^x \times \mu}^{x, \alpha}[f(\xi)] = \int_{\Omega \times \Omega_\mu} f(\xi) dW^x \times d\nu$ とおく.

命題 2.7 (Spin-Feynman-Kac-Itô 公式)

$$\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^3} \Pi_s(x-y) \left| \log \frac{1}{2} \sqrt{b_1(y)^2 + b_2(y)^2} \right| dy < \infty \quad (2.10)$$

と仮定する. $f, g \in L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ に対して, 次が成立する.

$$(f, e^{-tH_S(a, V)}g) = e^t \sum_{\alpha=1,2} \int dx \mathbb{E}_{W^x \times \mu}^{x, \alpha} \left[\overline{f(\xi_0)} g(\xi_t) e^{Z_t} \right]. \quad (2.11)$$

ここで

$$\begin{aligned} Z_t &= - \int_0^t \left(V(B_s) - \frac{1}{2} b_3(B_s) \theta_{N_s} \right) ds - i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s + \int_0^{t+} W(B_s, -\theta_{N_{s-}}) dN_s, \\ W(x, -\theta) &= \log \left(\frac{1}{2} (b_1(x) + i(-\theta)b_2(x)) \right). \end{aligned} \quad (2.12)$$

そして $\int_0^{t+} \dots dN_s$ は Poisson 過程 $(N_t)_{t \geq 0}$ に付随した counting 測度による積分である.

証明: (2.10) は $|\mathbb{E}_{W \times \mu}^{x, \alpha} [\int_0^{t+} W(B_s, -\theta_{N_s}) dN_s]| < \infty$ を保証する.

$$S_t g(x, \theta) = \mathbb{E}_{W \times \mu}^{x, \alpha} [e^{Z_t} g(\xi_t)]$$

とする. S_t は対称な C_0 半群になることは補題 4.10 で一般的な場合で示す. よって下から有界な自己共役作用素 K が存在して $S_t = e^{-tK}$ とかける. 以下で Itô の公式をつかって $K = H_S(a, V) + 1$ を示そう. Itô の公式より

$$\theta_{N_t} - \theta_{N_0} = \int_0^{t+} -2\theta_{N_{s-}} dN_s \quad (2.13)$$

に注意する. $U(x, \theta) = -(1/2)b_3(x)\theta$ とおく. 再度 Itô の公式と (2.13) から

$$\begin{aligned} g(\xi_t) - g(\xi_0) &= g(B_t, \theta_{N_t}) - g(x, \theta_{N_0}) \\ &= \int_0^t \nabla g(B_s, \theta_{N_s}) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta g(B_s, \theta_{N_s}) ds + \int_0^{t+} (g(B_s, -\theta_{N_{s-}}) - g(B_s, \theta_{N_{s-}})) dN_s, \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} e^{Z_t} - 1 &= \int_0^t e^{Z_s} (-ia(B_s)) \circ dB_s + \int_0^t e^{Z_s} (-V(B_s)) ds + \frac{1}{2} \int_0^t e^{Z_s} (-ia(B_s))^2 ds \\ &+ \int_0^t e^{Z_s} \frac{1}{2} (-i\nabla \cdot a)(B_s) ds + \int_0^t e^{Z_s} (-U(B_s, \theta_{N_s})) ds + \int_0^{t+} \left(e^{Z_{s-} + W(B_s, -\theta_{N_{s-}})} - e^{Z_{s-}} \right) dN_s \end{aligned}$$

が従う. これより

$$\begin{aligned}
& e^{Z_t} g(B_t, \theta_{N_t}) - g(x, \theta_0) \\
&= \underbrace{\int_0^t e^{Z_s} \left(\frac{1}{2} \Delta - ia(B_s) \cdot \nabla + \frac{1}{2} (-i \nabla \cdot a)(B_s) - \frac{1}{2} a(B_s)^2 - V(B_s) \right) g(B_s, \theta_{N_s}) ds}_{\text{スピンのない部分}} \\
&+ \underbrace{\int_0^t e^{Z_s} (\nabla g(B_s, \theta_{N_s}) - ia(B_s) g(B_s, \theta_{N_s})) \cdot dB_s}_{\text{Martingale の部分}} + \underbrace{\int_0^t e^{Z_s} (-U(B_s, \theta_{N_s})) g(B_s, \theta_{N_s}) ds}_{\text{スピンの対角成分}} \\
&+ \underbrace{\int_0^{t+} e^{Z_{s-}} \left(g(B_s, -\theta_{N_{s-}}) e^{W(B_s, -\theta_{N_{s-}})} - g(B_s, \theta_{N_{s-}}) \right) dN_s}_{\text{スピンの非対角成分}}.
\end{aligned}$$

両辺の期待値をとれば $\mathbb{E}_{W \times \mu}^{x, \alpha} [e^{Z_t} g(B_t, \theta_{N_t}) - g(x, \theta_0)] = \int_0^t \mathbb{E}_{W \times \mu}^{x, \alpha} [G(s)] ds$. ここで

$$\begin{aligned}
G(s) &= e^{Z_s} \left[\frac{1}{2} \Delta g(B_s, \theta_{N_s}) - ia(B_s) \cdot (\nabla g)(B_s, \theta_{N_s}) \right. \\
&\quad \left. + \left(-\frac{1}{2} a(B_s)^2 - V(B_s) + \frac{1}{2} (-i \nabla \cdot a)(B_s) - U(B_s, \theta_{N_s}) \right) g(B_s, \theta_{N_s}) \right] \\
&\quad + e^{Z_{s-}} \left(g(B_s, -\theta_{N_{s-}}) e^{W(B_s, -\theta_{N_{s-}})} - g(B_s, \theta_{N_{s-}}) \right), \quad s > 0.
\end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned}
G(0) &= \left(\frac{1}{2} \Delta - ia \cdot \nabla - \frac{1}{2} (i \nabla \cdot a) - \frac{1}{2} a^2 - V - U(\cdot, \theta) - \mathbb{1} + e^{W(\cdot, -\theta)} \right) g(x, \theta) \\
&= -(H_S(a, V) + \mathbb{1}) g(x, \theta).
\end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned}
\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f, (S_t - \mathbb{1})g) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \int_0^t ds \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} dx \overline{f(x, \theta_\alpha)} \mathbb{E}^{x, \alpha} [G(s)] \\
&= \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} dx \bar{f}(x, \theta_\alpha) \mathbb{E}^{x, \alpha} [G(0)] \\
&= (f, -(H_S(a, V) + \mathbb{1})g).
\end{aligned}$$

となるから $K = H_S(a, V) + \mathbb{1}$ となる.

注意 2.8 経路積分表示 (2.12) に \log が現れる直感的な理由は, 例えば

$$e^{-\int_0^t V(B_s)ds} - 1 = \int_0^t e^{-\int_0^r V(B_s)ds} (-V(B_r))dr$$

の公式から $-(1/2)\Delta + V$ の生成される熱半群の経路積分表示 (2.2) が得られる.

$$e^{\int_0^{t+} W(B_s, -\theta_{N_{s-}})dN_s} - 1 = \int_0^t e^{\int_0^{r+} W(B_s, -\theta_{N_{s-}})dN_s} (e^{W(B_r, -\theta_{N_{r-}})} - 1)dN_r \quad (2.14)$$

から非対角成分が $-e^{W(x, -\theta)} + 1$ という形の経路積分表示ができそうだ. 実際 $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ 上の掛け算作用素である非対角成分 $-(1/2)(b_1 + i(-\theta)b_2)$ を強引に $-e^{\log[(1/2)(b_1 + i(-\theta)b_2)]}$ と表して得たのが命題 2.7 である. また $+1$ は spin-Feynman-Kac-Itô 公式に現れる e^t と相殺する.

2.4 スペクトルゼータ関数

測度 W^x の下で $B_0 = x$ a.s. だから,

$$(e^{-tH_p}g)(x) = \mathbb{E}_W^x[g(B_t)e^{-\int_0^t V(B_s)ds}]$$

が従う. これから, 部分シグマ代数 $\sigma(B_t)$ で条件付き期待値をとれば

$$(e^{-tH_p}g)(x) = \mathbb{E}_W^0 \left[\mathbb{E}_W^0 [g(B_t + x)e^{-\int_0^t V(B_s+x)ds} | \sigma(B_t)] \right]$$

になる. $\mathbb{E}_W^0 [g(B_t + x)e^{-\int_0^t V(B_s+x)ds} | \sigma(B_t)]$ は, $\sigma(B_t)$ -可測なので B_t と, 適当なボレル可測関数 $G: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ の合成関数として表せる¹⁹. よって

$$G(B_t) = \mathbb{E}_W^0 [g(B_t + x)e^{-\int_0^t V(B_s+x)ds} | \sigma(B_t)]$$

となる. この G を $\text{Ran}B_t$ に制限した関数を

$$G(y) = \mathbb{E}_W^0 [g(B_t + x)e^{-\int_0^t V(B_s+x)ds} | B_t = y]$$

¹⁹ X, Y, Z を可測空間とする. $f: X \rightarrow Y, g: X \rightarrow Z$ が可測関数で, さらに f が $\sigma(g)$ -可測であるとする. このとき可測関数 $h: Z \rightarrow Y$ で $f = h \circ g$ となるものが存在する.

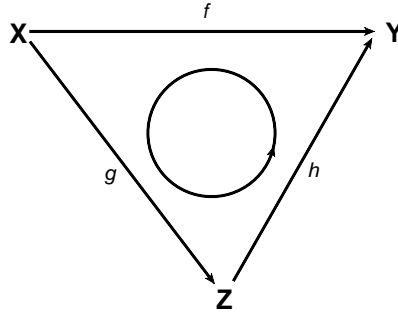


図 2: f が $\sigma(g)$ 可測ならば $f = h \circ g$

と表す. そうすると B_t の分布関数 $\Pi_t(y)$ を使って

$$\begin{aligned}
 (e^{-tH_p}g)(x) &= \mathbb{E}_W^0[G(B_t)] = \int_{\mathbb{R}^d} \Pi_t(y)G(y)dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \Pi_t(y)g(y+x)\mathbb{E}_W^0\left[e^{-\int_0^t V(B_s+x)ds} \mid B_t = y\right] dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \Pi_t(y-x)\mathbb{E}_W^0\left[e^{-\int_0^t V(B_s+x)ds} \mid B_t = y-x\right] g(y)dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \Pi_t(y-x)\mathbb{E}_W^x\left[e^{-\int_0^t V(B_s)ds} \mid B_t = y\right] g(y)dy
 \end{aligned}$$

となるので, e^{-tH_p} の積分核は形式的に

$$e^{-tH_p}(x, y) = \Pi_t(y-x)\mathbb{E}_W^x[e^{-\int_0^t V(B_s)ds} \mid B_t = y] \quad (2.15)$$

と表されることがわかる. $\mathbb{E}_W^x[e^{-\int_0^t V(B_s)ds} \mid B_t = y]$ は形式的に時刻 0 で x , 時刻 t で y にいる Brown 運動で条件付けた確率変数と見なすこともでき, $\mathbb{E}_W[e^{-\int_0^t V(B_s)ds} \mid B_0 = x, B_t = y]$ と表記する場合もある. さらに

$$\text{Tr}e^{-tH_p} = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-tH_p}(x, x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \Pi_t(0)\mathbb{E}_W^x[e^{-\int_0^t V(B_s)ds} \mid B_t = x]dx$$

となる. $\sigma(H_p) = \{E_n\}_{n=1}^\infty$ とすれば, そのスペクトルゼータ関数

$$\zeta_{H_p}(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{E_n^s}$$

は Brown 運動を使って次のように表すことができる.

$$\begin{aligned}\zeta_{H_p}(s) &= \text{Tr} H_p^{-s} \\ &= \text{Tr} \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty t^{s-1} e^{-tH_p} dt \right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_0^\infty t^{s-1-d/2} dt \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_W^x [e^{-\int_0^t V(B_r) dr} | B_t = x] dx.\end{aligned}$$

ここで $\Gamma(s)$ はガンマ関数である. 特に,

$$H_{\text{osc}} = -\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$$

のスペクトルは $\sigma(H_{\text{osc}}) = \mathbb{N}$ なのでリーマンゼータ関数は

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty t^{s-3/2} e^{-t/2} dt \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_W^x [e^{-\frac{1}{2} \int_0^t |B_r|^2 dr} | B_t = x] dx$$

となり, 例えば特殊値 $\zeta(2)$ は

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_0^\infty t^{1/2} e^{-t/2} dt \int_{\mathbb{R}} \mathbb{E}_W^x [e^{-\frac{1}{2} \int_0^t |B_r|^2 dr} | B_t = x] dx$$

と表すことができる.

3 経路積分表示

前章で述べた概略を一般化し厳密に述べることにする.

3.1 Bernstein 関数と subordinator

Non-local な作用素である相対論的 Schrödinger 作用素

$$\sqrt{(\sigma \cdot (p - a))^2 + m^2} - m + V \tag{3.1}$$

の経路積分表示を構成したい. (3.1) は $h_2(a) = \frac{1}{2}(\sigma \cdot (p - a))^2$ をもちいて

$$\sqrt{2h_2(a) + m^2} - m + V$$

と表せることに注意しよう. ここで関数 $u \mapsto f(u) = \sqrt{2u + m^2} - m$ は

- (1) $f \in C^\infty((0, \infty))$,
- (2) $f(u) \geq 0$,
- (3) $(-1)^n \frac{d^n f}{du^n}(x) \leq 0, n \geq 1$,

を満たすことは容易に確かめられる. 一般に上記 (1) - (3) を満たす関数 f を Bernstein 関数という. Ψ を任意の Bernstein 関数として次のような自己共役作用素が生成する熱半群の経路積分表示を構成することを考える.

$$\Psi \left(\frac{1}{2}(\sigma \cdot (p - a))^2 \right) + V. \quad (3.2)$$

もちろん相対論的 Schrödinger 作用素も含んでいる. 正確に Bernstein 関数の定義をあたえる.

定義 3.1 (Bernstein 関数と \mathcal{B}_0)

$$\mathcal{B} = \left\{ f \in C^\infty((0, \infty)) \mid f(x) \geq 0, (-1)^n \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right) (x) \leq 0, \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

とする. \mathcal{B} に含まれる関数を Bernstein 関数という. 部分集合 \mathcal{B}_0 を次で定める.

$$\mathcal{B}_0 = \left\{ f \in \mathcal{B} \mid \lim_{u \rightarrow 0^+} f(u) = 0 \right\}.$$

Bernstein 関数は正の単調増加関数で上に凸な関数 (concave) である. \mathcal{B}_0 の典型的な例は

- (a) $\Psi(u) = cu^\alpha, c \geq 0, \alpha \in (0, 1]$,
- (b) $\Psi(u) = 1 - e^{-au}, a \geq 0$.

特に $\Psi(u) = 1 - e^{-au}$ は本質的である. \mathcal{L} を $\mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ 上の測度 λ で次を満たすもの全体とする.

$$(1) \lambda((-\infty, 0)) = 0, \quad (2) \int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (y \wedge 1) \lambda(dy) < \infty.$$

$\lambda \in \mathcal{L}$ は $\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} (y^2 \wedge 1) \lambda(dy) < \infty$ を満たすので Lévy 測度的一种である.

命題 3.2 (Bernstein 関数の特徴付け) Bernstein 関数 $\Psi \in \mathcal{B}_0$ に対して, $(b, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L}$ で

$$\Psi(u) = bu + \int_0^\infty (1 - e^{-uy}) \lambda(dy) \quad (3.3)$$

を満たすものが存在する. 逆に, 任意の $(b, \lambda) \in \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L}$ に対して (3.3) の右辺は \mathcal{B}_0 に含まれる関数になる.

例 3.3 例えば $\Psi(u) = u^\alpha$, $0 < \alpha < 1$ は Bernstein 関数であり, 次のように表示できる.

$$u^\alpha = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty (1 - e^{-uy}) y^{-1-\alpha} dy.$$

つまり, u^α に対応する Lévy 測度は $\lambda(dy) = \frac{\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} y^{-1-\alpha} dy$ になる.

定義 3.4 (Subordinator) 確率空間 $(\Omega_\nu, \mathcal{F}_\nu, \nu)$ 上の確率過程 $(T_t)_{t \geq 0}$ が次を満たすとき subordinator とよばれる.

- (1) $(T_t)_{t \geq 0}$ は ゼロから出発する 1 次元 Lévy 過程.
- (2) $t \mapsto T_t$ は非減少 a.s.

Subordinator はもちろん Lévy 過程なので Markov 過程でもある. \mathcal{S} を subordinator 全体の集合とする. 次の命題は基本的である.

命題 3.5 (Subordinator の特徴付け) $(\Omega_\nu, \mathcal{F}_\nu, \nu)$ を確率空間とし, $\Psi \in \mathcal{B}_0$ とする. このとき $(T_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{S}$ で次を満たすものが一意に存在する.

$$\mathbb{E}_\nu[e^{-uT_t}] = e^{-t\Psi(u)}. \quad (3.4)$$

逆に $(T_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{S}$ としよう. このとき $\Psi \in \mathcal{B}_0$ で (3.4) を満たすものが存在する.

命題 3.2, 3.5 から次が従う.

命題 3.6 $\mathcal{S}, \mathcal{B}_0, \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L}$ は, お互いに同一視することができる.

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &\iff \mathcal{B}_0 \iff \mathbb{R}_+ \times \mathcal{L} \\ (T_t)_{t \geq 0} &\iff \Psi \iff (b, \lambda) \end{aligned}$$

記号 $T_t^\Psi \in \mathcal{S}$ は $\Psi \in \mathcal{B}_0$ に対応する subordinator を表すものとする. $\mathbb{E}_\nu[e^{-T_t u}] = e^{-t\Psi(u)}$ を右から左に読んで, u が Schrödinger 作用素 h と思えば $e^{-t\Psi(h)}$ の経路積分表示はランダムな時間 T_t を導入して, $e^{-T_t h}$ の T_t に関する期待値をとることで実現できそうなことがわかる. 実際, このアイデアで non-local な場合の Schrödinger 熱半群の経路積分表示が構成できる.

3.2 一般化されたベクトルポテンシャル

ベクトルポテンシャル a に対して次の条件を導入する.

条件 3.7 $a = (a_1, \dots, a_d)$ の各成分 a_μ は実数値関数とする. 次の条件を導入する.

$$(A1) \quad a \in (L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d))^d.$$

$$(A2) \quad a \in (L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d))^d, \nabla \cdot a \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d).$$

$$(A3) \quad a \in (L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d))^d, \nabla \cdot a \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d).$$

$$(A4) \quad d = 3, a \in (L^4_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3))^3, \nabla \cdot a \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3) \text{ かつ } \nabla \times a \in (L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3))^3.$$

条件 (A1) は Schrödinger 作用素 $H(a, V)$ を 2 次形式で定義するのに必要な条件である. 条件 (A2) は Feynman-Kac-Itô 公式のために必要になる. 条件 (A3) は $H(a, V)$ を

$$H(a, V) = \frac{1}{2}(p^2 - p \cdot a - a \cdot p + |a|^2) + V$$

と定義するとき有用な条件である. 条件 (A4) はスピンをもつ Schrödinger 作用素 $H_S(a, V)$ を

$$H_S(a, V) = \frac{1}{2}(p^2 - p \cdot a - a \cdot p + |a|^2) + V - \frac{1}{2}\sigma \cdot (\nabla \times a)$$

と定義するとき有用な条件である.

$\partial_\mu : \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ はシュワルツ超関数空間上の微分作用素とする. $p_\mu = -i\partial_\mu$,

$$D_\mu = p_\mu - a_\mu$$

とする. 2 次形式 q を

$$q(f, g) = \sum_{\mu=1}^3 (D_\mu f, D_\mu g) \tag{3.5}$$

で定義し, その定義域を

$$Q(q) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) \mid D_\mu f \in L^2(\mathbb{R}^d), \mu = 1, \dots, d\}$$

とする.

定義 3.8 ($h(a)$ の定義) 2 次形式 q は非負な閉 2 次形式なので, 次を満たす自己共役作用素 $h(a)$ がただ一つ存在する [RS80, p. 276].

$$(h(a)f, g) = q(f, g), \quad f \in D(h(a)), \quad g \in Q(q). \quad (3.6)$$

さらに $h(a)$ の定義域は

$$D(h(a)) = \left\{ f \in Q(q) \mid q(f, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^d)' \right\}$$

で与えられる.

3.3 確率積分の拡張

一般化された Schrödinger 作用素の経路積分を得るために確率積分を一般化する. 特に被積分関数 f が $\mathbb{E}_W^0 \left[\int_0^t \|f(B_s)\|^2 ds \right] < \infty$ とならない場合を考察する.

f を \mathbb{C}^d -値ボレル可測関数で次を満たすものとする.

$$\mathbb{E}_W^0 \left[\int_0^t |f(B_s)|^2 ds \right] < \infty. \quad (3.7)$$

このとき確率積分 $\int_0^t f(B_s) \cdot dB_s$ は Martingale として定義され, 等式

$$\mathbb{E}_W^0 \left[\left| \int_0^t f(B_s) \cdot dB_s \right|^2 \right] = \mathbb{E}_W^0 \left[\int_0^t |f(B_s)|^2 ds \right]$$

を満たすことは既に述べた. しかしながら条件 (3.7) のベクトルポテンシャル a は, いつでも条件 $\mathbb{E}_W^0 \left[\int_0^t |a(B_s)|^2 ds \right] < \infty$ を満たすとは限らない. そこで確率積分を拡張する必要がある. 関数のクラスを定義する. 以下の (1)-(3) を満たす関数全体を $\hat{M}(0, T)$ と表す.

- (1) $f: \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ は $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \times \mathcal{F})/\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 可測.
- (2) $f(t, \cdot)$ は \mathcal{F}_t 可測 ($0 \leq t \leq T$).
- (3) $W \left(\int_0^t |f(B_s)|^2 ds < \infty \right) = 1$.

$(L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d))^d \subset \hat{M}(0, T)$ である. $f \in \hat{M}(0, T)$ に対して

$$R_n(w) = n \wedge \inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t |f(B_s(w))|^2 ds \geq n \right\} \quad (3.8)$$

は \mathcal{F}_t^B に関する停止時刻の列である. ただし, $\int_0^\infty |f(B_s(w))|^2 ds < n$ となる時は

$$\inf \left\{ t \geq 0 \mid \int_0^t |f(B_s(w))|^2 ds \geq n \right\} = \infty$$

とする. $f_n(s, w) = f(B_s(w)) \mathbb{1}_{\{R_n(w) > s\}}$ とすれば $\int_0^\infty |f_n(s, w)|^2 ds = \int_0^{R_n} |f_n(B_s)|^2 ds \leq n$ を満たす. 特に $\mathbb{E}_W^0 \left[\int_0^t |f_n|^2 ds \right] < \infty$ なので確率積分 $\int_0^t f_n \cdot dB_s$ が定義される.

補題 3.9 R_m は (3.8) で与えられるとする. $m < n$ のとき

$$\int_0^{t \wedge R_m} f_n(s, w) \cdot dB_s = \int_0^t f_m(s, w) \cdot dB_s \quad (3.9)$$

が成立する.

定義 3.10 (確率積分) $f \in \hat{M}(0, T)$ と仮定する. このとき

$$\int_0^t f(B_s) \cdot dB_s = \int_0^t f_n(s, w) \cdot dB_s, \quad 0 \leq t \leq R_n \quad (3.10)$$

と定める.

この定義は (3.9) と整合している. この拡張された確率積分をもちいて一般的な特異性の高い $a \in (L_{\text{loc}}^2(\mathbb{R}^d))^d$ に対して $e^{-th(a)}$ の経路積分表示が得られる.

3.4 一般化された Feynman-Kac-Itô 公式

この章では, 一般化された Schrödinger 作用素を定義し, その経路積分表示を構成する. はじめに $h(a)$ の自己共役性について知られている事実を羅列する.

命題 3.11 $\Psi \in \mathcal{B}_0$ として次が示せる.

- (1) 条件 (A1) を仮定する. このとき $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は 2 次形式 q の芯である.
- (2) 条件 (A3) を仮定する. このとき $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は作用素 $h(a)$ の芯である.
- (3) 条件 (A1) を仮定する. このとき $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は 2 次形式としての $\Psi(h(a))$ の芯である.
- (4) 条件 (A3) を仮定する. このとき $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $\Psi(h(a))$ の芯である.

一般化されたベクトルポテンシャル a を持った Schrödinger 作用素 $h(a)$ については次の命題が従う.

命題 3.12 (Feynman-Kac-Itô 公式) 条件 (A2) を仮定する. このとき次が成り立つ

$$(f, e^{-th(a)}g) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_0)} g(B_t) e^{-i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s} \right]. \quad (3.11)$$

ここで $\int_0^t a(B_s) \circ dB_s$ の確率積分は定義 3.10 の意味.

証明: 例えば [HIL12, Lemma 3.71, Theorem 3.73] を参照せよ. \square

定義 3.13 (一般化された Schrödinger 作用素) 条件 (A1) を仮定する. $\Psi \in \mathcal{B}_0$ で V が有界のとき

$$h^\Psi(a, V) = \Psi(h(a)) + V \quad (3.12)$$

を一般化された Schrödinger 作用素という.

Schrödinger 作用素 $h^\Psi(a, V)$ が作る熱半群の経路積分表示を考える. アイデアは subordinator を利用するところにある.

定理 3.14 (一般化された Feynman-Kac-Itô 公式) $\Psi \in \mathcal{B}_0$, $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ とし, 条件 (A2) を仮定する. このとき次が成り立つ.

$$(f, e^{-t h^\Psi(a, V)} g) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x, 0} \left[\overline{f(B_0)} g(B_{T_t^\Psi}) e^{-i \int_0^{T_t^\Psi} a(B_s) \circ dB_s} e^{-\int_0^t V(B_{T_s^\Psi}) ds} \right]. \quad (3.13)$$

証明: 記号を簡単にするために T^Ψ を T と書くことにする.

(Step 1) $V = 0$ とする. このとき次が成立する.

$$(f, e^{-t \Psi(h(a))} g) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x, 0} \left[\overline{f(B_0)} g(B_{T_t}) e^{-i \int_0^{T_t} a(B_s) \circ dB_s} \right]. \quad (3.14)$$

証明: E_u を自己共役作用素 $h(a)$ のスペクトル射影作用素としよう. このとき

$$(f, e^{-t \Psi(h(a))} g) = \int_{\sigma(h(a))} e^{-t \Psi(u)} d(f, E_u g). \quad (3.15)$$

ここに恒等式 $\mathbb{E}_\nu^0[e^{-u T_t}] = e^{-t \Psi(u)}$ を代入すれば

$$(f, e^{-t \Psi(h(a))} g) = \mathbb{E}_\nu^0 \left[(f, e^{-T_t h(a)} g) \right]$$

をえるので, Feynman-Kac-Itô 公式により

$$(f, e^{-t\Psi(h(a))}g) = \mathbb{E}_\nu^0 \left[\int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_0)} g(B_{T_t}) e^{-i \int_0^{T_t} a(B_s) \circ dB_s} \right] \right]$$

がわかる. よって (3.14) が従う.

(Step 2) $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n$, $f_0, f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. また $f_j \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, \dots, n$, とする. このとき次が成り立つ.

$$\left(f_0, \prod_{j=1}^n e^{-(t_j - t_{j-1})\Psi(h(a))} f_j \right) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[\overline{f_0(B_0)} \left(\prod_{j=1}^n f_j(B_{T_{t_j}}) \right) e^{-i \int_0^{T_{t_n}} a(B_s) \circ dB_s} \right]. \quad (3.16)$$

証明: 簡単に $G_j(\cdot) = f_j(\cdot) \left(\prod_{i=j+1}^n e^{-(t_i - t_{i-1})\Psi(h(a))} f_i \right) (\cdot)$ と書く. (Step 1) により左辺は

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[\overline{f_0(B_0)} e^{-i \int_0^{T_{t_1} - t_0} a(B_s) \circ dB_s} G_1(B_{T_{t_1} - t_0}) \right]$$

とあらわせる. $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, 0 \leq s \leq t)$, $\mathcal{F}_t^\nu = \sigma(T_s, 0 \leq s \leq t)$ とする. B_t の Markov 性から

$$\begin{aligned} & \left(f_0, \prod_{j=1}^n e^{-(t_j - t_{j-1})\Psi(h(a))} f_j \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[\overline{f_0(B_0)} e^{-i \int_0^{T_{t_1}} a(B_s) \circ dB_s} \mathbb{E}_\nu^0 \mathbb{E}_W^{B_{T_{t_1}}} \left[f_1(B_0) e^{-i \int_0^{T_{t_2} - t_1} a(B_s) \circ dB_s} G_2(B_{T_{t_2} - t_1}) \right] \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[\overline{f_0(B_0)} e^{-i \int_0^{T_{t_1}} a(B_s) \circ dB_s} \right. \\ & \quad \left. \mathbb{E}_\nu^0 \left[\mathbb{E}_W^0 \left[f_1(B_{T_{t_1}}) e^{-i \int_{T_{t_1}}^{T_{t_2} - t_1 + T_{t_1}} a(B_s) \circ dB_s} G_2(B_{T_{t_1} + T_{t_2} - t_1}) \middle| \mathcal{F}_{T_{t_1}}^B \right] \right] \right]. \end{aligned}$$

が従う. その結果

$$\begin{aligned} & \left(f_0, \prod_{j=1}^n e^{-(t_j - t_{j-1})\Psi(h(a))} f_j \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[\overline{f_0(B_0)} e^{-i \int_0^{T_{t_1}} a(B_s) \circ dB_s} \mathbb{E}_\nu^0 \left[f_1(B_{T_{t_1}}) e^{-i \int_{T_{t_1}}^{T_{t_2} - t_1 + T_{t_1}} a(B_s) \circ dB_s} G_2(B_{T_{t_1} + T_{t_2} - t_1}) \right] \right] \end{aligned}$$

となる. また右辺は

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[\overline{f_0(B_0)} e^{-i \int_0^{T_{t_1}} a(B_s) \circ dB_s} f_1(B_{T_{t_1}}) \mathbb{E}_\nu^{T_{t_1}} \left[e^{-i \int_0^{T_{t_2} - t_1} a(B_s) \circ dB_s} G_2(B_{T_{t_2} - t_1}) \right] \right]$$

と書けるから, T_t の Markov 性を使うと

$$\begin{aligned} & \left(f_0, \prod_{j=1}^n e^{-(t_j - t_{j-1})\Psi(h(a))} f_j \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[\overline{f_0(B_0)} e^{-i \int_0^{T_{t_1}} a(B_s) \circ dB_s} f_1(B_{T_{t_1}}) \mathbb{E}_\nu^0 \left[e^{-i \int_{T_{t_1}}^{T_{t_2}} a(B_s) \circ dB_s} G_2(B_{T_{t_2}}) \middle| \mathcal{F}_{t_1}^\nu \right] \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[\overline{f_0(B_0)} e^{-i \int_0^{T_{t_1}} a(B_s) \circ dB_s} f_1(B_{T_{t_1}}) e^{-i \int_{T_{t_1}}^{T_{t_2}} a(B_s) \circ dB_s} G_2(B_{T_{t_2}}) \right] \end{aligned}$$

となる. これを繰り返せば (3.16) が従う.

(Step 3) $0 \neq V \in L^\infty$ で連続と仮定する. このとき (3.13) が成り立つ.

証明: トロツタ積公式より

$$(f, e^{-th\Psi(a,V)} g) = \lim_{n \rightarrow \infty} (f, (e^{-(t/n)\Psi(h(a))} e^{-(t/n)V})^n g)$$

となるので, (Step 2) から

$$(f, e^{-th\Psi(a,V)} g) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[\overline{f(B_0)} g(B_{T_t}) e^{-i \int_0^{T_t} a(B_s) \circ dB_s} e^{-\sum_{j=1}^n (t/n)V(B_{T_{tj/n}})} \right]$$

となる. ここで $s \mapsto B_{T_s(\tau)}(w)$ は càdlàg パス²⁰ をもつこと, $V(B_{T_s(\tau)}(w))$ は $s \in [0, t]$ について連続であること (ただし高々有限個の点を除いて) を用いれば

$$\sum_{j=1}^n \frac{t}{n} V(B_{T_{tj/n}}) \rightarrow \int_0^t V(B_{T_s}) ds \quad (n \rightarrow \infty)$$

が各パスごとに成立するので (3.13) が成立する.

(Step 4) $V \in L^\infty$ と仮定する. このとき (3.13) が成立する.

証明: $V_n = \phi(x/n)(V * j_n)$ とおく. ここで $j_n = n^d \phi(xn)$ は $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $0 \leq \phi \leq 1$, $\int \phi(x) dx = 1$, $\phi(0) = 1$ である. このとき V_n は有界連続関数で, さらに $V_n(x) \rightarrow V(x) (n \rightarrow \infty)$ が $x \notin \mathcal{N}$ に対して成り立つ. ここで \mathcal{N} のルベーグ測度はゼロである. よってほとんど至るところの $(w, \tau) \in \Omega \times \Omega_\mu$ に対して, $\{t \in [0, \infty) \mid B_{T_t(\tau)}(w) \in \mathcal{N}\}$ のルベーグ測度はゼロである. その結果

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[\overline{f(B_0)} g(B_{T_t}) e^{-i \int_0^{T_t} a(B_s) \circ dB_s} e^{-\int_0^t V_n(B_{T_s}) ds} \right] \\ & \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[\overline{f(B_0)} g(B_{T_t}) e^{-i \int_0^{T_t} a(B_s) \circ dB_s} e^{-\int_0^t V(B_{T_s}) ds} \right]. \end{aligned}$$

²⁰右連続で左極限が存在するパス.

一方 $\Psi(h(a)) + V_n$ が $\Psi(h(a)) + V$ に共通定義域 $D(\Psi(h(a)))$ 上で強収束するので,

$$e^{-t(\Psi(h(a))+V_n)} \rightarrow e^{-t(\Psi(h(a))+V)} \quad (\text{強収束})$$

がわかる. 故に (3.13) が従う. □

定理 3.14 から次のいくつかの系が従う.

系 3.15 (双極不等式) $\Psi \in \mathcal{B}_0$, $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ とし条件 (A2) を仮定する. このとき次が成り立つ:

$$|(f, e^{-th^\Psi(a,V)}g)| \leq (|f|, e^{-t(h^\Psi(0,V))}|g|).$$

特に $\inf \sigma(h^\Psi(0, V)) \leq \inf \sigma(h^\Psi(a, V))$ が成り立つ.

証明: 定理 3.14 から

$$|(f, e^{-th^\Psi(a,V)}g)| \leq \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[|f(B_0)| |g(B_{T_t^\Psi})| e^{-\int_0^t V(B_{T_s^\Psi}) ds} \right]$$

なので系が従う. □

次に一般的な外場ポテンシャル V を持った Schrödinger 熱半群の経路積分表示を考えよう.

定義 3.16 一般に $Q(T) \supset Q(S)$ で $T(f, f) \leq aS(f, f) + b\|f\|^2$ が任意の $f \in Q(S)$ で成り立つとき, T は S に 2 次形式の意味で相対有界といい, a の下限を同様に相対閾値という.

系 3.17 条件 (A2) を仮定する.

- (1) $|V|$ は $\Psi(h(0))$ に 2 次形式の意味で相対有界でその相対閾値を b とする. このとき, $|V|$ は $\Psi(h(a))$ に対しても 2 次形式の意味で相対有界でその相対閾値は b を超えない.
- (2) $|V|$ は $\Psi(h(0))$ に相対有界でその相対閾値を b とする. このとき, $|V|$ は $\Psi(h(a))$ に対しても相対有界でその相対閾値は b を超えない.

証明: 証明はもっと一般的な場合に系 4.13 で与える. □

系 3.18 (1) 条件 (A2) を仮定し V は $\Psi(h(0))$ に相対有界でその相対閾値は 1 より真に小さいとする. このとき $h^\Psi(a, V)$ は $D(\Psi(h(a)))$ 上で自己共役で下から有界である. さらに $\Psi(h(a))$ の任意の芯上で本質的自己共役である.

(2) さらに条件 (A3) を仮定する. このとき $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $h^\Psi(a, V)$ の芯である.

証明: (1) 系 3.17 の (2) より, V は $\Psi(h(a))$ に相対有界でその相対閾値は 1 より真に小さいから, (1) は Kato-Rellich の定理 [RS75, p.162] から従う. (2) は命題 3.11 から従う. \square

系 3.17 から $\Psi(h(a)) + V$ が 2 次形式の意味で定義されることがわかる. $V = V_+ - V_-$ とし, V_- は 2 次形式の意味で $\Psi(h(0))$ に相対有界で相対閾値は 1 より真に小さいならば, $\Psi(h(a))$ にも相対有界でその相対閾値も真に 1 より小さい. さらに $V_+ \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$ を仮定する. 条件 (A1) の下, $Q(\Psi(h(a))) \cap Q(V_+)$ は稠密であることがわかる. 2 次形式を次で定義する.

$$q(f, f) = (\Psi(h(a))^{1/2}f, \Psi(h(a))^{1/2}f) + (V_+^{1/2}f, V_+^{1/2}f) - (V_-^{1/2}f, V_-^{1/2}f), \quad (3.17)$$

定義域は $Q(\Psi(h(a))) \cap Q(V_+)$. KLMN 定理 [RS75, p.167] から q は下から有界な閉 2 次形式である. この 2 次形式に対応する一意的な自己共役作用素を

$$\Psi(h(a)) \dot{+} V_+ \dot{-} V_- \quad (3.18)$$

で表す. このように一般的な V に対して定義された Schrödinger 作用素に対しても Feynman-Kac 公式は成立する. 結果だけを述べよう.

定理 3.19 条件 (A2) を仮定する. $V = V_+ - V_-$ は $V_+ \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d)$ で V_- は $\Psi(-\Delta/2)$ に関して 2 次形式の意味で相対有界でその相対閾値が 1 より真に小さいとする. このとき定理 3.14 で与えられた経路積分表示が (3.18) 対しても成り立つ.

3.5 相対論的 Schrödinger 作用素の経路積分表示

相対論的 Schrödinger 作用素を考えよう.

$$h_{\text{rel}}(a, V) = \sqrt{(p - a)^2 + m^2} - m + V, \quad (3.19)$$

$$h_{\text{rel}}(0, V) = \sqrt{-\Delta + m^2} - m + V. \quad (3.20)$$

これは, $h^\Psi(a, V)$ の特別なものであるから, 前章の一般論の帰結として次がいえる.

定理 3.20 (相対論的 Schrödinger 作用素の Feynman-Kac-Itô 公式)

- (1) 条件 (A3) を仮定し, V が $\sqrt{-\Delta + m^2}$ に相対有界でその相対閾値が真に 1 より小さいとき $h_{\text{rel}}(a, V)$ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で本質的自己共役である.

(2) 条件 (A2) を仮定し V_- は $\sqrt{-\Delta + m^2}$ に 2 次形式の意味で相対有界でその相対閾値は真に 1 より小さく, $V_+ \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3)$ とする. このとき $h_{\text{rel}}(a, V)$ を (3.18) で定義すると

$$(f, e^{-th_{\text{rel}}(a, V)} g) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{P \times \nu}^{x, 0} \left[\overline{f(B_0)} g(B_{T_t^\Psi}) e^{-i \int_0^{T_t^\Psi} a(B_s) \circ dB_s} e^{-\int_0^t V(B_{T_s^\Psi}) ds} \right] \quad (3.21)$$

が成立する. ここで T_t^Ψ は $\Psi(u) = \sqrt{2u + m^2} - m$ に対応した subordinator で, 具体的には, $B_s + ms$ の到達時刻 $T_t^\Psi = \inf\{s > 0 | B_s + ms = t\}$ で与えられる.

定理 3.20 より次のエネルギー不等式をえる.

系 3.21 (双極不等式) 定理 3.20 の条件を仮定する. このとき

$$|(f, e^{-th_{\text{rel}}(a, V)} g)| \leq (|f|, e^{-th_{\text{rel}}(0, V)} |g|).$$

特に $\inf \sigma(h_{\text{rel}}(0, V)) \leq \inf \sigma(h_{\text{rel}}(a, V))$ が成立する.

3.6 Lieb-Thirring 不等式

Lieb-Thirring 不等式は Schrödinger 作用素 $-\frac{1}{2}\Delta + V$ の非正の固有値の総数及びモメントの上からの評価はを与える [Lie76, Lie80]. $d \geq 3$ として, $-\frac{1}{2}\Delta + V$ の非正な固有値の総数を N とすれば Lieb-Thirring 不等式は

$$N \leq a_d \int_{\mathbb{R}^d} |V_-(x)|^{d/2} dx \quad (3.22)$$

となる. ここで, a_d は次元にのみよる定数で, V_- は V の負の部分である. これは, 形式的な議論から導かれる等式

$$N = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{(p, x) | |p|^2 + V(x) \leq 0\}} dp dx \quad (3.23)$$

から予想される. 実際, (3.23) の右辺は

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \frac{\sigma(S_{d-1})}{d} \int_{\mathbb{R}^d} |V_-(x)|^{d/2} dx$$

となる. 相対論的 Schrödinger 作用素に対する Lieb-Thirring 不等式は [Dau83] はで与えられている. さらに, [HL12] では一般的な Schrödinger 作用素 $\Psi(-\Delta/2) + V$, $\Psi \in \mathcal{B}_0$ の Lieb-Thirring 不等式が Feynman-Kac 公式を用いて与えられている. 結果のみ述べる. $\Psi(-\Delta/2) + V$ の非正な固有値の総数を N^Ψ とする.

定理 3.22 次を仮定する.

- (1) V は連続で非正.
- (2) $\|(\Psi(-\Delta/2) + \lambda)^{-1/2}|V|^{1/2}\| < 1$ が十分大きな $\lambda > 0$ で成り立つ.
- (3) $(\Psi(-\Delta/2) + \lambda)^{-1/2}|V|^{1/2}$ は全ての $\lambda > 0$ でコンパクト作用素.
- (4) $\text{Tr} [(|V|^{1/2}\Psi(-\Delta/2) + \lambda)^{-1}|V|^{1/2}]^n < \infty$ が十分大きな n で成り立つ.

このとき

$$N^\Psi \leq \frac{1}{F(1)} \int_0^\infty \frac{ds}{s} G(s) \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\{|V(x)|>0\}} Q^\Psi(s, x) dx.$$

ここで

$$Q^\Psi(s, x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-s\Psi(|\xi|^2/2)/|V(x)|} d\xi$$

で F と G は

$$F(x) = x \int_0^\infty e^{-y} g(xy) dy, \quad G(x) = xg(x)$$

を満たす任意の関数で, さらに, G は下に凸な関数 (convex) である.

証明: [HL12, Theorem 3.7] を参照せよ. □

例 3.23 $\Psi(u) = (2u + m^{2/\alpha})^{\alpha/2}$ とする. このとき

$$m = 0 \quad N^\Psi \leq a'_d \int_{\mathbb{R}^d} |V(x)|^{d/\alpha} dx, \tag{3.24}$$

$$m \neq 0 \quad N^\Psi \leq a''_d \int_{\mathbb{R}^d} |V(x)|^{d/\alpha} dx + a'''_d \int_{\mathbb{R}^d} |V(x)|^{d/2} dx. \tag{3.25}$$

証明は [HL12, Section 4.3] をみよ.

例 3.24 $\Psi(u)$ は単調増加で, $\Psi(au) = a^\gamma \Psi(u)$, $\gamma > 0$, とする. このとき

$$N^\Psi \leq A_d \int_{\mathbb{R}^d} (\Psi^{-1}(|V(x)|))^{d/2} dx. \tag{3.26}$$

証明は [HL12, Corollary 3.9] をみよ.

4 スピンを含む経路積分表示

4.1 スピン 1/2

スピン 1/2 をもった Schrödinger 作用素は形式的に $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$ 上に次で定義される.

$$\frac{1}{2}(\sigma \cdot (p - a))^2. \quad (4.1)$$

これを前章と同様に 2 次形式で一般的に定義しよう. 2 次形式 q_2 を次で定める.

$$q_2(f, g) = \sum_{\mu=1}^3 (\sigma_\mu D_\mu f, \sigma_\mu D_\mu g). \quad (4.2)$$

定義域は

$$Q(q_2) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2) \mid \sigma_\mu D_\mu f \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2), \mu = 1, 2, 3\}.$$

定義 4.1 ($h_2(a)$ の定義) 2 次形式 q_2 は非負な閉 2 次形式になるので, 次を満たす自己共役作用素 $h_2(a)$ がただ一つ存在する.

$$(h_2(a)f, g) = q_2(f, g), \quad f \in D(h_2(a)), g \in Q(q_2). \quad (4.3)$$

ここで

$$D(h_2(a)) = \{f \in Q(q_2) \mid q_2(f, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)'\}. \quad (4.4)$$

命題 4.2 $\Psi \in \mathcal{B}_0$ としよう.

- (1) 条件 (A1) を仮定する. $d = 3$ のとき $\mathbb{C}^2 \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ は $h_2(a)$ の 2 次形式の意味での芯である.
- (2) 条件 (A4) を仮定する. このとき $\mathbb{C}^2 \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ は $h_2(a)$ の芯である.
- (3) 条件 (A1) を仮定する. $d = 3$ のとき $\mathbb{C}^2 \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ は $\Psi(h_2(a))$ の 2 次形式の意味での芯である.
- (4) 条件 (A4) を仮定する. このとき $\mathbb{C}^2 \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ は $\Psi(h_2(a))$ の芯である.

第 2-3 節で示したように $h_2(a)$ はベクトル値関数空間上に作用する自己共役作用素なので, 例えば $h_2(a) + V$ が生成する熱半群の経路積分表示をトロッタ積公式を用いて直接求めても, 積分核はもちろん 2×2 行列の無限積のようなものになり, あまり興味がわからない. 経路積分表示のために $h_2(a)$ を $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ 上の作用素へユニタリー変換する. $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ 上に作用する作用素 $h_{\mathbb{Z}_2}$ を次で定める.

$$(h_{\mathbb{Z}_2}f)(x, \theta) = (hf)(x, \theta) - \frac{1}{2}\theta b_3(x)f(x, \theta) - \frac{1}{2}\left(b_1(x) - i\theta b_2(x)\right)f(x, -\theta). \quad (4.5)$$

ここで $(b_1, b_2, b_3) = \nabla \times a$. 可閉作用素 $h_{\mathbb{Z}_2} \lceil \mathbb{C}^2 \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ の閉拡大も同じ記号で書くことにする.

命題 4.3 (ユニタリー同値性) 条件 (A4) を仮定する. このとき $h_{\mathbb{Z}_2}$ は $\ell^2(\mathbb{Z}_2) \otimes D(h)$ 上で自己共役作用素で $\ell^2(\mathbb{Z}_2) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で本質的自己共役作用素になる. さらに

$$\mathcal{U}h_2(a)\mathcal{U}^{-1} = h_{\mathbb{Z}_2} \quad (4.6)$$

が従う. ここで, $\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}^3)$ は (2.7) で与えられている.

証明: $\mathcal{U}h_2(a)\mathcal{U}^{-1} = h_{\mathbb{Z}_2}$ が $\ell^2(\mathbb{Z}_2) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で成立することはわかる. \mathcal{U} は $\ell^2(\mathbb{Z}_2) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ を $\mathbb{C}^2 \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ へうつし, $\mathbb{C}^2 \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ は $h_2(a)$ の作用素としての芯なので $\mathcal{U}h_2(a)\mathcal{U}^{-1} = h_{\mathbb{Z}_2}$ が成立する. \square

以降 $h_{\mathbb{Z}_2}$ を混乱のない限り $h_2(a)$ と書くことにする.

4.2 一般化されたスピン

自己共役作用素 $h_2(a)$ を 3 次元から d 次元へ, また $\mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_p$ へ一般化する. \mathbb{Z}_p を 1 の原始 p 乗根の集合とする.

$$\mathbb{Z}_p = \{\theta_1^{(p)}, \dots, \theta_p^{(p)}\}. \quad (4.7)$$

ここで

$$\theta_\alpha^{(p)} = \exp\left(2\pi i \frac{\alpha}{p}\right), \quad \alpha \in \mathbb{N}.$$

以下で $p \geq 2$ を固定し $\theta_\beta^{(p)}$ を簡単に θ_β と書くことにする. $\ell^2(\mathbb{Z}_p) = \{f : \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{C}\}$ にスカラ積

$$(f, g)_{\ell^2(\mathbb{Z}_p)} = \sum_{\beta=1}^p \overline{f(\theta_\beta)} g(\theta_\beta)$$

を導入する. スピン \mathbb{Z}_p をもった Schrödinger 作用素 を定義しよう. 始めに対角部分 U と非対角部分 U_β , $\beta = 1, \dots, p-1$, を定義する.

定義 4.4 (一般化されたスピン作用素)

- (1) (対角部分) $U : \mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{R}$ は $\max_{\theta \in \mathbb{Z}_p} |U(x, \theta)|$ が $-\Delta/2$ に相対有界な掛け算作用素とする。
- (2) (非対角部分) $W_\beta : \mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{C}$, $1 \leq \beta \leq p-1$, は $\max_{\theta \in \mathbb{Z}_p} |W_\beta(x, \theta)|$ が $-\Delta/2$ に相対有界となる掛け算作用素とする。 $U_\beta : \mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{C}$ を次で定める。

$$U_\beta(x, \theta_\alpha) = \frac{1}{2} \left(W_\beta(x, \theta_{\alpha+\beta}) + \overline{W_{p-\beta}(x, \theta_\alpha)} \right), \quad \alpha = 1, \dots, p, \quad \beta = 1, \dots, p-1. \quad (4.8)$$

- (3) (一般化されたスピン作用素) $\mathcal{M} : L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}_p) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{Z}_p)$,

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}(U, U_1, \dots, U_{p-1}) : f(x, \theta_\alpha) \mapsto U(x, \theta_\alpha) f(x, \theta_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{p-1} U_\beta(x, \theta_\alpha) f(x, \theta_{\alpha+\beta}) \quad (4.9)$$

を一般化されたスピン作用素とよぶ。

以下で

$$u_\beta(x) = \begin{cases} \max_{\theta \in \mathbb{Z}_p} |U(x, \theta)| & \text{if } \beta = p, \\ \max_{\theta \in \mathbb{Z}_p} |U_\beta(x, \theta)| & \text{if } 1 \leq \beta \leq p-1 \end{cases} \quad (4.10)$$

とおく。明らかに

$$\|u_\beta f\| \leq c_\beta \|-\Delta/2 f\| + b_\beta \|f\|, \quad \beta = 1, \dots, p, \quad f \in D(-\Delta/2), \quad (4.11)$$

となる $c_\beta > 0$ と $b_\beta \geq 0$ が存在する。

例 4.5 (スピン 1/2) $d = 3$, $p = 2$ として $W_1(x, \theta) = -\frac{1}{2}(b_1(x) + i\theta b_2(x))$, $\theta \in \mathbb{Z}_2$ と定めれば $\theta_1 = -1$, $\theta_2 = 1$ となり, また (4.8) から非対角部分は

$$U_1(x, \theta) = \frac{1}{2}(W_1(x, \theta\theta_1) + \overline{W_1(x, \theta)}), \quad \theta \in \mathbb{Z}_2$$

がわかる。また $W_1(x, \theta\theta_1) = -\frac{1}{2}(b_1(x) - i\theta b_2(x)) = \overline{W_1(x, \theta)}$ となるので非対角部分は $U_1(x, \theta) = -\frac{1}{2}(b_1(x) - i\theta b_2(x))$ となる。一方で対角部分は $U(x, \theta) = -\frac{1}{2}\theta b_3(x)$ である。これはまさに (4.5) で与えたものに他ならない。

定義 4.6 条件 (A1) を仮定する. $h(a)$ は (3.6) で定義された Schrödinger 作用素, \mathcal{M} は (4.9) で定義された一般化されたスピン作用素. このとき

$$h_p = h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) = \mathbb{1} \otimes h(a) + \mathcal{M} \quad (4.12)$$

とおく.

形式的に h_p は

$$(h_p f)(x, \theta_\alpha) = \left(\frac{1}{2}(p - a(x))^2 + U(x, \theta_\alpha) \right) f(x, \theta_\alpha) + \sum_{\beta=1}^{p-1} U_\beta(x, \theta_\alpha) f(x, \theta_{\alpha+\beta}) \quad (4.13)$$

となる. 以下では U, U_β を一つ固定する.

定理 4.7 条件 (A2) を仮定する. $\sum_{\beta=1}^p c_\beta < 1$ としよう. ここで c_β は (4.11) で与えられる定数である. このとき $h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})$ は $\ell^2(\mathbb{Z}_p) \otimes D(h)$ 上で自己共役で下から有界である. さらに $\mathbb{1} \otimes h(a)$ の任意の芯上で本質的自己共役である. 特に $\ell^2(\mathbb{Z}_p) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})$ の芯である.

証明:

$$\sum_{\alpha=1}^p \overline{g(x, \theta_\alpha)} \left(\sum_{\beta=1}^{p-1} W_\beta(x, \theta_{\alpha+\beta}) f(x, \theta_{\alpha+\beta}) \right) = \sum_{\gamma=1}^p \left(\sum_{\beta=1}^{p-1} \overline{W_{p-\beta}(x, \theta_\gamma)} g(x, \theta_{\gamma+\beta}) \right) f(x, \theta_\gamma)$$

なので,

$$(g(x, \cdot), \mathcal{M}f(x, \cdot))_{\ell^2(\mathbb{Z}_p)} = (\mathcal{M}g(x, \cdot), f(x, \cdot))_{\ell^2(\mathbb{Z}_p)}$$

が従い, \mathcal{M} は対称になる. そのノルムは $\|\mathcal{M}f\| \leq \sum_{\beta=1}^p \|(\mathbb{1} \otimes u_\beta)f\|$ のように評価できるから $h_0 = -\Delta/2, E > 0$ において $\|u_\beta(h(a) + E)^{-1}g\| \leq \|u_\beta(h_0 + E)^{-1}|g|\|$ から²¹

$$\|\mathcal{M}f\| \leq \sum_{\beta=1}^p \|u_\beta(h_0 + E)^{-1}\| \|\mathbb{1} \otimes (h(a) + E)f\| \leq \sum_{\beta=1}^p c_\beta \|(\mathbb{1} \otimes h(a))f\| + b\|f\|$$

が従う. 故に Kato-Rellich の定理 [RS75, p.162] より定理が従う. \square

²¹この不等式は Feynman-Kac 公式から導かれるため, 条件 (A2) が必要になる. (4.35) を見よ.

定義 4.8 (一般化された Schrödinger 作用素) 条件 (A2) と $\sum_{\beta=1}^p c_\beta < 1$ を仮定する. \mathcal{M} は (4.9) の一般化されたスピン, $\Psi \in \mathcal{B}_0$ とし

$$\overline{h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})} = h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) - E_p$$

とおく. ここで $E_p = \inf \sigma(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}))$. このとき

$$h_p^\Psi(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}, V) = \Psi \left(\overline{h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})} \right) + V \quad (4.14)$$

を一般化された Schrödinger 作用素という.

Ψ は \mathbb{R}_+ 上で定義された関数なので $\Psi(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}))$ は一般に定義されない. そこで $\Psi \left(\overline{h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})} \right)$ とした.

命題 4.9 条件 (A2) を仮定し $\sum_{\beta=1}^p c_\beta < 1$ とする. もし $\Psi \in \mathcal{B}_0$ ならば, $\ell^2(\mathbb{Z}_p) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ は $\Psi \left(\overline{h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})} \right)$ の芯である.

証明: $h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})$ は $\ell^2(\mathbb{Z}_p) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的自己共役なので, この命題は命題 3.11 と同様に示せる. \square

4.3 一般化された spin-Feynman-Kac-Itô 公式

ここでは $h_p^\Psi(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}, V)$ が生成する熱半群 $e^{-th_p^\Psi(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}, V)}$ の経路積分表示を構成する. そのために $p-1$ 個の独立な Poisson 過程を用意する. $(N_t^\beta)_{t \geq 0}$, $\beta = 1, \dots, p-1$, は $(\Omega_\mu, \mathcal{F}_\mu, \mu)$ 上の $p-1$ 個の独立な intensity 1 をもつ Poisson 過程とする. 即ち

$$\mu(N_t^\beta = n) = \frac{t^n}{n!} e^{-t}.$$

さらに, Lévy 過程 $(N_t)_{t \geq 0}$ を

$$N_t = \sum_{\beta=1}^{p-1} \beta N_t^\beta \quad (4.15)$$

によって定める. $\mathcal{F}_t^N = \sigma(N_s, s \leq t)$ とする. このとき N_t は \mathcal{F}_t^N に関して Markov 過程である. $\mathbb{E}_\mu[f(N_t + \alpha)]$ を $\mathbb{E}_\mu^\alpha[f(N_t)]$ と書こう. また dN_s^β を $(N_t^\beta)_{t \geq 0}$ に付随した counting 測度とすれば

$$\int_v^{w+} g(N_{s-}) dN_s^\beta = \int_{(v,w]} g(N_{s-}) dN_s^\beta = \sum_{\substack{v < r \leq w \\ N_{r+}^\beta \neq N_{r-}^\beta}} g(N_{r-}) \quad (4.16)$$

となる. ν^β を $(N_t^\beta)_{t \geq 0}$ に付随した Lévy 測度とする. $\tilde{N}^\beta(dsdz) = N^\beta(dsdz) - ds\nu^\beta(dz)$ のとき $X_t = \int_U \int_0^t \cdots \tilde{N}^\beta(dsdz)$, $t \geq 0$, は Martingale なので, $\mathbb{E}_\mu[X_t] = 0$. よって

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu \left[\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \int_0^t \cdots N^\beta(dsdz) \right] &= \mathbb{E}_\mu \left[\int_{\mathbb{R} \setminus \{0\}} \int_0^t \cdots ds\nu^\beta(dz) \right] \\ &= \mathbb{E}_\mu \left[\int_0^t \cdots ds\nu^\beta(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \right] = \mathbb{E}_\mu \left[\int_0^t \cdots ds \right] \end{aligned}$$

なので

$$\mathbb{E}_\mu \left[\int_v^{w+} g(N_{s-}) dN_s^\beta \right] = \mathbb{E}_\mu \left[\int_v^w g(N_s) ds \right]$$

がわかる.

補題 4.10 $\sum_{\beta=1}^p c_\beta < 1$ とする. 条件 (A2) を仮定し

$$\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} dy \frac{e^{-|x-y|^2/(2s)}}{(2\pi s)^{d/2}} |\log u_\beta(y)| < \infty, \quad \beta = 1, \dots, p-1, \quad (4.17)$$

としよう. このとき

$$(f, e^{-th_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})} g) = e^{(p-1)t} \sum_{\alpha=1}^p \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \mu}^{x, \alpha} \left[\overline{f(B_0, \theta_{N_0})} g(B_t, \theta_{N_t}) e^{\mathcal{S}} \right] \quad (4.18)$$

が従う. ただし $\mathcal{S} = \mathcal{S}_a + \mathcal{S}_S$ で,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_a &= -i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s, \\ \mathcal{S}_S &= - \int_0^t U(B_s, \theta_{N_s}) ds + \sum_{\beta=1}^{p-1} \int_0^{t+} \log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_{s-}})) dN_s^\beta. \end{aligned}$$

ここで $\log z$ は主値をとるものと約束する.

証明: (Step 1) $U(x, \theta_\alpha)$ と $U_\beta(x, \theta_\alpha)$ が連続であると仮定する. さらに $a \in (C_0^\infty(\mathbb{R}^d))^d$ としよう. (4.17) から

$$\mathbb{E}_{W \times \mu}^{x, \alpha} \left[\int_0^{t+} |\log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_{s-}}))| dN_s^\beta \right] \leq \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-|x-y|^2/(2s)}}{(2\pi s)^{d/2}} |\log u_\beta(y)| < \infty$$

が従うので

$$\int_0^{t+} |\log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_{s-}}))| dN_s^\beta < \infty \quad (4.19)$$

がいえる. 等式

$$\int_{\Omega_\mu} \exp \left(\sum_{\beta=1}^{p-1} r_\beta N_t^\beta \right) d\mu = \exp \left(\sum_{\beta=1}^{p-1} (e^{r_\beta} - 1) \right)$$

と $|c\mathcal{S}_s| \leq c\|u_p\|_\infty t + |\log \|u_\beta\|_\infty^c| N_t^\beta$ の評価から

$$|\mathbb{E}_{W \times \mu}^{x, \alpha} [e^{c\mathcal{S}_s}]| \leq \exp \left(t \left(c\|u_p\|_\infty + \sum_{\beta=1}^{p-1} (\|u_\beta\|_\infty^c - 1) \right) \right). \quad (4.20)$$

ここで u_β は (4.10) で与えられる.

$$Z_{[v, w]} = -i \int_v^w a(B_s) \circ dB_s - \int_v^w U(B_s, \theta_{N_s}) ds + \sum_{\beta=1}^{p-1} \int_v^{w+} \log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_{s-}})) dN_s^\beta$$

とすれば

$$S_t g(x, \theta_\alpha) = \mathbb{E}_{W \times \mu}^{x, \alpha} [e^{Z_{[0, t]}} g(B_t, \theta_{N_t})]$$

と表せる. $g \in \ell^2(\mathbb{Z}_p) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする. シュワルツの不等式から

$$\|S_t g\|^2 \leq \exp \left(t \left(2\|u_p\|_\infty + \sum_{\beta=1}^{p-1} (\|u_\beta\|_\infty^2 - 1) \right) \right) \|g\|^2$$

をえる. よって S_t は有界作用素であることがわかる. 次に $S_t, t \geq 0$ が対称な C_0 半群であり, その生成子が $-(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) + p - 1)$ となることを示そう. 即ち (1) $S_0 = \mathbb{1}$, (2) $S_s S_t = S_{s+t}$, (3) $t \mapsto S_t g$ は連続, (4) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (S_t g - g) = -(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) + (p - 1))g$. (1) は自明. (2) を示そう.

$$S_t S_s g(x, \theta_\alpha) = \mathbb{E}_{W \times \mu}^{x, \alpha} \left[e^{Z_{[0, t]}} \mathbb{E}_{W \times \mu}^{B_t, N_t} [e^{Z_{[0, s]}} g(B_s, \theta_{N_s})] \right] \quad (4.21)$$

に注意する. Brown 運動の Markov 性から

$$(4.21) = \mathbb{E}_{W \times \mu}^{x, \alpha} \left[e^{Z_{[0, t]}} \exp \left(-i \int_t^{t+s} a(B_r) \circ dB_r \right) \mathbb{E}_\mu^{N_t} \left[\exp \left(-\int_0^s U(B_{t+r}, \theta_{N_r}) dr + \sum_{\beta=1}^{p-1} \int_0^{s+} \log(-U_\beta(B_{t+r-}, \theta_{N_{r-}})) dN_r^\beta \right) g(B_{t+s}, \theta_{N_s}) \right] \right] \quad (4.22)$$

となる. さらに N_t の Markov 性から

$$(4.22) = \mathbb{E}_{W \times \mu}^{x, \alpha} \left[e^{Z_{[0,t]}} e^{Z_{[t,t+s]}} g(B_{t+s}, \theta_{N_{t+s}}) \right] = S_{s+t} g(x, \theta_\alpha)$$

もいえる. これで (2) が示された. 次に S_t の生成子を求める. Itô の公式によって次が示せる.

$$\begin{aligned} dN_t &= \sum_{\beta=1}^{p-1} \int_0^{t+} \beta dN_s^\beta, \\ d\theta_{N_t} &= \sum_{\beta=1}^{p-1} (\theta_{N_t+\beta} - \theta_{N_t}), \\ dg(B_t, \theta_{N_t}) &= \int_0^t \nabla g(B_s, \theta_{N_s}) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t \Delta g(B_s, \theta_{N_s}) ds \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^{p-1} \int_0^{t+} (g(B_s, \theta_{N_s+\beta}) - g(B_s, \theta_{N_s})) dN_s^\beta, \\ de^{Z_{[0,t]}} &= \int_0^t e^{Z_{[0,s]}} (-ia(B_s)) \cdot dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t e^{Z_{[0,s]}} (-i\nabla \cdot a(B_s) - a(B_s)^2) ds \\ &\quad - \int_0^t e^{Z_{[0,s]}} U(B_s, \theta_{N_s}) ds + \sum_{\beta=1}^{p-1} \int_0^{t+} e^{Z_{[0,s-]}} \left(e^{\log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_{s-}}))} - 1 \right) dN_s^\beta. \end{aligned}$$

また積公式 $d(e^{Z_{[0,t]}} g) = de^{Z_{[0,t]}} \cdot g + e^{Z_{[0,t]}} \cdot dg + de^{Z_{[0,t]}} \cdot dg$ から

$$\begin{aligned} d(e^{Z_{[0,t]}} g)(B_t, \theta_{N_t}) &= \int_0^t e^{Z_{[0,s]}} \left\{ \frac{1}{2} \Delta g(B_s, \theta_{N_s}) - ia(B_s) \cdot \nabla g(B_s, \theta_{N_s}) \right. \\ &\quad \left. + \left(-\frac{1}{2} a(B_s)^2 - U(B_s, \theta_{N_s}) \right) g(B_s, \theta_{N_s}) \right\} ds \\ &\quad + \int_0^t e^{Z_{[0,s]}} \left(\nabla g(B_s, \theta_{N_s}) - ia(B_s) g(B_s, \theta_{N_s}) \right) \cdot dB_s \\ &\quad + \sum_{\beta=1}^{p-1} \int_0^{t+} e^{Z_{[0,s]}} \left(g(B_s, \theta_{N_{s-}+\beta}) e^{\log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_{s-}}))} - g(B_s, \theta_{N_{s-}}) \right) dN_s^\beta. \end{aligned}$$

上の両辺の期待値をとれば

$$\frac{1}{t} (f, (S_t - 1)g) = \frac{1}{t} \int_0^t ds \int_{\mathbb{R}^3} dx \overline{f(x)} \mathbb{E}_{P \times \mu}^{x, \alpha} [G(s)]$$

となる. ここで

$$G(s) = e^{Z_{[0,s]}} \left(\frac{1}{2} \Delta - ia(B_s) \cdot \nabla - \frac{1}{2} a(B_s)^2 - U(B_s, \theta_{N_s}) \right) g(B_s, \theta_{N_s}) \\ + \sum_{\beta=1}^{p-1} e^{Z_{[0,s]}} \left(g(B_s, \theta_{N_s+\beta}) e^{\log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_s}))} - g(B_s, \theta_{N_s-}) \right), \\ G(0) = -(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) + (p-1))g(x, \theta_\alpha).$$

$U(x, \theta)$, $U_\beta(x, \theta)$, $a_\mu(x)$ は連続であるから, $G(s)$ も $s = 0$ で $(w, \tau) \in \Omega \times \Omega_\mu$ ごとに連続. そして $\mathbb{E}_{P \times \mu}^{x, \alpha}[G(s)]$ は $s = 0$ で連続となることが優収束定理から示せる. 故に

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} (f, (S_t - 1)g) = (f, -(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) + (p-1))g)$$

が従う. 最後に強連続性 (3) が (2) と (4) から示せる. その結果

$$e^{t(p-1)} S_t g = e^{-th_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})} g \quad (4.23)$$

がわかる.

(Step 2) 命題 3.12 の証明と同様の近似議論で (4.23) は (A2) に従う a まで拡張できる.

(Step 3) (4.23) を一般の U と U_β へ拡張する. 軟化子をもちいて $U_\beta^{(n)}(x, \theta_\alpha)$ と $U^{(n)}(x, \theta_\alpha)$, $n = 1, 2, 3, \dots$, が連続で $U_\beta(x, \theta_\alpha)$, $U(x, \theta_\alpha)$ に $n \rightarrow \infty$ で x ごとに収束し, さらに

$$\|U^{(n)}(\cdot, \theta_\alpha)\|_\infty \leq \|U(\cdot, \theta_\alpha)\|_\infty, \quad \|U_\beta^{(n)}(\cdot, \theta_\alpha)\|_\infty \leq \|U_\beta(\cdot, \theta_\alpha)\|_\infty$$

となるものを構成できる. 固定した $\tau \in \Omega_\mu$ ごとに次を満たす $r_1 = r_1(\tau), \dots, r_M = r_M(\tau)$ が存在する.

$$\exp \left(\sum_{\beta=1}^{p-1} \int_0^{t+} \log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_s-})) dN_s^\beta \right) = \prod_{\beta=1}^{p-1} \prod_{i=1}^M (-U_\beta(B_{r_i}, \theta_{N_{r_i}})). \quad (4.24)$$

よって $\tau \in \Omega_\mu$ に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sum_{\beta=1}^{p-1} \int_0^{t+} \log(-U_\beta^{(n)}(B_s, \theta_{N_s-})) dN_s^\beta} = e^{\sum_{\beta=1}^{p-1} \int_0^{t+} \log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_s-})) dN_s^\beta}.$$

同様にして $e^{-\int_0^t U^{(n)}(B_s, \theta_{N_s}) ds} \rightarrow e^{-\int_0^t U(B_s, \theta_{N_s}) ds}$ ($n \rightarrow \infty$) も示せる. 故に (4.23) が一般の U_β と U に対して従う. \square

定理 4.11 (一般化された spin-Feynman-Kac-Itô 公式) $\Psi \in \mathcal{B}_0$ としよう. T_t^Ψ の \mathbb{R} 上の分布を $\rho(\cdot, t)$ とする. $u_\beta \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\beta = 1, \dots, p$, $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ とし, 条件 (A2) を仮定する. さらに

$$\int_{\mathbb{R}} dr \rho(r, t) \int_0^r ds \int_{\mathbb{R}^d} dy \frac{e^{-|x-y|^2/(2s)}}{(2\pi s)^{d/2}} |\log u_\beta(y)| < \infty, \quad \beta = 1, \dots, p-1 \quad (4.25)$$

が成立しているとする. このとき

$$(f, e^{-th_p^\Psi(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}, V)} g) = \sum_{\alpha=1}^p \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \mu \times \nu}^{x, \alpha, 0} \left[e^{(p-1)T_t^\Psi} \overline{f(B_0, \theta_{N_0})} g(B_{T_t^\Psi}, \theta_{N_{T_t^\Psi}}) e^{\mathcal{S}^\Psi} \right]. \quad (4.26)$$

ここで $\mathcal{S}^\Psi = \mathcal{S}_V^\Psi + \mathcal{S}_a^\Psi + \mathcal{S}_S^\Psi$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_V^\Psi &= - \int_0^t V(B_{T_s^\Psi}) ds, \\ \mathcal{S}_a^\Psi &= -i \int_0^{T_t^\Psi} a(B_s) \circ dB_s, \\ \mathcal{S}_S^\Psi &= \begin{cases} - \int_0^{T_t^\Psi} (U(B_s, \theta_{N_s}) - E_p) ds + \sum_{\beta=1}^{p-1} \int_0^{T_t^\Psi+} \log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_{s-}})) dN_s^\beta & \text{if } E_p < 0, \\ - \int_0^{T_t^\Psi} (U(B_s, \theta_{N_s})) ds + \sum_{\beta=1}^{p-1} \int_0^{T_t^\Psi+} \log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_{s-}})) dN_s^\beta & \text{if } E_p \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

証明: (4.25) から

$$\mathbb{E}_{W \times \mu \times \nu}^{x, \alpha, 0} \left[\int_0^{T_t^\Psi} |\log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_{s-}}))| dN_s^\beta \right] \leq \int \rho(r, t) dr \int_0^r ds \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-|x-y|^2/(2s)}}{(2\pi s)^{d/2}} |\log u_\beta(y)| < \infty$$

が従うので

$$\int_0^{T_t^\Psi+} |\log(-U_\beta(B_s, \theta_{N_{s-}}))| dN_s^\beta < \infty \quad (4.27)$$

であることに注意しよう. 補題 4.10 から

$$\left(f, e^{-t\Psi(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}))} g \right) = \sum_{\alpha=1}^p \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \mu \times \nu}^{x, \alpha, 0} \left[e^{(p-1)T_t^\Psi} \overline{f(B_0, \theta_{N_0})} g(B_{T_t^\Psi}, \theta_{N_{T_t^\Psi}}) e^{\mathcal{S}_a^\Psi + \mathcal{S}_S^\Psi} \right]. \quad (4.28)$$

$0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$ に対して

$$\begin{aligned} & \left(f_0, \prod_{j=1}^n e^{-(t_j - t_{j-1})\Psi(\overline{h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})})} f_j \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^p \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \mu \times \nu}^{x, \alpha, 0} \left[e^{(p-1)T_t^\Psi} \overline{f_0(B_0, \theta_{N_0})} \left(\prod_{j=1}^n f_j(B_{T_{t_j}^\Psi}, \theta_{N_{T_{t_j}^\Psi}}) \right) e^{\mathcal{I}_a^\Psi + \mathcal{I}_S^\Psi} \right] \end{aligned} \quad (4.29)$$

となる. これは定理 3.14 (Step 2) の証明と同様にして示せる. V を連続としよう. トロツタ積公式と (4.29) により

$$\begin{aligned} \left(f, e^{-th_p^\Psi(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}, V)} g \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(f, \left(e^{-(t/n)\Psi(\overline{h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})})} e^{-(t/n)V} \right)^n g \right) \\ &= \sum_{\alpha=1}^p \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \mu \times \nu}^{x, \alpha, 0} \left[e^{(p-1)T_t^\Psi} \overline{f(B_0, \theta_{N_0})} g \left(B_{T_t^\Psi}, \theta_{N_{T_t^\Psi}} \right) e^{\mathcal{I}^\Psi} \right] \end{aligned}$$

となるから定理は連続な V に対して成立する. $V \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ までの拡張は容易である. \square

$E_p^0 = \inf \sigma(h_p(0, U, |U_1|, \dots, |U_{p-1}|))$ とする. 定理 4.11 から直ちに次の系が従う.

系 4.12 (双極不等式) 定理 4.11 の条件を仮定する. このとき $h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) - E_p^0 \geq 0$. さらに

(1) もし $\inf \sigma(h_p(0, U, |U_1|, \dots, |U_{p-1}|)) \geq 0$ ならば

$$\left| \left(f, e^{-t(\Psi(\overline{h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})}) + V)} g \right) \right| \leq \left(|f|, e^{-t(\Psi(\overline{h_p(0, U, |U_1|, \dots, |U_{p-1}|)}) + V)} |g| \right) \quad (4.30)$$

かつ

$$\inf \sigma \left(\Psi \left(\overline{h_p(0, U, |U_1|, \dots, |U_{p-1}|)} \right) + V \right) \leq \inf \sigma \left(\Psi \left(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) \right) + V \right),$$

(2) もし $E_p^0 < 0$ ならば,

$$\left| \left(f, e^{-t(\Psi(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) - E_p^0) + V)} g \right) \right| \leq \left(|f|, e^{-t(\Psi(\overline{h_p(0, U, |U_1|, \dots, |U_{p-1}|)}) + V)} |g| \right) \quad (4.31)$$

かつ

$$\inf \sigma \left(\Psi \left(\overline{h_p(0, U, |U_1|, \dots, |U_{p-1}|)} \right) + V \right) \leq \inf \sigma \left(\Psi \left(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) - E_p^0 \right) + V \right).$$

証明: 次の評価に注意せよ.

$$\left| \exp \left(\sum_{\beta=1}^{p-1} \int_0^{T_t^{\Psi+}} \log \left(-U_{\beta} \left(\theta_{N_s^{\beta-}} \right) \right) dN_s^{\beta} \right) \right| \leq \exp \left(\sum_{\beta=1}^{p-1} \int_0^{T_t^{\Psi+}} \log |U_{\beta} \left(\theta_{N_s^{\beta-}} \right)| dN_s^{\beta} \right). \quad (4.32)$$

定理 4.11 と (4.32) から

$$\left| (f, e^{-th_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})} g) \right| \leq (|f|, e^{-th_p(0, U, |U_1|, \dots, |U_{p-1}|)} |g|). \quad (4.33)$$

が従う. これはさらに $E_p^0 \leq E_p$ を意味し, $h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) - E_p^0 \geq 0$. が従う. (4.30) と (4.31) は定理 4.11 と (4.32) から従う. \square

系 4.13 条件 (A2) と (4.17) を仮定する. $|V|$ は $\Psi \left(\overline{h_p(0, U, |U_1|, \dots, |U_{p-1}|)} \right)$ に相対有界でその相対閾値を b とする. $\sum_{\beta=1}^p c_{\beta} < 1$ とする. このとき $|V|$ も $\Psi \left(\overline{h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})} \right)$ に相対有界でその相対閾値は b を超えない.

証明: $E_p^0 < 0$ の場合に証明する. $E_p^0 \geq 0$ の場合はより簡単に示せる. $\epsilon > 0$ に対して,

$$\|Vf\| \leq (b + \epsilon) \left\| \Psi \left(\overline{h_p(0, U, |U_1|, \dots, |U_{p-1}|)} \right) f \right\| + c \|f\|. \quad (4.34)$$

系 4.12 によって

$$\begin{aligned} & \frac{\| |V| \left(\Psi \left(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) - E_p^0 \right) + E \right)^{-1} f \|}{\|f\|} \\ & \leq \frac{\| |V| \left(\Psi \left(\overline{h_p(0, U, |U_1|, \dots, |U_{p-1}|)} \right) + E \right)^{-1} |f\|}{\|f\|}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

$E \rightarrow \infty$ のとき (4.34) から (4.35) の右辺は $b + \epsilon$ より小さな数へ収束する. よって

$$\|Vf\| \leq (b + \epsilon) \left\| \Psi \left(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) - E_p^0 \right) f \right\| + c_b \|f\|. \quad (4.36)$$

$X < Y$ かつ $X < 0$ としよう.

$$\Psi(u - X) - \Psi(u - Y) = b(Y - X) + \int_0^{\infty} e^{-(u-Y)y} (1 - e^{-(Y-X)y}) \lambda(dy), \quad u \geq Y,$$

なので $\sup_{u \geq Y} |\Psi(u - X) - \Psi(u - Y)| \leq \Psi(Y - X)$. これと $E_p^0 \leq E_p$ から

$$\sup_{u \geq E_p} |\Psi(u - E_p^0) - \Psi(u - E_p)| \leq \Psi(E_p - E_p^0)$$

をえる. よって

$$\|\Psi(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) - E_p^0)f\| \leq \|\Psi(h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}) - E_p)f\| + \Psi(E_p - E_p^0)\|f\|.$$

ϵ は任意だったので系が (4.36) から従う. \square

系 4.14 $\sum_{\beta=1}^p c_\beta < 1$ とする. V が $\Psi(\overline{h_p(0, U, |U_1|, \dots, |U_{p-1}|)})$ に相対有界でその相対閾値が真に 1 より小さいとする. さらに (4.17) を仮定する. $h_p^\Psi = h_p^\Psi(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}, V)$ とおく.

(1) 条件 (A2) を仮定する. このとき h_p^Ψ は $D\left(\Psi\left(\overline{h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})}\right)\right)$ 上で自己共役, また $\Psi\left(\overline{h_p(a, U, U_1, \dots, U_{p-1})}\right)$ の任意の芯上で本質的自己共役である. 特に条件 (A3) の下で h_p^Ψ は $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ 上で本質的自己共役である.

(2) 条件 (A3) を仮定する. このとき $e^{-th_p^\Psi}$ の経路積分表示は (4.26) で与えられる.

証明: (1) は自明. (2) も定理 3.14 の証明の (Step 4) と同様の近似理論で示せる. \square

4.4 スピン 1/2 相対論的 Schrödinger 作用素の経路積分表示

$d = 3, p = 2$ とする. よって $\theta_\alpha = \theta_\alpha^{(2)}$, $\alpha = 1, 2$, かつ $\theta_1 = -1, \theta_2 = +1$. 相対論的 Schrödinger 作用素は $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}^2)$ 上に

$$H = \sqrt{(\sigma \cdot (p - a))^2 + m^2} - m + V, \quad m \geq 0, \quad (4.37)$$

で与えられる. 条件 (A4) を仮定しよう. このとき (4.37) は

$$\sqrt{2h + m^2} - m + V \quad (4.38)$$

にユニタリー同値である. ここで h は $L^2(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2)$ 上に

$$hf(x, \theta) = \left(\frac{1}{2}(p - a)^2 f\right)(x, \theta) - \frac{1}{2}\theta b_3(x)f(x, \theta) - \frac{1}{2}\left(b_1(x) - i\theta b_2(x)\right)f(x, -\theta) \quad (4.39)$$

で定義される. 今までの記号 $h_p^\Psi(a, U, U_1, \dots, U_{p-1}, V)$ を使えば H は

$$H = h_2^\Psi\left(a, -\frac{1}{2}\theta b_3, -\frac{1}{2}(b_1 - i\theta b_2), V\right) \quad (4.40)$$

と表される. ここで, $\Psi(u) = \sqrt{2u + m^2} - m$.

定理 4.15 (スピン 1/2 相対論的 Schrödinger 作用素の spin-Feynman-Kac-Itô 公式) 条件 (A2) と以下の (1)-(4) を仮定する.

- (1) V は $\sqrt{-\Delta + m^2}$ に相対有界でその相対閾値が $A < 1$.
- (2) $-\frac{1}{2}b_j$, $j = 1, 2, 3$, は $-\Delta/2$ に相対有界でその相対閾値が $\kappa_j \geq 0$.
- (3) $A(1 - (\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3))^{-1/2} < 1$.
- (4) $\int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\log(\frac{1}{2}\sqrt{b_1(y)^2 + b_2(y)^2})|}{2\pi|x-y|} dy < \infty$, a.e. $x \in \mathbb{R}^3$.

このとき (4.40) の H は $\ell^2(\mathbb{Z}_2) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で本質的自己共役で

$$(f, e^{-tH}g) = \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}_{W \times \mu \times \nu}^{x, \alpha, 0} \left[e^{T_t^\Psi} \overline{f(B_0, \theta_{N_0})} g(B_{T_t^\Psi}, \theta_{N_{T_t^\Psi}}) e^{\mathcal{S}^\Psi} \right] \quad (4.41)$$

が成立する. ここで $\mathcal{S}^\Psi = \mathcal{S}_V^\Psi + \mathcal{S}_a^\Psi + \mathcal{S}_S^\Psi$ は

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_V^\Psi &= - \int_0^t V(B_{T_s^\Psi}) ds, \\ \mathcal{S}_a^\Psi &= -i \int_0^{T_t^\Psi} a(B_s) \circ dB_s, \\ \mathcal{S}_S^\Psi &= \int_0^{T_t^\Psi} \frac{1}{2} b_3(B_s) \theta_{N_s} ds + \int_0^{T_t^\Psi} \log \left(\frac{1}{2} (b_1(B_s) - i\theta_{N_s} b_2(B_s)) \right) dN_s \end{aligned}$$

で与えられる.

証明: $S = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_3 & \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \\ \sqrt{b_1^2 + b_2^2} & -b_3 \end{bmatrix}$, $h_2^0 = -\Delta/2 + S$ とおこう. S は $-\Delta/2$ に相対有界でその相対閾値は $\kappa = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3$. 相対論版を

$$H(0) = h_2^\Psi(0, -\frac{1}{2}\theta b_3 - E_2^0, -\frac{1}{2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}, V)$$

とおくと

$$|(f, Sf)| \leq \kappa(f, -\Delta/2f) + \kappa' \|f\|^2$$

なので

$$\|\sqrt{-\Delta + m^2}f\|^2 \leq \|(H(0) + m)f\|^2 + \kappa \|\sqrt{-\Delta + m^2}f\|^2 + (2|E_2^0| + \kappa') \|f\|^2.$$

また

$$\|Vf\| \leq A\|\sqrt{-\Delta + m^2}f\| + A'\|f\|$$

から

$$\|Vf\| \leq A(1 - \kappa)^{-1/2} \|H(0)f\| + \left(A' + Am + A\sqrt{2|E_2^0| + \kappa'} \right) \|f\|$$

がわかる. 条件 (3) により V は $H(0)$ に相対有界でその相対閾値は $A(1 - \kappa)^{-1/2} < 1$ なので, 少なくとも 1 より小さい. よって $\mathbb{C}^2 \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上での H の本質的自己共役性が系 4.14 から従う.

$$\int_0^\infty ds \int_{\mathbb{R}^3} dy (2\pi s)^{-3/2} e^{-\frac{|x-y|^2}{2s}} |\log(U_1(y))| = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\log(\frac{1}{2}\sqrt{b_1(y)^2 + b_2(y)^2})|}{2\pi|x-y|} dy < \infty$$

なので (4.25) は満たされる. よって $b_\mu \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ のとき (4.41) が定理 4.11 から従う. $b_\mu \notin L^\infty(\mathbb{R}^3)$ のときは, 近似の議論から (4.41) が導かれる. \square

次に双極不等式を導こう. スピンを含むと少々複雑な形になる.

$$\tilde{H} = h_2^\Psi(a, -\frac{1}{2}\theta b_3 - E_2^0, -\frac{1}{2}(b_1 - i\theta b_2), V)$$

としよう.

系 4.16 (双極不等式) 定理 4.15 の条件を仮定する. このとき

$$\left| (f, e^{-t\tilde{H}}g) \right| \leq (|f|, e^{-t(H(0)+V)}|g|). \quad (4.42)$$

特に $\inf\sigma(H(0) + V) \leq \inf\sigma(\tilde{H})$ が成り立つ.

次に磁場に零点が存在する場合を考えよう. つまり, $b_1(x) - i\theta b_2(x)$ がある $x \in \mathbb{R}^d$ で消える場合を考える. このとき

$$\int_0^\infty \left| \log \frac{1}{2}(b_1(B_s) - i\theta_{N_{s-}} b_2(B_s)) \right| dN_s < \infty$$

は非自明である. $\delta_\epsilon(z) = \begin{cases} 1, & |z| < \epsilon/2, \\ 0, & |z| \geq \epsilon/2, \end{cases}$ $z \in \mathbb{C}$, として $\chi_\epsilon(z) = z + \epsilon\delta_\epsilon(z)$ とおく. こうすれば

$$\left| \chi_\epsilon \left(-\frac{1}{2}(b_1(x) - i\theta b_2(x)) \right) \right| > \epsilon/2, \quad (x, \theta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{Z}_2$$

となりゼロ点が回避できる. H_ε を $H = h_2^\Psi(a, -\frac{1}{2}\theta b_3, -\frac{1}{2}(b_1 - i\theta b_2), V)$ の非対角部分を $\chi_\varepsilon(-\frac{1}{2}(b_1(x) - i\theta b_2(x)))$ で置き換えたものとして定義する. 即ち

$$H_\varepsilon = h_2^\Psi(a, -\frac{1}{2}\theta b_3, \chi_\varepsilon(-\frac{1}{2}(b_1 - i\theta b_2)), V).$$

定理 4.15 の条件の下 (ただし (4) を仮定しない) H_ε が $\ell^2(\mathbb{Z}_2) \otimes C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ 上で本質的自己共役となることが示せる. H_ε の経路積分表示は (4.41) で \mathcal{S}_S^Ψ の代わりに

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_S^\Psi(\varepsilon) = & \int_0^{T_t^\Psi} \left(\frac{1}{2}b_3(B_s)\theta_{N_s} - \inf\sigma(H_\varepsilon) \right) ds \\ & + \int_0^{T_t^\Psi+} \log \left(-\chi_\varepsilon \left(-\frac{1}{2}(b_1(B_s) - i\theta_{N_s} b_2(B_s)) \right) \right) dN_s \end{aligned}$$

とすればいい. さらに $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \exp(-tH_\varepsilon) = \exp(-tH)$ なので, 条件 (A4) と定理 4.15(1)-(3) を仮定すると,

$$(f, e^{-tH}g) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}_{W \times \mu \times \nu}^{x, \alpha, 0} \left[e^{T_t^\Psi} \overline{f(B_0, \theta_{N_0})} g(B_{T_t^\Psi}, \theta_{N_{T_t^\Psi}}) e^{\mathcal{S}_S^\Psi(\varepsilon)} \right] \quad (4.43)$$

与えられる. ここで $\mathcal{S}^\Psi(\varepsilon) = \mathcal{S}_V^\Psi + \mathcal{S}_a^\Psi + \mathcal{S}_S^\Psi(\varepsilon)$. 各 $(x, \omega, \omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^3 \times \Omega \times \Omega_\mu \times \Omega_\nu$ ごとに, 数 $n = n(\omega_1, \omega_2)$ とランダムなジャンプ数 $r_1(\omega_1), \dots, r_n(\omega_1)$ で次を満たすものがある.

$$\int_0^{T_t(\omega_2)+} \log W(x + B_s(\omega)) dN_s = \sum_{j=1}^{n(\omega_1, \omega_2)} \log W(x + B_{r_j(\omega_1)}(\omega)).$$

ここで

$$W(X) = \frac{1}{2} \sqrt{b_1^2(X) + b_2^2(X)}$$

とおいた. 次の集合を考える.

$$\mathcal{W} = \left\{ (x, \omega, \omega_1, \omega_2) \in \mathbb{R}^d \times \Omega \times \Omega_\mu \times \Omega_\nu \left| \int_0^{T_t+} \log W(x + B_s) dN_s > -\infty \right. \right\}. \quad (4.44)$$

定義から $(x, \omega, \omega_1, \omega_2) \in \mathcal{W}^c$ ということは次の (1)-(3) を満たす r が存在することと必要十分である.

- (1) $0 < r \leq t \leq T_t(\omega_2)$,
- (2) $s \mapsto N_s$ is discontinuous at $s = r$,

$$(3) \quad b_1(B_r(\omega)) = b_2(B_r(\omega)) = 0.$$

このとき, 次が示せる.

補題 4.17 各 $(x, \omega, \omega_1, \omega_2) \in \mathscr{W}^c$ ごとに

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| e^{\int_0^{T_t+} \log(-\chi_\varepsilon(-\frac{1}{2}(b_1(B_s) - i\theta_{N_s} - b_2(B_s)))) dN_s} \right| = 0.$$

証明: はじめに

$$\left| e^{\int_0^{T_t+} \log(-\chi_\varepsilon(-\frac{1}{2}(b_1(B_s) - i\theta_{N_s} - b_2(B_s)))) dN_s} \right| \leq e^{\int_0^{T_t+} \log(W(B_s) + \varepsilon) dN_s}.$$

以下を注意せよ.

$$\int_0^{T_t+} \log(W(B_s) + \varepsilon) dN_s = \sum_{j=1}^n \log(W(B_{r_j}) + \varepsilon), \quad r_1, \dots, r_n \in (0, T_t].$$

$(x, \omega, \omega_1, \omega_2) \in \mathscr{W}^c$ なので, r_i で $b_1(B_{r_i}(\omega)) = b_2(B_{r_i}(\omega)) = 0$ となるものが存在する. よって

$$\begin{aligned} \int_0^{T_t+} \log(W(B_s) + \varepsilon) dN_s &= \sum_{j \neq i}^n \log(W(B_{r_j}) + \varepsilon) + \log \varepsilon, \\ e^{\int_0^{T_t+} \log(W(B_s) + \varepsilon) dN_s} &\leq e^{\sum_{j \neq i}^n \log(W(B_{r_j}) + \varepsilon)} e^{\log \varepsilon}. \end{aligned}$$

これから $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left| e^{\int_0^{T_t+} \log(W(B_s) + \varepsilon) dN_s} \right| = 0$ となる. □

定理 4.18 (磁場に零点がある場合の spin-Feynman-Kac-Itô 公式) 定理 4.15 の条件 ((4) 以外) を仮定する. このとき

$$(f, e^{-tH} g) = \sum_{\alpha=1,2} \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}_{W \times \mu \times \nu}^{x, \alpha, 0} \left[e^{T_t \overline{f(\xi_0)}} g(\xi_t) e^{\mathcal{J}} \mathbf{1}_{\mathscr{W}} \right]. \quad (4.45)$$

証明: (4.43) と補題 4.17 から従う. □

4.5 固有状態の空間的減衰性

[HIL13] では

$$H = \sqrt{(\sigma \cdot (p - a))^2 + m^2} + V$$

の固有状態 φ_p の空間的減衰性の評価が与えられている. スピンがない場合は [Car78, CMS90] で与えられている. [HIL13] の結果のみを述べる.

定理 4.19 (固有状態の空間的減衰性) $H\varphi_p = E_p\varphi_p$ とする. $b_3 \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$, $W = \sqrt{b_1^2 + b_2^2} \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ として, V が Ψ -Kato 分解可能と仮定する. ただし, $\Psi(u) = \sqrt{2u + m^2} - m$.

(1) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$ のとき, $a, b > 0$ が存在して,

$$|\varphi_p(x, (-1)^\alpha)| \leq be^{-a|x|}. \quad (4.46)$$

(2) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0$ のときは, さらに $m^2 - \|b_3\|_\infty - \|W\|_\infty > 0$ で

$$m - \sqrt{m^2 - \|b_3\|_\infty - \|W\|_\infty} < -2E_p$$

を仮定する. このとき (4.46) が成り立つ.

証明: 命題 2.4 の Martingale 性を応用して証明する. 詳しくは [HIL13, Theorems 4.7, 4.8] を参照せよ. \square

4.6 参考文献など

第 3 章, 第 4 章に関連する参考文献などをあげておく. 相対論的な Schrödinger 作用素やスピンの 1/2 相対論的な Schrödinger 作用素の生成する熱半群の経路積分表示は [ALS83, ARS91] で与えられている. 数学的に厳密な解析は [HIL12] で議論されている. 特に第 3 章, 第 4 章は [HIL12] の結果である. 実は, [ALS83, ARS91] の結果を全く知らずに考えていて, [HIL12] がほぼ完成してから, 先行結果の存在を知って驚いた.

第 4.5 節は [HIL13] による. 第 3.6 節は [HL12] による.

5 Kato クラスと Ψ -Kato クラス

5.1 Kato-クラス

Schrödinger 作用素 H_p が生成する熱半群 e^{-tH_p} を確率論的に解析するために便利な Kato クラスといわれるポテンシャルのクラスを導入する.

定義 5.1 (Kato クラス) 可測関数 $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ が

$$\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_W^x \left[\int_0^t |V(B_s)| ds \right] = 0$$

を満たすとき V を Kato クラスのポテンシャルといい. その全体を \mathcal{K}_d であらわす.

$V = V_+ - V_-$ とし, $V_+ \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, $V_- \in \mathcal{K}_d$ となるとき, V は Kato 分解可能という. Kato クラスの同値な定義が知られている. $V \in \mathcal{K}_d$ であるための必要十分条件は

$$\limsup_{r \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y| < r} |g(x-y)V(y)| dy = 0. \quad (5.1)$$

ここで $g(x) = \begin{cases} |x| & d = 1 \\ -\log|x| & d = 2 \\ |x|^{2-d} & d \geq 3 \end{cases}$. Kato クラスポテンシャルの例をあげる.

(1) $d = 3$ で $|x|^{-(2-\varepsilon)}$ ($\varepsilon > 0$),

(2) $V \in L^p(\mathbb{R}^d) + L^\infty(\mathbb{R}^d)$. ここで $p = 1$ ($d = 1$), $p > d/2$ ($d \geq 2$).

命題 5.2 $V \in \mathcal{K}_d$ ならば $W(x) = \sum_{i \neq j}^N V(x^i - x^j) \in \mathcal{K}_{dN}$ ($x = (x^1, \dots, x^N) \in \mathbb{R}^{dN}$).

証明: [CFKS87] を参照せよ. □

命題 5.3 $0 \leq V \in \mathcal{K}_d$ としよう. このとき $\beta, \gamma > 0$ で次を満たすものが存在する

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_W^x [e^{\int_0^t V(B_s) ds}] < \gamma e^{t\beta}. \quad (5.2)$$

証明: [LHB11, Section 3] を参照せよ. □

$-\frac{1}{2}\Delta + V$ で V が Kato 分解可能な場合を考える. このとき, 写像

$$L^2(\mathbb{R}^d) \ni f \mapsto S_t f(x) = \mathbb{E}_W^x [e^{-\int_0^t V(B_s) ds} f] \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

が定義できる. さらに S_t , $t \in \mathbb{R}$, が対称な C_0 半群になることもわかるから, 下から有界な自己共役作用素 h が一意的に存在して $S_t = e^{-th}$ と表せる. この h を $h = -\frac{1}{2}\Delta + V$ と書くことにする.

5.2 Ψ -Kato クラス

$\Psi \in \mathcal{B}_0$ に対応する $(\Omega_\nu, \mathcal{F}_\nu, \nu)$ 上の subordinator を $(T_t^\Psi)_{t \geq 0}$ と表す. このとき確率過程

$$X_t : \Omega \times \Omega_\nu \ni (w, \tau) \mapsto B_{T_t^\Psi(\tau)}(w), \quad t \geq 0,$$

は Lévy 過程で, その特性関数は

$$\mathbb{E}_{W \times \nu}^{0,0} [e^{iuX_t}] = e^{-t\Psi(u^2/2)}$$

である. $(X_t)_{t \geq 0}$ を subordinated Brownian motion という.

条件 5.4 $\Psi \in \mathcal{B}_0$ は $\int_0^\infty e^{-t\Psi(u^2/2)} du < \infty, \forall t > 0$, を満たす.

条件 5.4 の下で

$$p_t(x) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ixu} e^{-t\Psi(u^2/2)} du \quad (5.3)$$

とそのラプラス変換

$$\Pi_\lambda(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_t(x) dt$$

を定義する. $d = 3$ のとき Π_λ は次で与えられる.

$$\Pi_\lambda(x) = \frac{1}{2\pi^2|x|} \int_0^\infty \frac{r \sin r}{|x|^2 \left(\lambda + \Psi \left(\frac{r^2}{2|x|^2} \right) \right)} dr.$$

$\|f\|_{l^1(L^\infty)} = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}^d} \sup_{x \in C_\alpha} |f(x)|$ とする. ここで C_α は中心が $\alpha \in \mathbb{Z}^d$ の単位立方体とする.

条件 5.5 p_t は $\sup_{t>0} \|\mathbb{1}_{\{|x|>\delta\}} p_t\|_{l^1(L^\infty)} < \infty$ を満たす.

もし p_t が回転対称で動径方向に非増加であれば, 条件 5.5 は満たされる. 次の事実は [CMS90, 定理 III.1] と同様にして示すことができる.

命題 5.6 $V \geq 0$ とする. 条件 5.4 と 5.5 の下で, 以下の 3 つは同値である.

- (1) $\lim_{t \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_0^t \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} [V(X_s)] ds = 0,$
- (2) $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} ((\Psi(h(0)) + \lambda)^{-1} V)(x) = 0,$
- (3) $\lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \int_{|x-y|<\delta} \Pi_1(x-y) V(y) dy = 0.$

定義 5.7 (Ψ -Kato クラス) 条件 5.4 と 5.5 を仮定する. V が Ψ -Kato クラス であるとは命題 5.6 の (1)-(3) のどれかを満たすことである.

$V = V_+ - V_-$ で V_- が Ψ -Kato クラス, $V_+ \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ のとき, V は Ψ -Kato 分解可能という.

定理 5.8 $\Psi \in \mathcal{B}_0$ とし V は Ψ -Kato 分解可能とする. 条件 (A2) を仮定し

$$U_t f(x) = \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[e^{-i \int_0^t a(B_s) \circ dB_s} e^{-\int_0^t V(B_{T_s^\Psi}) ds} f(B_{T_t^\Psi}) \right]$$

とする. このとき $(U_t)_{t \geq 0}$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の対称な C_0 半群である. 特に

$$U_t = e^{-tK^\Psi(a,V)}, \quad t \geq 0,$$

となる自己共役作用素 $K^\Psi(a,V)$ がただ一つ存在する.

証明: V が Ψ -Kato 分解可能のとき

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[e^{\int_0^t V(X_s) ds} \right] < \infty \quad (5.4)$$

が成り立つことに注意しよう. よって

$$\|U_t f\|^2 \leq C_t \|e^{-t\Psi(h(0))} f\|^2 \leq C_t \|f\|^2$$

が従う. ここで $C_t = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} [e^{2 \int_0^t V_-(X_s) ds}]$ である. 故に U_t は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の有界作用素である. 後の補題 4.10 の証明と同じように半群性 $U_t U_s = U_{t+s}$ を示すことができる. U_t の t に関する強連続性を示そう. U_t が一様に有界なので, 弱連続性を示せば十分である. いま $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき

$$(f, U_t g) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[\overline{f(B_0)} g(B_{T_t}) e^{-i \int_0^{T_t} a(B_s) \circ dB_s} e^{-\int_0^{T_t} V(B_{T_s}) ds} \right]$$

である. $T_t(\tau) \rightarrow 0$ ($t \rightarrow 0$) が各 $\tau \in \Omega_\nu$ でいえるので, 優収束定理より $(f, U_t g) \rightarrow (f, g)$ がわかる. 最後に U_t の対称性 $U_t^* = U_t$ を示そう. 簡単な極限操作により $a \in (C_b^2(\mathbb{R}^d))^d$ に対して示せば十分である. $\tilde{B}_s = \tilde{B}_s(w, \tau) = B_{T_t(\tau)-s}(w) - B_{T_t(\tau)}(w)$ とする. このとき各 $\tau \in \Omega_\nu$ に対して $\tilde{B}_s \stackrel{d}{=} B_s$ となる. よって

$$(f, U_t g) = \mathbb{E}_{W \times \nu}^{0,0} \left[\int_{\mathbb{R}^d} dx \overline{f(x - \tilde{B}_{T_t})} e^{-i \int_0^{T_t} a(x + \tilde{B}_s - \tilde{B}_{T_t}) \circ d\tilde{B}_s} e^{-\int_0^{T_t} V(x + \tilde{B}_{T_s} - \tilde{B}_{T_t}) ds} g(x) \right]$$

となる²². ここで変数変換 $x \rightarrow x - \tilde{B}_{T_t}$ をして, さらに

$$\int_0^{T_t} a(\tilde{B}_s - \tilde{B}_{T_t}) \circ d\tilde{B}_s = - \int_0^{T_t} a(B_s) \circ dB_s$$

となるから, $\tilde{B}_{T_t} \stackrel{d}{=} -B_{T_t}$ かつ $\tilde{B}_{T_s} - \tilde{B}_{T_t} \stackrel{d}{=} B_{T_t-T_s}$ より

$$(f, U_t g) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[\overline{f(B_{T_t})} e^{+i \int_0^{T_t} a(B_s) \circ dB_s} e^{-\int_0^{T_t} V(B_{T_t-T_s}) ds} g(x) \right]$$

²²これは形式的な式変形である. $\int_0^{T_t} a(x + \tilde{B}_s - \tilde{B}_{T_t}) \circ d\tilde{B}_s$ の被積分関数が適合してないように見えるが, 確率積分の定義に舞い戻って実は正当化できる. 詳しくは [HIL12] を参照せよ.

となる. さらに $T_t - T_s \stackrel{d}{=} T_{t-s}$ ($0 \leq s \leq t$) から

$$(f, U_t g) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \overline{\mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} \left[f(B_{T_t}) e^{-i \int_0^{T_t} a(B_s) \circ dB_s} e^{-\int_0^t V(B_{T_s}) ds} \right]} g(x) = (U_t f, g)$$

がわかる. よって U_t は対称である. $U_t = e^{-tK^\Psi(a,V)}$ となる自己共役作用素 $K^\Psi(a,V)$ の存在は Hille-Yoshida 定理による. \square

V は Ψ -Kato クラス で条件 (A2) を仮定する. このとき $K^\Psi(a,V)$ を Ψ -Kato クラスポテンシャルをもった一般化された Schrödinger 作用素とよぶ.

定理 5.9 ($L^p - L^q$ 有界性) V は Ψ -Kato 分解可能で条件 (A2) を仮定する. このとき $e^{-tK^\Psi(a,V)}$ は $L^p(\mathbb{R}^d)$ から $L^q(\mathbb{R}^d)$ ($1 \leq \forall p \leq \forall q \leq \infty$) への有界作用素へ拡張できる. さらに

$$\|e^{-tK^\Psi(a,V)}\|_{p,q} \leq \|e^{-tK^\Psi(0,V)}\|_{p,q}$$

が成立する.

証明: Riesz-Thorin 定理により $e^{-tK^\Psi(a,V)}$ が (1) $L^\infty(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$, (2) $L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^d)$, (3) $L^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}^d)$ の有界作用素として拡張できることを示せば十分である.

$$|e^{-tK^\Psi(a,V)} f(x)| \leq e^{-tK^\Psi(0,V)} |f|(x), \quad (5.5)$$

なので, (1)-(3) を $e^{-tK^\Psi(0,V)}$ に対して示せばいい. $S_t = e^{-tK^\Psi(0,V)}$ とおく. 即ち $S_t f(x) = \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} [e^{-\int_0^t V(X_s) ds} f(X_t)]$ とする. $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ としよう. (5.4) により

$$\|S_t f\|_\infty \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left(\mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0} [e^{-\int_0^t V(X_s) ds}] \right) \|f\|_\infty$$

だから (1) が従う. 次に $0 \leq f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $g \equiv 1 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ としよう. このとき $S_t g \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ となることは (1) からわかる. 定理 5.8 の U_t の対称性の証明と同じようにして

$$\int_{\mathbb{R}^d} dx [f(x) \cdot S_t g(x)] = \int_{\mathbb{R}^d} dx [S_t f(x) \cdot g(x)] = \int_{\mathbb{R}^d} dx [S_t f(x)]$$

が示せる. $S_t f(x) \geq 0$ なので $\|S_t f\|_1 \leq \|f\|_1 \|S_t 1\|_\infty$ となる. 任意の $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ を $f = \Re f_+ - \Re f_- + i(\Im f_+ - \Im f_-)$ のように分ければ $\|S_t\|_1 \leq 4\|f\|_1 \|S_t 1\|_\infty$ となり (2) が示せた. (1) と (2) と Riesz-Thorin 定理により S_t が $L^p(\mathbb{R}^d)$ から $L^p(\mathbb{R}^d)$ への有界作用素となることがわかる. 最後に下図のダイアグラムに沿って (3) を示そう.

$$L^1(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{S_t} L^2(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{S_t} L^\infty(\mathbb{R}^d). \quad (5.6)$$

$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき

$$\|S_t f\|_\infty^2 \leq \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0}[e^{-2 \int_0^t V(X_s) ds}] \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0}[|f(X_t)|^2] \leq C_t \int_{\mathbb{R}^d} dx |f(x+y)|^2 p_t(y) dy$$

は (5.4) からわかる. ここで $C_t = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{W \times \nu}^{x,0}[e^{-2 \int_0^t V(X_s) ds}]$. また条件 5.4 から

$$|p_t(y)| \leq \int_0^\infty e^{-t\Psi(u^2/2)} du < \infty$$

が従うので

$$\|S_t f\|_\infty \leq (C_t \|p_t\|_\infty)^{1/2} \|f\|_2 \quad (5.7)$$

がわかる. よって S_t は $L^2(\mathbb{R}^d)$ から $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ への有界作用素である. 次に $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ かつ $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ としよう. このとき $\int_{\mathbb{R}^d} dx [S_t f(x) \cdot g(x)] = \int_{\mathbb{R}^d} dx [f(x) \cdot S_t g(x)]$. よって (5.7) から

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} dx S_t f(x) \cdot g(x) \right| \leq \|S_t g\|_\infty \|f\|_1 \leq (C_t \|p_t\|_\infty)^{1/2} \|g\|_2 \|f\|_1$$

をえる. $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は任意なので $S_t f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ と

$$\|S_t f\|_2 \leq (C_t \|p_t\|_\infty)^{1/2} \|f\|_1 \quad (5.8)$$

が従う. その結果, S_t は $L^1(\mathbb{R}^d)$ から $L^2(\mathbb{R}^d)$ への有界作用素になることがわかる. よってダイアグラム (5.6) が示せた. $(X_t)_{t \geq 0}$ の Markov 性から S_t が $L^p(\mathbb{R}^d)$ 上の半群になることもわかる. この半群性と (5.6) から $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ に対して,

$$\|S_t f\|_\infty = \|S_{t/2} S_{t/2} f\|_\infty \leq (C_{t/2} \|p_{t/2}\|_\infty)^{1/2} \|S_{t/2} f\|_2 \leq C_{t/2} \|p_{t/2}\|_\infty \|f\|_1$$

となり, (3) が示せた. $\|e^{-tK^\Psi(a,V)}\|_{p,q} \leq \|e^{-tK^\Psi(0,V)}\|_{p,q}$ は (5.5) からわかる. \square

6 $P(\phi)_1$ 過程

6.1 基底状態変換と $P(\phi)_1$ 過程

ここで説明する $P(\phi)_1$ 過程というのは, Ornstein-Uhlenbeck 過程の一般化である. まずは, 自己共役作用素の基底状態の定義を与える.

定義 6.1 (基底状態) 自己共役作用素 K のスペクトルの下限を E とかく. $m = \dim \text{Ker}(K - E)$ とおく. $m \geq 1$ となるとき K の基底状態は存在するといいい, $m = 1$ のとき K の基底状態は一意的に存在するという. また $m = 0$ のとき K の基底状態は存在しないという.

H_p は正規化された基底状態 $\varphi_p > 0$ をもつと仮定する. $H_p \varphi_p = E_p \varphi_p$ として,

$$\overline{H}_p = H_p - E_p \quad (6.1)$$

とおく. 基底状態が正規化されているので

$$dN_0 = \varphi_p^2(x) dx \quad (6.2)$$

は \mathbb{R}^d 上の確率測度になる.

定義 6.2 (基底状態変換) $\mathcal{U} : L^2(\mathbb{R}^d, dN_0) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d, dx)$, $f \mapsto \varphi_p f$ を基底状態変換という²³.

基底状態変換はユニタリー変換である. 基底状態変換した自己共役作用素を

$$L_p = \mathcal{U}^{-1} \overline{H}_p \mathcal{U}, \quad D(L_p) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d, dN_0) \mid \mathcal{U} f \in D(\overline{H}_p)\} \quad (6.3)$$

で定義する. $-\Delta$ に付随した拡散過程が Brown 運動であるように, L_p に付随した拡散過程²⁴ $(X_t)_{t \geq 0}$ が存在する. 形式的には次のように考える.

$$L_p f = -\frac{1}{2} \Delta f - \nabla \log \varphi_p \cdot \nabla f$$

なので確率微分方程式 (SDE)

$$dX_t = \nabla \log \varphi_p(X_t) dt + dB_t, \quad X_0 = x \quad (6.4)$$

の解 $(X_t^x)_{t \geq 0}$ は Itô の公式から

$$\mathbb{E}_W[f(X_t^x)] = (e^{-tL_p} f)(x) \quad (6.5)$$

を満たすことがわかる. 例として調和振動子について考えてみる. 次元を $d = 1$ とし

$$V(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \quad (6.6)$$

²³ 確率論では Doob の h -変換として知られている.

²⁴ パスが連続な Markov 過程を拡散過程という.

とする. 調和振動子

$$H_{\text{osc}} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} \quad (6.7)$$

を考える. その基底状態は

$$\Psi_{\text{osc}}(x) = (1/\pi)^{1/4} e^{-x^2/2} \quad (6.8)$$

基底状態変換 $\mathcal{U}_g : L^2(\mathbb{R}, \Psi_{\text{osc}}^2 dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{U}_g f = \Psi_{\text{osc}} f$, により

$$L_{\text{osc}} = \mathcal{U}_g^{-1} H_{\text{osc}} \mathcal{U}_g = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + x \frac{d}{dx}.$$

Ψ_{osc} が具体的に分かっているので $\nabla \log \Psi_{\text{osc}}(x) = -x$ となり, 次の SDE

$$dX_t = -X_t dt + dB_t, \quad B_0 = x \quad (6.9)$$

を考える. その解は Ornstein-Uhlenbeck 過程

$$X_t^x = e^{-t} x + \int_0^t e^{-(t-s)} dB_s \quad (6.10)$$

といわれる. Itô の公式から $\mathbb{E}_W[f(X_t^x)] = (e^{-t} L_p f)(x)$ を満たすこともわかる.

しかし, 一般の H_p を考えるとき, SDE(6.4) が well-defined かどうか, また, その解が存在するかどうか, これらを厳密にチェックするのは容易ではない. しかし, SDE を経由せずに $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ 上の確率測度 \mathcal{N}_0^x , $x \in \mathbb{R}^d$, で拡散過程 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ が (6.5) を満たし, L_p を生成するものを構成することが出来る.

定理 6.3 ($P(\phi)_1$ 過程の存在) V は Kato 分解可能で, H_p は基底状態 $\varphi_p > 0$ をもち. $L_p = \mathcal{U}^{-1} \bar{H} \mathcal{U}$ はその基底状態変換とする. X_t は $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ 上の座標過程とする. このとき $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ 上に確率測度 \mathcal{N}_0^x で以下を満たすものが存在する.

(初期分布) $\mathcal{N}_0^x(X_0 = x) = 1$.

(鏡映対称性) $(X_t)_{t \geq 0}$ と $(X_s)_{s \leq 0}$ は独立で²⁵ $X_{-t} \stackrel{d}{=} X_t$.

(Markov 性) フィルトレーションを $\mathcal{F}_t^+ = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$, $\mathcal{F}_t^- = \sigma(X_s, t \leq s \leq 0)$ と定義する. このとき $(X_t)_{t \geq 0}$ と $(X_s)_{s \leq 0}$ は $(\mathcal{F}_t^+)_{t \geq 0}$ と $(\mathcal{F}_t^-)_{t \leq 0}$ に関して各々拡散過程である. i.e., $s, t \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}[X_{t+s} | \mathcal{F}_s^+] &= \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}[X_{t+s} | \sigma(X_s)] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^{X_s}}[X_t], \\ \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}[X_{-t-s} | \mathcal{F}_{-s}^-] &= \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}[X_{-t-s} | \sigma(X_{-s})] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^{X_{-s}}}[X_{-t}]. \end{aligned}$$

ここで $\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^{X_s}}$ は $\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^y}$ で $y = X_s$ としたもの. さらに $\mathbb{R} \ni t \mapsto X_t \in \mathbb{R}^d$ が a.s. に連続.

²⁵分布 (distribution) が等しい.

(シフト不変性) $-\infty < t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n < \infty$ とする. このとき

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x} \left[\prod_{j=0}^n f_j(X_{t_j}) \right] d\mathbf{N}_0 = (f_0, e^{-(t_1-t_0)L_p} f_1 \dots e^{-(t_n-t_{n-1})L_p} f_n)_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mathbf{N}_0)}.$$

ここで $f_0, f_n \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mathbf{N}_0)$, $f_j \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, \dots, n-1$. 特にシフト不変になる.

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x} \left[\prod_{j=1}^n f_j(X_{t_j}) \right] d\mathbf{N}_0 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x} \left[\prod_{j=1}^n f_j(X_{t_j+s}) \right] d\mathbf{N}_0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

定義 6.4 ($P(\phi)_1$ 過程) 確率空間 $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathcal{N}_0^x)$ 上の座標過程 X_t を $P(\phi)_1$ 過程という.

定理 6.3 の証明の概略. $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ に対して, 集合関数 $\nu_{t_0, \dots, t_n} : \times_{j=0}^n \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ を次で定義する

$$\nu_{t_0, \dots, t_n} (\times_{i=0}^n A_i) = (\mathbb{1}_{A_0}, e^{-(t_1-t_0)L_p} \mathbb{1}_{A_1} \dots e^{-(t_n-t_{n-1})L_p} \mathbb{1}_{A_n})_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mathbf{N}_0)} \quad (6.11)$$

また $\nu_t : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\nu_t (A) = (\mathbb{1}, e^{-tL_p} \mathbb{1}_A)_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mathbf{N}_0)} = (\mathbb{1}, \mathbb{1}_A)_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mathbf{N}_0)} \quad (6.12)$$

とする.

(Step 1)

補題 6.5 (6.11)-(6.12) で与えられる集合関数族 $\{\nu_\Lambda\}_{\Lambda \subset \mathbb{R}, |\Lambda| < \infty}$ は consistency 条件

$$\nu_{t_0, \dots, t_{n+m}} ((\times_{i=0}^n A_i) \times (\times_{i=n+1}^{n+m} \mathbb{R}^d)) = \nu_{t_0, \dots, t_n} (\times_{i=0}^n A_i)$$

を満たす.

証明: これは (6.11) から従う. □

柱状集合を $\mathcal{A} = \{w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d \mid w|_\Lambda \in E, E \in (\mathcal{B}(\mathbb{R}^d))^{|\Lambda|}, \Lambda \subset \mathbb{R}, |\Lambda| < \infty\}$ とおく. 補題 6.5 から Kolmogorov の拡張定理により確率測度 ν_∞ が $(\mathbb{R}^d)^{[0, \infty)}, \sigma(\mathcal{A})$ 上に存在することがわかる. ここで

$$\nu_t (A) = \mathbb{E}_{\nu_\infty} [\mathbb{1}_A(Y_t)], \quad (6.13)$$

$$\nu_{t_0, \dots, t_n} (\times_{i=0}^n A_i) = \mathbb{E}_{\nu_\infty} \left[\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(Y_{t_j}) \right], \quad n \geq 1. \quad (6.14)$$

$(Y_t)_{t \geq 0}$ は座標過程である. その結果 $((\mathbb{R}^d)^{[0, \infty)}, \sigma(\mathcal{A}), \nu_\infty)$ 上の確率過程 $(Y_t)_{t \geq 0}$ は次を満たすことがわかる.

$$(f_0, e^{-(t_1-t_0)L_P} f_1 \cdots e^{-(t_n-t_{n-1})L_P} f_n)_{L^2(\mathbb{R}^d, dN_0)} = \mathbb{E}_{\nu_\infty} \left[\prod_{j=0}^n f_j(Y_{t_j}) \right] \quad (6.15)$$

$$(1, f)_{L^2(\mathbb{R}^d, dN_0)} = (1, e^{-tL_P} f)_{L^2(\mathbb{R}^d, dN_0)} = \mathbb{E}_{\nu_\infty} [f(Y_t)] = \mathbb{E}_{\nu_\infty} [f(Y_0)]. \quad (6.16)$$

ここで $f_j \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, $j = 0, 1, \dots, n$, $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$.

(Step 2)

補題 6.6 $(Y_t)_{t \geq 0}$ は連続修正をもつ.

証明: Kolmogorov-Čentsov 定理から, ある $n \geq 2$ に対して

$$\mathbb{E}_{\nu_\infty} [|Y_t - Y_s|^{2n}] \leq |t - s|^n$$

を示せば十分. $s < t$ とする.

$$\mathbb{E}_{\nu_\infty} [|Y_t - Y_s|^{2n}] = \sum_{\mu=1}^d \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} (-1)^k (\varphi_P, x^\mu e^{-(t-s)\overline{H}_P} x^\mu \varphi_P)$$

となる. Brown 運動で

$$(\varphi_P, x^\mu e^{-(t-s)\overline{H}_P} x^\mu \varphi_P) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[B_0^\mu \varphi_P(B_0) B_{t-s}^\mu \varphi_P(B_{t-s}) e^{-\int_0^{t-s} V(B_r) dr} \right] e^{(t-s)E_P}$$

と示せる. Schwarz の不等式より,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\nu_\infty} [|Y_t - Y_s|^{2n}] &= \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[|B_{t-s} - B_0|^{2n} \varphi_P(B_0) \varphi_P(B_{t-s}) e^{-\int_0^{t-s} V(B_r) dr} \right] e^{(t-s)E_P} \\ &\leq \mathbb{E}_W^0 \left[|B_{t-s} - B_0|^{2n} \left(\int_{\mathbb{R}^d} dx e^{-2 \int_0^t V(B_r+x) dr} \varphi_P(x)^2 \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} dx \varphi_P(B_{t-s} + x)^2 \right)^{1/2} \right] e^{(t-s)E_P} \\ &\leq \mathbb{E}_W^0 [|B_{t-s} - B_0|^{4n}]^{1/2} \mathbb{E}_W^0 \left[\left(\int_{\mathbb{R}^d} dx e^{-2 \int_0^t V(B_r+x) dr} \varphi_P(x)^2 \right) \right] \|\varphi_P\|^2 e^{(t-s)E_P}. \end{aligned}$$

V が Kato 分解可能なので,

$$\begin{aligned} &\leq \mathbb{E}_W^0 [|B_{t-s} - B_0|^{4n}]^{1/2} \sup_x \mathbb{E}_W^x \left[e^{-2 \int_0^t V(B_s) ds} \right] \|\varphi_P\|^2 e^{-(t-s)E_P} \\ &\leq \sqrt{C_{2n}} |t - s|^n \sup_x \mathbb{E}_W^x \left[e^{-2 \int_0^t V(B_s) ds} \right] \|\varphi_P\|^2 e^{-(t-s)E_P}. \end{aligned}$$

ここで, Brown 運動のモーメント

$$\mathbb{E}_W^x[|B_t - B_s|^{2n}] = C_n |t - s|^n \quad (6.17)$$

をつかった. □

$(\bar{Y}_t)_{t \geq 0}$ を $(Y_t)_{t \geq 0}$ の連続修正とする. 確率変数 $\bar{Y} : ((\mathbb{R}^d)^{[0, \infty)}, \sigma(\mathcal{A}), \nu_\infty) \rightarrow (\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ に関する $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ 上の像測度を

$$\mathcal{M} = \nu_\infty \circ \bar{Y}^{-1} \quad (6.18)$$

とする. \mathcal{X} 上の座標過程を \tilde{Y}_t とすれば, $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathcal{M})$ 上の確率過程 $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$ で $\bar{Y}_t \stackrel{d}{=} \tilde{Y}_t$ なるものが構成できたことになる. その結果 (6.15) と (6.16) が

$$\begin{aligned} (f_0, e^{-(t_1-t_0)L_p} f_1 \dots e^{-(t_n-t_{n-1})L_p} f_n)_{L^2(\mathbb{R}^d, dN_0)} &= \mathbb{E}_{\mathcal{M}} \left[\prod_{j=0}^n f_j(\tilde{Y}_{t_j}) \right], \\ (\mathbb{1}, f)_{L^2(\mathbb{R}^d, dN_0)} &= (\mathbb{1}, e^{-tL_p} f)_{L^2(\mathbb{R}^d, dN_0)} = \mathbb{E}_{\mathcal{M}}[f(\tilde{Y}_t)] = \mathbb{E}_{\mathcal{M}}[f(\tilde{Y}_0)] \end{aligned}$$

と表せる. \mathcal{X} 上の確率測度を

$$\mathcal{M}^x(\cdot) = \mathcal{M}(\cdot | \tilde{Y}_0 = x), \quad x \in \mathbb{R}^d \quad (6.19)$$

で定義する. $\mathcal{M}(\cdot | \sigma(Y_0)) = G(Y_0)$ と書ける可測関数があるので, $G(x) = \mathcal{M}(\cdot | \tilde{Y}_0 = x)$ と書く約束であった. \tilde{Y}_0 の分布が dN_0 なので, $\mathcal{M}(A) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{M}^x}[\mathbb{1}_A] dN_0$ に気をつける. その結果

$$\begin{aligned} (f_0, e^{-(t_1-t_0)L} f_1 \dots e^{-(t_n-t_{n-1})L} f_n)_{L^2(\mathbb{R}^d, dN_0)} &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{M}^x} \left[\prod_{j=0}^n f_j(\tilde{Y}_{t_j}) \right] dN_0, \\ (\mathbb{1}, e^{-tL_p} f)_{L^2(\mathbb{R}^d, dN_0)} &= (\mathbb{1}, f)_{L^2(\mathbb{R}^d, dN_0)} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{M}^x}[f(\tilde{Y}_0)] dN_0 = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) dN_0 \end{aligned} \quad (6.20)$$

を満たす.

(Step 3)

補題 6.7 $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$ は $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathcal{M}^x)$ 上の $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\tilde{Y}_s, 0 \leq s \leq t), t \geq 0$, に関する Markov 過程である.

証明:

$$p_t(x, A) = (e^{-tL} \mathbb{1}_A)(x), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad t \geq 0 \quad (6.21)$$

としよう. (6.20) から $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$ の有限次元分布は

$$\mathbb{E}_{\mathcal{M}^x} \left[\prod_{j=1}^n \mathbb{1}_{A_j}(\tilde{Y}_{t_j}) \right] = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \prod_{j=1}^n \mathbb{1}_{A_j}(x_j) \prod_{j=1}^n p_{t_j - t_{j-1}}(x_{j-1}, dx_j) \quad (6.22)$$

となる. ここで $t_0 = 0$, $x_0 = x$. 今から $p_t(x, A)$ が確率遷移関数²⁶であることを証明する. そうすれば $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$ の Markov 性が従う. 半群 e^{-tL_p} は正値改良性作用素である. よって $0 \leq e^{-tL_p} f \leq \mathbb{1}$ が $0 \leq f \leq \mathbb{1}$ に対して成り立つ. さらに $e^{-tL_p} \mathbb{1} = \mathbb{1}$ となる. よって $p_t(x, \cdot)$ は \mathbb{R}^d 上の確率測度で $p_t(x, \mathbb{R}^d) = 1$ となる. 次に $p_t(\cdot, A)$ は ボレル可測であることはすぐわかる. 最後に $e^{-sL_p} e^{-tL_p} \mathbb{1}_A = e^{-(s+t)L_p} \mathbb{1}_A$ から Chapman-Kolmogorov 恒等式が従う. よって $p_t(x, A)$ は確率遷移関数であるから $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$ は Markov 過程になる. \square

(Step 4) $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$ を \mathbb{R} 上の確率過程に拡張する. $\tilde{\mathcal{X}} = \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{B}(\mathcal{X}) \times \mathcal{B}(\mathcal{X})$, $\tilde{\mathcal{M}}^x = \mathcal{M}^x \times \mathcal{M}^x$ としよう. $(\tilde{X}_t)_{t \in \mathbb{R}}$ は次で定義される $(\tilde{\mathcal{X}}, \tilde{\mathcal{M}}, \tilde{\mathcal{M}}^x)$ 上の確率過程である.

$$\tilde{X}_t(w) = \begin{cases} \tilde{Y}_t(w_1), & t \geq 0, \\ \tilde{Y}_{-t}(w_2), & t < 0. \end{cases} \quad w = (w_1, w_2) \in \tilde{\mathcal{X}}. \quad (6.23)$$

補題 6.8 (1) $\tilde{X}_0 = x$ a.s. で $t \mapsto \tilde{X}_t$ は a.s. に連続. (2) $\tilde{X}_t, t \geq 0$, と $\tilde{X}_s, s \leq 0$, が独立. (3) $\tilde{X}_t \stackrel{d}{=} \tilde{X}_{-t}$.

証明: 簡単なので略する. \square

(Step 5) 定理 6.3 の証明: $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ 上の測度 $\tilde{\mathcal{M}}^x$ の \tilde{X} に関する像測度を

$$\mathcal{N}_0^x = \tilde{\mathcal{M}}^x \circ \tilde{X}_\cdot^{-1} \quad (6.24)$$

とする. $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathcal{N}_0^x)$ 上の座標過程を X_t とする. このとき

$$X_t \stackrel{d}{=} \tilde{Y}_t \quad (t \geq 0), \quad X_t \stackrel{d}{=} \tilde{Y}_{-t} \quad (t \leq 0). \quad (6.25)$$

²⁶ $p_t(x, A)$ が確率遷移関数であるとは次をみたとすこと. $p_t(\cdot, \cdot) : \mathbb{R}^d \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$, $t \geq 0$, が

- (1) $p_t(x, \cdot)$ が $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ 上の測度,
- (2) $p_t(\cdot, A)$ がボレル可測,
- (3) $p_{t+s}(x, A) = \int_{\mathbb{R}^d} p_t(y, A) p_s(x, dy) dy$.

特に (3) を Chapman-Kolmogorov 恒等式という.

(Step 3) から, $(\tilde{Y}_t)_{t \geq 0}$ と $(\tilde{Y}_{-t})_{t \leq 0}$ は $\tilde{\mathcal{F}}_t^+ = \sigma(\tilde{Y}_s, 0 \leq s \leq t)$ と $\tilde{\mathcal{F}}_t^- = \sigma(\tilde{Y}_s, -t \leq s \leq 0)$ に関する Markov 過程で, $(X_t)_{t \geq 0}$ と $(X_t)_{t \leq 0}$ は $(\mathcal{F}_t^+)_{t \geq 0}$ と $(\mathcal{F}_t^-)_{t \leq 0}$ に関する Markov 過程である. ここで $\mathcal{F}_t^+ = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$, $\mathcal{F}_t^- = \sigma(X_s, -t \leq s \leq 0)$. よって拡散過程であることが分かる. また $(X_s)_{s \leq 0}$ と $(X_t)_{t \geq 0}$ が独立であることと, $X_{-t} \stackrel{d}{=} X_t$ が (6.25) と (Step 4) からわかる. その結果鏡映対称性が従う. シフト不変性は次の補題から従う. \square

補題 6.9 (シフト不変性) $-\infty < t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ とする. このとき

$$\int \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x} \left[\prod_{j=0}^n f_j(X_{t_j}) \right] d\mathbf{N}_0 = (f_0, e^{-(t_1-t_0)L_p} f_1 \dots e^{-(t_n-t_{n-1})L_p} f_n)_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mathbf{N}_0)}. \quad (6.26)$$

証明: $t_0 \leq \dots \leq t_n \leq 0 \leq t_{n+1} \leq \dots \leq t_{n+m}$ とする. このとき $(X_s)_{s \leq 0}$ と $(X_t)_{t \geq 0}$ の独立性から,

$$\int \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x} \left[\prod_{j=0}^{n+m} f_j(X_{t_j}) \right] d\mathbf{N}_0 = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x} \left[\prod_{j=0}^n f_j(X_{t_j}) \right] \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x} \left[\prod_{j=n+1}^{n+m} f_j(X_{t_j}) \right] d\mathbf{N}_0.$$

さらに

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x} \left[\prod_{j=n+1}^{n+m} f_j(X_{t_j}) \right] = (e^{-t_{n+1}L_p} f_{n+1} e^{-(t_{n+2}-t_{n+1})L_p} f_{n+2} \dots e^{-(t_{n+m}-t_{n+m-1})L_p} f_{n+m})(x) \quad (6.27)$$

と

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x} \left[\prod_{j=0}^{n+m} f_j(X_{t_j}) \right] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x} \left[\prod_{j=0}^{n+m} f_j(X_{-t_j}) \right] = (e^{+t_n L_p} f_n e^{-(t_n-t_{n-1})L_p} f_{n-1} \dots e^{-(t_1-t_0)L_p} f_1)(x). \quad (6.28)$$

(6.27) と (6.28) から

$$\begin{aligned} & \int \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x} \left[\prod_{j=0}^{n+m} f_j(X_{t_j}) \right] d\mathbf{N}_0 \\ &= (e^{+t_n L_p} f_n \dots e^{-(t_1-t_0)L_p} f_1, e^{-t_{n+1}L_p} f_{n+1} \dots e^{-(t_{n+m}-t_{n+m-1})L_p} f_{n+m})_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mathbf{N}_0)} \\ &= (f_1, e^{-(t_1-t_0)L_p} f_2 \dots e^{-(t_{n+m}-t_{n+m-1})L_p} f_{n+m})_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mathbf{N}_0)}. \end{aligned}$$

よって (6.26) が従う. \square

$\mathcal{X} \times \mathbb{R}^d$ 上の確率測度 \mathcal{N}_0 を次で定義する

$$d\mathcal{N}_0 = d\mathbf{N}_0 \otimes d\mathcal{N}_0^x. \quad (6.29)$$

この測度をつかって次を得る.

系 6.10 ($P(\phi)_1$ -Feynman-Kac 公式) H_p は $\varphi_p > 0$ なる基底状態をもつと仮定する.

$$L_p = \frac{1}{\varphi_p} (H_p - E_p) \varphi_p \quad (6.30)$$

とする. $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d, d\mathbf{N}_0)$ とする. このとき

$$(f, e^{-tL_p} g)_{L^2(\mathbb{R}^d, d\mathbf{N}_0)} = (f \varphi_p, e^{-t(H_p - E_p)} g \varphi_p)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}[\bar{f}(X_0)g(X_t)]. \quad (6.31)$$

証明: 定理 6.3 から従う. □

注意 6.11 定理 6.3 から $(e^{-tL_p} f)(x) = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}[f(X_t)]$. 一方, 右辺は Brown 運動で

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0^x}[f(X_t)] = \frac{1}{\varphi_p(x)} \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\int_0^t V(B_s) ds} f(B_t) \varphi_p(B_t) \right] e^{tE} \quad (6.32)$$

と表せる.

熱半群 e^{-tH_p} の Feynman-Kac 公式は, Brown 運動をつかって

$$(f, e^{-tH_p} g)_{L^2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x [\overline{f(B_0)} e^{-\int_0^t V(B_s) ds} g(B_t)]$$

と表せた. 一方, 基底状態変換した e^{-tL_p} は $P(\phi)_1$ 過程によって

$$(f, e^{-tL_p} g)_{L^2(\mathbf{N}_0)} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}[\overline{f(X_0)} g(X_t)]$$

と表せる. こちらはポテンシャル V の情報が全て $P(\phi)_1$ 過程に組み込まれている. 2つの公式は一長一短がある. パスの性質は Brown 運動が分かりやすいが, 評価は後者の方がしやすい.

6.2 Dirichlet 原理

Dirichlet 原理を示そう. V は Kato 分解可能であると仮定する. $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ は L_p に付随した $P(\phi)_1$ 過程とする.

補題 6.12 (Dirichlet 原理) 自然数 n を固定し, $T_j = Tj/2^n$, $j = 0, 1, \dots, 2^n$ とおく. $G \subset \mathbb{R}^d$, $\tau = \inf\{T_j \geq 0 | X_{T_j} \in G\}$ としよう. このとき $\psi(x) \geq 1$ ($x \in G$) を満たす任意の $\psi \geq 0$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x[\varrho^\tau])^2 d\mathbf{N}_0 \leq (\psi, \psi)_{L^2(\mathbf{N}_0)} + \frac{\varrho^{T/2^n}}{1 - \varrho^{T/2^n}} (\psi, (\mathbb{1} - e^{-(T/2^n)L_p})\psi)_{L^2(\mathbf{N}_0)}.$$

証明: $\psi_\varrho(x) = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x[\varrho^\tau]$ と定める. X_s が G の内側から出発すれば $\tau = 0$ なので, $\psi_\varrho(x) = 1$ ($x \in G$) が従う. $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, 0 \leq s \leq t)$ を $X = (X_t)_{t \geq 0}$ の自然なフィルトレーションとしよう. X の Markov 性から

$$e^{-(T/2^n)L_p}\psi_\varrho(x) = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x[\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^{X_{T/2^n}}[\varrho^\tau]] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x[\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x[\varrho^{\tau \circ \theta_{T/2^n}} | \mathcal{F}_{T/2^n}]] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x[\varrho^{\tau \circ \theta_{T/2^n}}]$$

となる. ここで θ_t は \mathcal{X} 上のシフトで $(\theta_t w)(s) = w(s+t)$ ($w \in \mathcal{X}$) で定義される. $x = X_0(w) \in \mathbb{R}^d \setminus G$ のとき $(\tau \circ \theta_{T/2^n})(w) = \tau(w) - T/2^n \geq 0$ に注意せよ. その結果, 恒等式

$$\varrho^{T/2^n} e^{-(T/2^n)L_p}\psi_\varrho(x) = \psi_\varrho(x), \quad x \in \mathbb{R}^d \setminus G$$

が従う.

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x[\varrho^\tau])^2 d\mathbf{N}_0 = (\psi_\varrho, \psi_\varrho) \leq (\psi_\varrho, \psi_\varrho) + \frac{\varrho^{T/2^n}}{1 - \varrho^{T/2^n}} (\psi_\varrho, (\mathbb{1} - e^{-(T/2^n)L_p})\psi_\varrho)$$

は自明. 右辺は $(\psi_\varrho \mathbb{1}_G, \psi_\varrho \mathbb{1}_G) + \frac{\varrho^{T/2^n}}{1 - \varrho^{T/2^n}} (\psi_\varrho \mathbb{1}_G, (\mathbb{1} - e^{-(T/2^n)L_p})\psi_\varrho)$ と計算できる. さらに $(\psi_\varrho \mathbb{1}_G, (\mathbb{1} - e^{-(T/2^n)L_p})\psi_\varrho) = (\psi_\varrho \mathbb{1}_G, (\mathbb{1} - e^{-(T/2^n)L_p})\psi_\varrho \mathbb{1}_G)$ なので

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x[\varrho^\tau])^2 d\mathbf{N}_0 \leq (\psi_\varrho \mathbb{1}_G, \psi_\varrho \mathbb{1}_G) + \frac{\varrho^{T/2^n}}{1 - \varrho^{T/2^n}} (\psi_\varrho \mathbb{1}_G, (\mathbb{1} - e^{-(T/2^n)L_p})\psi_\varrho \mathbb{1}_G). \quad (6.33)$$

$\psi_\varrho \mathbb{1}_G(x) \leq \psi(x)$ が全ての $x \in \mathbb{R}^d$ で成り立つことに注意せよ. このとき

$$\begin{aligned} & (\psi_\varrho \mathbb{1}_G, \psi_\varrho \mathbb{1}_G) + \frac{\varrho^{T/2^n}}{1 - \varrho^{T/2^n}} (\psi_\varrho \mathbb{1}_G, (\mathbb{1} - e^{-(T/2^n)L_p})\psi_\varrho \mathbb{1}_G) \\ & \leq (\psi, \psi) + \frac{\varrho^{T/2^n}}{1 - \varrho^{T/2^n}} (\psi, (\mathbb{1} - e^{-(T/2^n)L_p})\psi). \end{aligned} \quad (6.34)$$

(6.33) と (6.34) から題意が示された. □

$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき

$$\mathcal{N}_0(|f(X_0)| \geq \Lambda) = \mathcal{N}_0(|f(x)| \geq \Lambda) \leq \frac{1}{\Lambda} \sqrt{(f, f)_{L^2(\mathbf{N}_0)}}$$

は自明である. 実は $P(\phi)_1$ 過程のパスについてはもう少し深いことがいえる. それを説明する.

命題 6.13 V は Kato 分解可能であると仮定する. $\Lambda > 0$ として, $f \in C(\mathbb{R}^d) \cap D(L_p^{1/2})$ と仮定する. $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ は L_p に付随した $P(\phi)_1$ 過程とする. このとき

$$\mathcal{N}_0\left(\sup_{0 \leq s \leq T} |f(X_s)| \geq \Lambda\right) \leq \frac{e}{\Lambda} \sqrt{(f, f)_{L^2(\mathbf{N}_0)} + T(L_p^{1/2} f, L_p^{1/2} f)_{L^2(\mathbf{N}_0)}}.$$

証明: $T_j = Tj/2^n$, $j = 0, 1, \dots, 2^n$, とおき, T と n を固定する. $G = \{x \in \mathbb{R}^d \mid |f(x)| \geq \Lambda\}$ に対して $\tau = \inf\{T_j \geq 0 \mid X_{T_j} \in G\}$ を定義する. このとき恒等式

$$\mathcal{N}_0\left(\sup_{j=0, \dots, 2^n} |f(X_{T_j})| \geq \Lambda\right) = \mathcal{N}_0(\tau \leq T)$$

が従う. この右辺を評価しよう. $0 < \varrho < 1$ とし, あとで適当な ϱ を選ぶ. $d\mathbf{N}_0$ に関する Schwarz の不等式から

$$\mathcal{N}_0(\tau \leq T) = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}[\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}] \leq \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}[\varrho^{\tau-T}] \leq \varrho^{-T} \left(\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x[\varrho^\tau])^2 \right)^{1/2} d\mathbf{N}_0.$$

$0 \leq \psi$ は $\psi(x) \geq 1$ ($x \in G$) を満たす任意の関数とする. そうすると Dirichlet 原理 から

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x[\varrho^\tau])^2 d\mathbf{N}_0 \leq (\psi, \psi)_{L^2(\mathbf{N}_0)} + \frac{\varrho^{T/2^n}}{1 - \varrho^{T/2^n}} (\psi, (\mathbf{1} - e^{-(T/2^n)L_p})\psi)_{L^2(\mathbf{N}_0)}.$$

ここで

$$|f(x)|/\Lambda = \begin{cases} \geq 1, & x \in G, \\ |f(x)|/\Lambda, & x \in \mathbb{R}^d \setminus G \end{cases}$$

を ψ に代入すれば

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x[\varrho^\tau])^2 d\mathbf{N}_0 \leq \frac{1}{\Lambda^2} (f, f) + \frac{\varrho^{T/2^n}}{1 - \varrho^{T/2^n}} \frac{1}{\Lambda^2} (|f|, (\mathbf{1} - e^{-(T/2^n)L_p})|f|).$$

$e^{-(T/2^n)L_p}$ は正値改良型なので $(|f|, (\mathbb{1} - e^{-(T/2^n)L_p})|f|) \leq (f, (\mathbb{1} - e^{-(T/2^n)L_p})f)$. これから

$$\mathcal{N}_0 \left(\sup_{j=0, \dots, 2^n} |f(X_{T_j})| \geq \Lambda \right) \leq \frac{\varrho^{-T}}{\Lambda} \sqrt{(f, f) + \frac{\varrho^{T/2^n}}{1 - \varrho^{T/2^n}} (f, (\mathbb{1} - e^{-(T/2^n)L_p})f)}.$$

$\varrho = e^{-1/T}$ とおけば $\frac{\varrho^{T/2^n}}{1 - \varrho^{T/2^n}} \leq 2^n$ より

$$\mathcal{N}_0 \left(\sup_{j=0, \dots, 2^n} |f(X_{T_j})| \geq \Lambda \right) \leq \frac{e}{\Lambda} \sqrt{(f, f) + 2^n (f, (\mathbb{1} - e^{-(T/2^n)L_p})f)}.$$

$(f, (\mathbb{1} - e^{-(T/2^n)L_p})f) \leq (T/2^n)(L^{1/2}f, L_p^{1/2}f)$ なので,

$$\mathcal{N}_0 \left(\sup_{j=0, \dots, 2^n} |f(X_{T_j})| \geq \Lambda \right) \leq \frac{e}{\Lambda} \sqrt{(f, f) + T(L_p^{1/2}f, L_p^{1/2}f)}$$

がわかる. $n \rightarrow \infty$ とすればルベーグの優収束定理から

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}_0 \left(\sup_{j=0, \dots, 2^n} |f(X_{T_j})| \geq \Lambda \right) = \mathcal{N}_0 \left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{j=0, \dots, 2^n} |f(X_{T_j})| \geq \Lambda \right).$$

さらに関数 $f(X_t)$ は t に関してほとんどいたるところ連続なので $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{j=0, \dots, 2^n} |f(X_{T_j})| = \sup_{0 \leq s \leq T} |f(X_s)|$ が従う. これで命題が示せた. \square

6.3 Mehler 公式

再度, 調和振動子について考える. つまり

$$V(x) = \frac{\omega^2}{2}|x|^2 - \frac{\omega}{2}$$

について考える. $d = 1$ として Schrödinger 作用素

$$H_{\text{osc}} = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{m\omega^2}{2}x^2 - \frac{\omega}{2} \quad (6.35)$$

を考える. ここで, m は質量, ω は振動数. H_{osc} は $C_0^\infty(\mathbb{R})$ で本質的に自己共役. そして $\sigma(H_{\text{osc}}) = \{m\omega n | n \in \mathbb{N}\}$ がわかる. 基底状態は

$$\Psi_{\text{osc}}(x) = (m\omega/\pi)^{1/4} e^{-m\omega x^2/2} \quad (6.36)$$

さらに固有ベクトルは

$$\Psi_n(x) = (m\omega/(4^n(n!)^2\pi))^{1/4} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x), \quad (6.37)$$

ここで H_n , $n = 1, 2, \dots$, はエルミート多項式である. $m, \omega, \sigma > 0$ とする. 次の SDE

$$dX_t = -m\omega X_t dt + \sigma dB_t, \quad B_0 = x \quad (6.38)$$

を考える²⁷. その解は Ornstein-Uhlenbeck 過程

$$X_t^x = e^{-m\omega t} x + \sigma \int_0^t e^{-m\omega(t-s)} dB_s \quad (6.39)$$

になる. 計算すると

$$\mathbb{E}_W^0[X_t^x] = e^{-m\omega t} x, \quad \mathbb{E}_W^0[X_t^x X_s^x] = e^{-m\omega(t+s)} x^2 + \frac{\sigma^2}{2m\omega} (1 - e^{-2m\omega(s \wedge t)}) \quad (6.40)$$

が (6.39) から従う. X_t^x の生成子は

$$\frac{\sigma^2}{2} \frac{d^2}{dx^2} - m\omega x \frac{d}{dx}. \quad (6.41)$$

(6.35) を考察する. $X_t = X_t$ とおき, $\mathbb{E}_\mu[\dots] = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{E}_W^0[\dots] \Psi_{\text{osc}}(x)^2 dx$ とおく.

$$\mathbb{E}_\mu[X_t] = 0, \quad \mathbb{E}_\mu[X_s X_t] = \frac{\sigma^2}{2m\omega} e^{-|t-s|m\omega} \quad (6.42)$$

になる.

基底状態変換 $\mathcal{U}_g : L^2(\mathbb{R}, \Psi_{\text{osc}}^2 dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{U}_g f = \Psi_{\text{osc}} f$, により

$$L_{\text{osc}} = \mathcal{U}_g^{-1} H_{\text{osc}} \mathcal{U}_g = -\frac{1}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + m\omega x \frac{d}{dx}.$$

これは, $1/m = \sigma^2$ とすれば (6.41) と一致する. そうすると

$$\mathbb{E}_\mu \left[\prod_{j=0}^n f_j(X_{t_j}) \right] = \left(\mathbb{1}, f_0 \left(\prod_{j=1}^n e^{-(t_j - t_{j-1}) L_{\text{osc}}} f_j \right) \mathbb{1} \right)_{L^2(\mathbb{R}, \Psi_{\text{osc}}^2 dx)}.$$

$H_{\text{osc}} x \Psi_{\text{osc}} = m\omega \Psi_{\text{osc}}$ なので,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_\mu [X_t X_s] &= (\Psi_{\text{osc}}, x e^{-(t-s) H_{\text{osc}}} x \Psi_{\text{osc}}) \\ &= e^{-m\omega|t-s|} \int_{-\infty}^{\infty} |x|^2 \Psi_{\text{osc}}^2(x) dx = \frac{\sigma^2}{2m\omega} e^{-m\omega|t-s|} \end{aligned}$$

で (6.42) が現れる.

²⁷Langevin 方程式という.

命題 6.14 (Mehler 公式) $\kappa_t = \frac{1 - e^{-2m\omega t}}{2m\omega}$, $t \geq 0$, とする. このとき $e^{-tH_{\text{osc}}}$ の積分核は次で与えられる.

$$e^{-tH_{\text{osc}}}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\kappa_t/m}} \exp\left(-\frac{2xye^{-m\omega t} - (\omega\kappa_t + e^{-2m\omega t})x^2 - (e^{-2m\omega t} - \omega\kappa_t)y^2}{2\kappa_t}\right). \quad (6.43)$$

証明: $e^{-tH_{\text{osc}}}$ を $L^2(\mathbb{R})$ の作用素とみなし kernel を導き出す. (6.39) から

$$\mathbb{E}_W^0[f(X_t^x)] = \mathbb{E}_W^0\left[f\left(e^{-m\omega t}x + \sigma \int_0^t e^{-m\omega(t-s)}dB_s\right)\right].$$

任意の固定された t に対して,

$$r_t = \sigma \int_0^t e^{-m\omega(t-s)}dB_s = \sigma e^{-m\omega t} \left(e^{m\omega t} B_t - (m\omega)^{-1} \int_0^t B_s e^{m\omega s} ds \right)$$

はガウス型の確率変数で平均ゼロ, 共分散が

$$\mathbb{E}[r_t r_t] = (\sigma^2/2m\omega)(1 - e^{-2m\omega t}) = \frac{\sigma^2}{2}\kappa_t.$$

よって

$$e^{-tH_{\text{osc}}}f(x) = \mathcal{U}_g e^{-tL_{\text{osc}}} \mathcal{U}_g^{-1} f(x) = \Psi_{\text{osc}}(x) \mathbb{E}[(\Psi_{\text{osc}}^{-1}f)(X_t^x)].$$

$X_t^x = e^{-m\omega t}x + r_t$ で r_t はガウス型確率変数. 右辺は

$$\left(2\pi \frac{\sigma^2}{2}\kappa_t\right)^{-1/2} \Psi_{\text{osc}}(x) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(e^{-m\omega t}x + y)}{\Psi_{\text{osc}}(e^{-m\omega t}x + y)} \exp\left(\frac{-|y|^2}{\frac{\sigma^2}{2}\kappa_t}\right) dy. \quad (6.44)$$

$e^{-m\omega t}x + y$ を z に変数変換して $\sigma^2 = 1/m$ とおけば,

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(z) (\pi\kappa_t/m)^{-1/2} \frac{\Psi_{\text{osc}}(x)}{\Psi_{\text{osc}}(z)} \exp\left(\frac{-|z - e^{-m\omega t}x|^2}{\frac{\kappa_t}{2m}}\right) dz.$$

これから (6.43) が従う. □

6.4 Rabi 模型

$P(\phi)_1$ 過程の簡単な応用として Rabi 模型の経路積分表示を紹介する.

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\omega} x \right), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(-\frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{d}{dx} + \sqrt{\omega} x \right)$$

とする. このとき, 交換関係 $[a, a^*] = 1$ を満たす. Rabi 模型は次で定義される $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R})$ 上の自己共役作用素である.

$$H_{\text{Rabi}} = \Delta \sigma_z \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes \omega \left(a^* a + \frac{1}{2} \right) + g \sigma_x \otimes (a + a^*). \quad (6.45)$$

ここで, $\Delta > 0$ と $\omega > 0$ は定数, $g \in \mathbb{R}$ は結合定数である. 伝統的にこのような記号を使う. Δ はラプラシアンではない. $e^{-tH_{\text{Rabi}}}$ の経路積分表示を求めてみよう. そのために H_{Rabi} を変換する. $n \in \mathbb{R}^3$, $\theta \in [0, 2\pi)$ としよう. $e^{(i/2)\theta n \cdot \sigma}$ は

$$e^{(i/2)\theta n \cdot \sigma} \sigma_\mu e^{-(i/2)\theta n \cdot \sigma} = (R\sigma)_\mu$$

をみたく. ここで R は 3×3 行列で n の周りの角度 θ の回転を表す. 特に $n = (0, 1, 0)$, $\theta = \pi/2$ のとき

$$e^{(i/2)\theta n \cdot \sigma} \sigma_x e^{-(i/2)\theta n \cdot \sigma} = \sigma_z, \quad e^{(i/2)\theta n \cdot \sigma} \sigma_z e^{-(i/2)\theta n \cdot \sigma} = -\sigma_x.$$

$U = e^{(i\pi/4)\sigma_y}$ とおくと,

$$UH_{\text{Rabi}}U^{-1} = \omega a^* a + g \sigma_z (a + a^*) - \sigma_x \Delta \quad (6.46)$$

となる. さらに $UH_{\text{Rabi}}U^{-1}$ の基底状態変換を考える. 正規化された基底状態 Ψ_g は正なので $U_g : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}, \Psi_g^2 dx)$ を $U_g f = \Psi_g^{-1} f$ で定義する. 確率測度 $\Psi_g^2 dx$ を $d\mu$ で表す. その結果 $UH_{\text{Rabi}}U^{-1}$ は $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ 上の作用素

$$U_g UH_{\text{Rabi}}U^{-1}U_g^{-1} = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \omega x \frac{d}{dx} \right) + g \sigma_z \sqrt{2\omega} x - \sigma_x \Delta \quad (6.47)$$

に変換される. 行列で表示すれば

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \omega x \frac{d}{dx} \right) + g\sqrt{2\omega}x & -\Delta \\ -\Delta & \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \omega x \frac{d}{dx} \right) - g\sqrt{2\omega}x \end{pmatrix}$$

となり, 非対角成分に $-\Delta$ が現れる. さらに $\mathbb{C}^2 \otimes L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ を

$$\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2, d\mu) = \left\{ f = f(x, \sigma) \left| \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_2} \int |f(x, \sigma)|^2 d\mu(x) < \infty \right. \right\} \quad (6.48)$$

と同一視して, (6.47) は

$$Hf(x, \sigma) = \left\{ \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \omega x \frac{d}{dx} \right) + g\sqrt{2\omega}\sigma x \right\} f(x, \sigma) - \Delta f(x, -\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{Z}_2 \quad (6.49)$$

に変換される.

$$h = \frac{1}{2} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + \omega x \frac{d}{dx} \right)$$

とする. $(X_t^x)_{t \geq 0}$ を x から出発する Ornstein-Uhlenbeck 過程としよう. つまり

$$\int d\mu(x) \mathbb{E}_W [X_t^x] = 0, \quad \int d\mu(x) \mathbb{E}_W [X_t^x X_s^x] = \frac{e^{-|t-s|\omega}}{2\omega}.$$

X_t^x の生成子は $-h$ であり

$$(f, e^{-th}g)_{\mathcal{H}} = \int d\mu(x) \mathbb{E}_W \left[\overline{f(X_0^x)} g(X_t^x) \right].$$

X_t^x の分布 $\rho_t(x, y)$ は

$$\rho_t(x, y) = \Psi_g(x)^{-1} K_t(x, y) \Psi_g(y) \quad (6.50)$$

となり, $K_t(x, y)$ は Mehler 核

$$K_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{\pi(1-e^{-2t})}} \exp \left(\frac{4xye^{-t} - (x^2 + y^2)(1 + e^{-2t})}{2(1 - e^{-2t})} \right)$$

である. スピンに対応して, intensity 1 の Poisson 過程 $(N_t)_{t \geq 0}$ を導入する. 前章のように $\theta_{N_t} = (-1)^{N_t}$ とする.

定理 6.15 (Rabi 模型の $P(\phi)_1$ -Feynman-Kac 公式) $f, g \in \mathcal{H}$ とする. このとき

$$(\Delta > 0) \quad (f, e^{-tH}g)_{\mathcal{H}} = e^t \sum_{\alpha=1,2} \int d\mu(x) \mathbb{E}_\nu^\alpha \mathbb{E}_W \left[\overline{f(x, \theta_{N_0})} g(X_t^x, \theta_{N_t}) e^{-g\sqrt{2\omega} \int_0^t \theta_{N_s} X_s^x ds} \Delta^{N_t} \right], \quad (6.51)$$

$$(\Delta = 0) \quad (f, e^{-tH}g)_{\mathcal{H}} = e^t \sum_{\alpha=1,2} \int d\mu(x) \mathbb{E}_\nu^\alpha \mathbb{E}_W \left[\mathbf{1}_{N_t=0} \overline{f(x, \theta_\alpha)} g(X_t^x, \theta_\alpha) e^{-g\theta_\alpha \sqrt{2\omega} \int_0^t X_s^x ds} \right]. \quad (6.52)$$

証明: 記号を簡単化するために $\mathbb{E} = \sum_{\alpha=1,2} \int d\mu(x) \mathbb{E}_\nu^\alpha \mathbb{E}_W$ とおく. 命題 2.7 から

$$(f, e^{-tH_{\text{Rabi}}} g)_{\mathcal{H}} = e^t \mathbb{E} \left[\overline{f(x, \theta_{N_0})} g(X_t^x, \theta_{N_t}) e^{-g\sqrt{2\omega} \int_0^t \theta_{N_s} X_s^x ds} e^{\int_0^t \log \Delta dN_s} \right]. \quad (6.53)$$

ここで $e^{\int_0^t \log \Delta dN_s} = e^{\log \Delta^{N_t}} = \Delta^{N_t}$ なので (6.51) が従がう. $\Delta = 0$ のときは $N_t = 0$ なる集合のみ生き残るから

$$(f, e^{-tH_{\text{Rabi}}} g)_{\mathcal{H}} = e^t \mathbb{E} \left[\overline{f(x, \theta_\alpha)} g(X_t^x, \theta_{N_t}) e^{-g\sqrt{2\omega} \int_0^t \theta_{N_s} X_s^x ds} \mathbb{1}_{N_t=0} \right]. \quad (6.54)$$

□

系 6.16 (基底状態の一意性) H_{Rabi} の基底状態は一意的である.

証明: $f, g \geq 0$ とする. 十分小さな $\epsilon > 0$ に対して, $\Omega_f = \{(x, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2 | f(x, \theta) > \epsilon\}$ と $\Omega_g = \{(x, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2 | g(x, \theta) > \epsilon\}$ の測度は正である. (6.51) から

$$(f, e^{-tH_{\text{Rabi}}} g) \geq \epsilon e^t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\Omega_f}(x, \theta_{N_0}) \mathbb{1}_{\Omega_g}(X_t^x, \theta_{N_t}) e^{-g\sqrt{2\omega} \int_0^t \theta_{N_s} X_s^x ds} \Delta^{N_t} \right].$$

Ω_f は $\mathbb{R} \times \mathbb{Z}_2$ の部分集合で, $\Omega_f = \bigcup_{\theta \in \mathbb{Z}_2} (\Omega_f^\theta, \theta)$ と表せる. Ω_f^{+1} または Ω_f^{-1} ($\subset \mathbb{R}$) のどちらか一方は少なくとも正の測度をもつ. Ω_f^{+1} が正の測度をもつとする. 同様に $\Omega_g = \bigcup_{\theta \in \mathbb{Z}_2} (\Omega_g^\theta, \theta)$ で Ω_g^+ は正の測度とする. Ω を $(\Omega_f^+, +)$ の中から出発して $(\Omega_g^+, +)$ 中に到着するパスの集合とする.

$$\mathbb{E} [\mathbb{1}_\Omega] = \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\Omega_f^{+1}}(x) \mathbb{1}_{\Omega_g^{+1}}(X_t^x) \mathbb{1}_{N_t=\text{even}} \right].$$

X_t^x の分布 ρ_t をつかって

$$\mathbb{E} [\mathbb{1}_\Omega] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} e^{-t} \int_{\Omega_f^{+1}} dx \int_{\Omega_g^{+1}} dy \Psi_g(x) K_t(x, y) \Psi_g(y) > 0.$$

その結果 Ω は正測度をもち,

$$(f, e^{-tH_{\text{Rabi}}} g) \geq \epsilon e^t \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_\Omega e^{-g\sqrt{2\omega} \int_0^t \theta_{N_s} X_s^x ds} \Delta^{N_t} \right] > 0$$

が結論できる. 故に $e^{-tH_{\text{Rabi}}}$ は正值改良型作用素になるので Perron-Frobenius の定理から基底状態の一意性が従がう. □

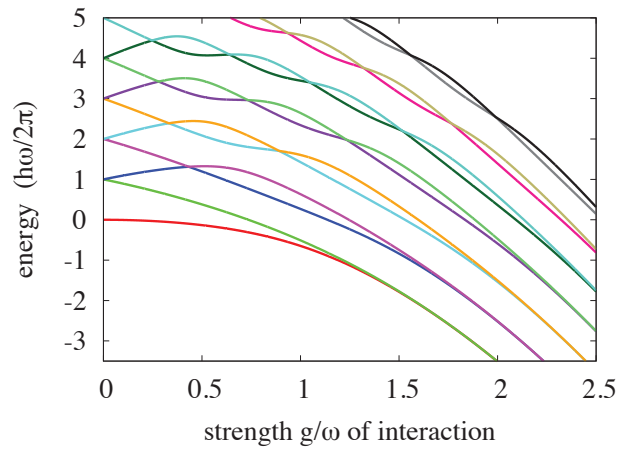


図 3: スペクトル曲線の交叉

6.5 参考文献など

$P(\phi)_1$ 過程の詳しい記述は [LHB11, Chapter 3] にある. Rabi 模型の Feynman-Kac 公式は [HH14] による. 数値計算の図 6.4²⁸ から, 予想されるように $g \mapsto E_n(g)$ というスペクトル曲線を描くと, $E_{2n}(g)$ と E_{2n+1} ($n = 0, 1, 2, \dots$) は n 回交叉することが予想される. 基底状態の一意性は E_0 と E_1 が交わらないことを示している [HH14].

Dirichlet 原理は [KV86] にある.

²⁸佐々木格氏提供

第II部

場の量子論

7 Boson Fock 空間

この章では Fock 空間に関する基本的な事柄を紹介し、これから使う基本的な記号を定義する。Boson Fock 空間, Euclid 場, $P(\phi)_1$ 過程, Kato クラスを熟知している読者はこの章と次の章をスキップしても構わない。

7.1 お話

場の量子論において自由場とは互いに相互作用していない同じ素粒子がたくさん集まった状態を表している。この自由場と Schrödinger 方程式に支配される粒子の相互作用する系を考えて、その Hamiltonian のスペクトル解析を行う。その数学的な解析方法のひとつとして、Hilbert 空間上の作用素論を用いるものがある。それは Fock 空間 \mathcal{F} といわれる Hilbert 空間と Schrödinger 作用素の状態ベクトルのつくる Hilbert 空間 \mathcal{H} のテンソル積空間 $\mathcal{H} \otimes \mathcal{F}$ 上の自己共役作用素 H のスペクトル解析に帰着される。 H の点スペクトルや連続スペクトルの解析が Hamiltonian の固有ベクトルやスペクトル散乱理論の解析に対応することは von Neuman 以来よく知られている。

一方 Euclid 的場の量子論では実シュワルツ超関数空間上のガウス測度が定める L^2 空間のベクトルに値をとる確率変数をもちいて、場の量子論を解析する。この場合、自由場とは直感的には無限次元ガウス超過程になる。

上記の2つは Feynman-Kac 型汎関数積分表示によって関係づけられる。自由場を表す自己共役作用素 H_f の生成する熱半群 e^{-tH_f} の期待値 $(F, e^{-tH_f}G)$ を無限次元ガウス超過程で表すためには時間発展を表すユニタリー作用素 e^{-itH_f} を e^{-tH_f} に変えること、つまり実時間 t を虚数時間 $-it$ へ解析接続することが必要になる。それを形式的にみてみよう。 $\mathbb{1}(\in \mathcal{F})$ を Fock 真空とする。質量 $\nu \geq 0$ のスカラー場

$$\phi_t(f) = e^{-itH_f} \phi(f) e^{itH_f}$$

のローレンツ不変な理論では自由場の2点関数は

$$(\mathbb{1}, \phi_t(f)\phi_s(g)\mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{y})W(x-y)dxdy$$

で与えられ, W は Wightman 超関数といわれる. 形式的に

$$W(x - y) = (\mathbb{1}, \phi(x)\phi(y)\mathbb{1})$$

である. ここで $x = (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ で

$$W(x) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{it\sqrt{|k|^2 + \nu^2} - ik \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{|k|^2 + \nu^2}} dk.$$

E. Nelson は Euclid 場から場の量子論を構成する仕方を発見した. $W((t, \mathbf{x}))$ の解析接続された関数は Schwinger 関数とよばれる.

$$W((it, \mathbf{x})) = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-t\sqrt{|k|^2 + \nu^2} - ik \cdot \mathbf{x}}}{\sqrt{|k|^2 + \nu^2}} dk = \frac{1}{2(2\pi)^4} \int_{\mathbb{R}^4} \frac{e^{ik_0 t - ik \cdot \mathbf{x}}}{|k|^2 + \nu^2 + k_0^2} d\mathbf{k},$$

$\mathbf{k} = (k_0, k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. つまり, Euclid 場

$$\phi_{\text{Et}}(f) = e^{-tH_f} \phi_{\text{E}}(f) e^{tH_f}$$

の共分散は

$$(\mathbb{1}, \phi_{\text{Et}}(f)\phi_{\text{Es}}(g)\mathbb{1}) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^4} \widehat{f}(k) \widehat{g}(k) e^{-|t-s|\sqrt{|k|^2 + \nu^2}} \frac{dk}{|k|^2 + \nu^2 + k_0^2} \quad (7.1)$$

となる. これは形式的に $H_f \mathbb{1} = 0$ と思えば,

$$(\mathbb{1}, \phi_{\text{Et}}(f)\phi_{\text{Es}}(g)\mathbb{1}) = (\phi(f), e^{-(s-t)H_f} \phi(g))$$

と読める. Euclid 場とは (7.1) を共分散に持つようなガウス過程のことであり, 共分散の形からも分かるように Ornstein-Uhlenbeck 過程の無限次元版とも思える.

7.2 Boson Fock 空間

上で述べた形式的な議論を Hilbert 空間論的に厳密に述べる. \mathscr{W} を Hilbert 空間とし, $\otimes_s^n \mathscr{W}$ は \mathscr{W} の n -重対称テンソル積を表す. つまり $\otimes_s^n \mathscr{W} = S_n(\otimes^n \mathscr{W})$ で射影作用素 S_n を

$$S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \varphi_n} f_{\pi(1)} \otimes \cdots \otimes f_{\pi(n)}, \quad n \geq 1,$$

で定める. ここで \wp_n は n 次置換群を表す. $\mathcal{F}^{(n)} = \mathcal{F}^{(n)}(\mathcal{W}) = \otimes_s^n \mathcal{W}$, $\otimes_s^0 \mathcal{W} = \mathbb{C}$ として, 無限直和空間

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\mathcal{W}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}^{(n)}(\mathcal{W})$$

を考える. ここにスカラー積を定めて位相を入れる. そのスカラー積は

$$(\Psi, \Phi)_{\mathcal{F}} = \sum_{n=0}^{\infty} (\Psi^{(n)}, \Phi^{(n)})_{\mathcal{F}^{(n)}}$$

で与えられる.

$$(\mathcal{F}(\mathcal{W}), (\cdot, \cdot)_{\mathcal{F}(\mathcal{W})})$$

は \mathcal{W} 上の Boson Fock 空間といわれ, これは Hilbert 空間である. Fock 空間 \mathcal{F} は l_2 -列 $(\Psi^{(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ で $\Psi^{(n)} \in \mathcal{F}^{(n)}$ かつ $\|\Psi\|_{\mathcal{F}}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \|\Psi^{(n)}\|_{\mathcal{F}^{(n)}}^2 < \infty$ となるものと同一視される.

$\Omega_b = (1, 0, 0, \dots)$ は Fock 真空とよばれる.

生成・消滅作用素という \mathcal{F} 上の 2 つの重要な閉作用素を定義しよう. それは各々 $a^*(f)$, $a(f)$ と表される. 生成作用素は

$$(a^*(f)\Psi)^{(n)} = \sqrt{n} S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)}), n \geq 1,$$

そして $(a^*(f)\Psi)^{(0)} = 0$ で定義される. これらは可閉作用素で, その閉包も同じ記号で書くことにする. 定義域は

$$D(a^*(f)) = \left\{ (\Psi^{(n)})_{n \geq 0} \in \mathcal{F} \left| \sum_{n=1}^{\infty} n \|S_n(f \otimes \Psi^{(n-1)})\|_{\mathcal{F}^{(n)}}^2 < \infty \right. \right\}$$

である. さらに消滅作用素は

$$a(f) = (a^*(\bar{f}))^* \tag{7.2}$$

と定める. 我々の定義では $f \mapsto a^{\sharp}(f)$ は複素数体上で線形になる²⁹. 名前からわかるように $a^*(f)$ はボゾン数を一つふやし, $a(f)$ は一つ減らす作用である. $D \subset \mathcal{W}$ を稠密な部分集合とすれば

$$\text{L.H.} \{a^*(f_1) \cdots a^*(f_n) \Omega_b, \Omega_b \mid f_j \in D, j = 1, \dots, n, n \geq 1\}$$

²⁹ $a^*(f) = (a(f))^*$ と定義して $f \mapsto a^*(f)$ が線形でない形式も存在する. このノートでは後に Schrödinger 表現をとり, 場の作用素 $\phi(f)$ が f に関して複素線形となるように構成するので, $f \mapsto a^{\sharp}(f)$ が線形になる形式をとる.

も稠密になる. ちなみに

$$\left(\prod_{j=1}^m a^*(f_j)\Omega\right)^{(n)} = \delta_{nm}\sqrt{n!}S_n(f_1 \otimes \cdots \otimes f_n)$$

である.

$$\mathcal{F}_{\text{fin}} = \{(\Psi^{(n)})_{n \geq 0} \in \mathcal{F} \mid \exists M \text{ s.t. } \Psi^{(m)} = 0 (\forall m \geq M)\}$$

は有限粒子部分空間といわれる. a, a^* は \mathcal{F}_{fin} を不変にし, \mathcal{F}_{fin} 上で正準交換関係

$$[a(f), a^*(g)] = (\bar{f}, g)\mathbb{1}, \quad [a(f), a(g)] = 0, \quad [a^*(f), a^*(g)] = 0$$

をみたす. T を \mathcal{W} 上の縮小作用素とする. T の第 2 量子化 $\Gamma(T)$ を

$$\Gamma(T) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (\otimes^n T)$$

で定義する. ここで $\otimes^0 T = \mathbb{1}$. $\Gamma(T)$ も縮小作用素になる. 第 2 量子化 Γ はファンクター $\Gamma: \mathcal{C}(\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W}) \rightarrow \mathcal{C}(\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F})$ を定める. ここで $\mathcal{C}(X \rightarrow Y)$ は X から Y への縮小作用素全体の集合である. ファンクター Γ は半群の性質をみたし, さらに $\mathcal{C}(\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W})$ は $*$ -代数である. つまり

$$\Gamma(S)\Gamma(T) = \Gamma(ST), \quad \Gamma(S)^* = \Gamma(S^*), \quad \Gamma(\mathbb{1}) = \mathbb{1}$$

が $S, T \in \mathcal{C}(\mathcal{W} \rightarrow \mathcal{W})$ に対して成り立つ. 自己共役作用素 h に対して $\{\Gamma(e^{ith}) : t \in \mathbb{R}\}$ は強連続 1 径数ユニタリー群になる. Stone の定理により一意的な自己共役作用素 $d\Gamma(h) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ で

$$\Gamma(e^{ith}) = e^{itd\Gamma(h)}, \quad t \in \mathbb{R},$$

となるものが存在する. これも h の第 2 量子化という.

$$d\Gamma(h) = -i \frac{d}{dt} \Gamma(e^{ith}) \Big|_{t=0}$$

だから

$$d\Gamma(h) = 0 \oplus \left[\bigoplus_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^n \mathbb{1} \otimes \cdots \otimes \overset{j}{h} \otimes \cdots \otimes \mathbb{1} \right) \right]$$

となる. よって

$$d\Gamma(h)\Omega_b = 0, \quad d\Gamma(h)a^*(f_1) \cdots a^*(f_n)\Omega_b = \sum_{j=1}^n a^*(f_1) \cdots a^*(hf_j) \cdots a^*(f_n)\Omega_b.$$

第2量子化作用素のスペクトルは

$$\sigma(d\Gamma(h)) = \overline{\left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j \mid \lambda_j \in \sigma(h), j = 1, \dots, n, n \geq 1 \right\}} \cup \{0\},$$

$$\sigma_p(d\Gamma(h)) = \overline{\left\{ \sum_{j=1}^n \lambda_j \mid \lambda_j \in \sigma_p(h), j = 1, \dots, n, n \geq 1 \right\}} \cup \{0\}$$

となるので、もし $0 \notin \sigma_p(h)$ ならば $d\Gamma(h)$ の固有値 0 は単純になる。

$$N = d\Gamma(\mathbb{1})$$

は個数作用素といわれ、 $\sigma(N) = \sigma_{\text{disc}}(N) = \mathbb{N} \cup \{0\}$ である。

$a^\sharp(f)$ は非有界作用素である。そこで有用な不等式を紹介する。

命題 7.1 h は正の自己共役作用素、 $f \in D(h^{-1/2})$ 、 $\Psi \in D(d\Gamma(h)^{1/2})$ とする。このとき $\Psi \in D(a^\sharp(f))$ かつ

$$\|a(f)\Psi\| \leq \|h^{-1/2}f\| \|d\Gamma(h)^{1/2}\Psi\|, \quad \|a^*(f)\Psi\| \leq \|h^{-1/2}f\| \|d\Gamma(h)^{1/2}\Psi\| + \|f\| \|\Psi\|.$$

特に $f \in D(h^{-1/2})$ のとき $D(d\Gamma(h)^{1/2}) \subset D(a^\sharp(f))$.

この命題から $f \in \mathscr{W}$ に対して、

$$\|a(f)\Psi\| \leq \|f\| \|N^{1/2}\Psi\|, \quad \|a^*(f)\Psi\| \leq \|f\| (\|N^{1/2}\Psi\| + \|\Psi\|)$$

が分かる。最後に第2量子化作用素と生成・消滅作用素の交換関係を与えておく。

$$[d\Gamma(h), a^*(f)]\Psi = a^*(hf)\Psi, \quad [d\Gamma(h), a(f)]\Psi = -a(hf)\Psi.$$

ここで $\Psi \in D(d\Gamma(h)^{3/2}) \cap \mathscr{F}_{\text{fin}}$. これは極限操作により $\Psi \in D(d\Gamma(h)^{3/2})$ まで拡張できる。

Segal 場 $\Phi(f)$ は

$$\Phi(f) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(f) + a(\bar{f}))$$

で定義される。またその共役運動量作用素は

$$\Pi(f) = \frac{i}{\sqrt{2}}(a^*(f) - a(\bar{f}))$$

で定義される。すぐに

$$[\Phi(f), \Pi(g)] = i\text{Re}(f, g), \quad [\Phi(f), \Phi(g)] = i\text{Im}(f, g), \quad [\Pi(f), \Pi(g)] = i\text{Im}(f, g)$$

がわかる。

命題 7.2 (Nelson の解析ベクトル定理) K を対称作用素とする. 部分集合 $\mathcal{D} \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} D(K^n)$ を次で定める. $f \in \mathcal{D}$ とは, ある $t > 0$ に対して $\sum_{n=0}^{\infty} \|K^n f\| t^n / n! < \infty$. \mathcal{D} が稠密なとき, K は \mathcal{D} 上本質的自己共役である.

この命題と

$$\text{s-} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{\|\Phi(f)^n \Psi\| t^n}{n!} < \infty, \quad \text{s-} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{\|\pi(f)^n \Psi\| t^n}{n!} < \infty$$

が $\Psi \in \mathcal{F}_{\text{fin}}$ と $t \geq 0$ で成り立つので, $\Phi(f)$ と $\Pi(g)$ がともに \mathcal{F}_{fin} 上本質的自己共役作用素であることがわかる. その閉包も同じ記号で表す.

Wick 積: $\prod_{i=1}^n \Phi(f_i)$: は帰納的に

$$\begin{aligned} & : \Phi(f) := \Phi(f), \\ & : \Phi(f) \prod_{i=1}^n \Phi(f_i) := \Phi(f) : \prod_{i=1}^n \Phi(f_i) : - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (f, f_j) : \prod_{i \neq j} \Phi(f_i) : \end{aligned}$$

で定義される. すぐに

$$: \Phi(f)^n := \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{n!}{k!(n-2k)!} \Phi(f)^{n-2k} \left(-\frac{1}{4} \|f\|^2 \right)^k$$

がわかる. $: \Phi(f_1) \cdots \Phi(f_n) : \Omega_b = 2^{-n/2} a^*(f_1) \cdots a^*(f_n) \Omega_b$ なので

$$\left(: \prod_{i=1}^n \Phi(f_i) : \Omega_b, : \prod_{i=1}^m \Phi(g_i) : \Omega_b \right) = \delta_{nm} 2^{-n/2} \sum_{\pi \in \mathcal{S}_n} \prod_{i=1}^n (g_i, f_{\pi(i)})$$

となる. さらに

$$: e^{\alpha \Phi(f)} : \Omega_b = \text{s-} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{\alpha^n}{n!} : \Phi(f)^n : \Omega_b = e^{-(1/4)\alpha^2 \|f\|^2} e^{\alpha \Phi(f)} \Omega_b.$$

つまり実数値関数 f, g に対して $(\Omega_b, \Phi(f) \Omega_b) = 0$, $(\Omega_b, \Phi(f) \Phi(g) \Omega_b) = \frac{1}{2} (f, g)$. さらに

$$(\Omega_b, e^{\alpha \Phi(f)} \Omega_b)_{\mathcal{F}} = e^{(1/4)\alpha^2 \|f\|^2}$$

が成り立つ.

7.3 \mathcal{Q} -空間

実ベクトル空間 \mathcal{E} を指数にもつ、確率空間 $(\mathcal{Q}, \Sigma, \mu)$ 上のガウス超過程について考える。

定義 7.3 (ガウス超過程) $(\phi(f), f \in \mathcal{E})$ が確率空間 $(\mathcal{Q}, \Sigma, \mu)$ 上の \mathcal{E} を指数に持つガウス超過程であるとは次を満たすことである。

- (1) $\phi(f)$ は $(\mathcal{Q}, \Sigma, \mu)$ 上のガウス過程で平均ゼロ、共分散が $\mathbb{E}_\mu[\phi(f)\phi(g)] = \frac{1}{2}(f, g)_\mathcal{E}$.
- (2) $\phi(\alpha f + \beta g) = \alpha\phi(f) + \beta\phi(g)$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
- (3) Σ は $\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{E}\}$ を可測にする最小のシグマ代数.

ガウス超過程の存在は知られている。

$$\mathcal{S}_\mathcal{Q} = \{F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n)) \mid F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), f_j \in \mathcal{E}, j = 1, \dots, n, n \geq 1\}$$

と定義する。

補題 7.4 次は同値である。

- (1) $\mathcal{S}_\mathcal{Q}$ は $L^2(\mathcal{Q})$ で稠密.
- (2) Σ は $\{\phi(f) \mid f \in \mathcal{E}\}$ を可測にする最小のシグマ代数.

7.4 Wiener-Itô-Segal 同型

$L^2(\mathcal{Q}) = L^2(\mathcal{Q}, \Sigma, \mu)$ とおく. \mathcal{E} を実ヒルベルト空間とする. $L^2(\mathcal{Q})$ と $\mathcal{F}(\mathcal{E}_\mathbb{C})$ はユニタリ同値になることが知られている. ここで $\mathcal{E}_\mathbb{C}$ は複素ヒルベルト空間で \mathcal{E} の複素化である³⁰. これをみてみよう. Fock 空間の Wick 積と同様に $L^2(\mathcal{Q})$ 上の Wick 積を定義する. $\prod_{i=1}^n \phi(f_i)$ の Wick 積を帰納的に

$$\begin{aligned} &:\phi(f): := \phi(f), \\ &:\phi(f) \prod_{i=1}^n \phi(f_i): := \phi(f) : \prod_{i=1}^n \phi(f_i) : - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (f, f_j) : \prod_{i \neq j} \phi(f_i) : \end{aligned}$$

³⁰ 複素化 $\mathcal{E}_\mathbb{C}$ は $\mathcal{E}_\mathbb{C} = \{\{f, g\} \mid f, g \in \mathcal{E}\}$ で定義し, $\lambda \in \mathbb{R}$ に対して $\lambda\{f, g\} = \{\lambda f, \lambda g\}$, $i\{f, g\} = \{-\lambda f, \lambda g\}$, $\{f, g\} + \{f', g'\} = \{f + f', g + g'\}$ となるものである. スカラー積は $\mathcal{E}_\mathbb{C}$ 上に $(\{f, g\}, \{f', g'\})_{\mathcal{E}_\mathbb{C}} = (f, f') + (g, g') + i((f, g') - (g, f'))$ で定義される. $(\mathcal{E}_\mathbb{C}, (\cdot, \cdot)_{\mathcal{E}_\mathbb{C}})$ は Hilbert 空間になる.

で定義する. すぐに $f_i, g_j \in \mathcal{E}$ に対して

$$\left(: \prod_{i=1}^n \phi(f_i) :, : \prod_{i=1}^m \phi(g_i) : \right) = \delta_{mn} \sum_{\pi \in \varrho_n} 2^{-n} \prod_{i=1}^n (f_i, g_{\pi(i)}).$$

さらに

$$: e^{\alpha\phi(f)} : := \text{s-} \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m \frac{\alpha^n}{n!} : \phi(f)^n : := e^{(1/4)\alpha^2 \|f\|^2} e^{\alpha\phi(f)}$$

もわかる. 部分空間を

$$L_n^2(\mathcal{Q}) = \text{L.H.} \left\{ : \prod_{i=1}^n \phi(f_i) : \mid f_i \in \mathcal{E}, i = 1, \dots, n \right\} \cup \{ \mathbb{1} \}$$

としよう. このとき $L_m^2(\mathcal{Q}) \perp L_n^2(\mathcal{Q})$ ($n \neq m$) がわかる. $L^2(\mathcal{Q}) \supset \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_n^2(\mathcal{Q})$ は自明だが, 実は次が示せる.

補題 7.5 $L^2(\mathcal{Q}) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_n^2(\mathcal{Q})$.

補題 7.5 は Wiener-Itô 分解として知られている. $U_W : \mathcal{F}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}) \rightarrow L^2(\mathcal{Q})$ を

$$U_W : \prod_{i=1}^n \Phi(f_i) : \Omega_b = : \prod_{i=1}^n \phi(f_i) :, \quad f_1, \dots, f_n \in \mathcal{E}, \quad U_W \Omega_b = \mathbb{1}$$

で定める.

命題 7.6 (Wiener-Itô-Segal 同型) $U_W : \mathcal{F}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}) \rightarrow L^2(\mathcal{Q})$ は次を満たす: (1) $U_W \Omega_b = \mathbb{1}$, (2) $U_W \mathcal{F}^{(n)}(\mathcal{E}_{\mathbb{C}}) = L_n^2(\mathcal{Q})$, (3) $U_W \Phi(f) U_W^{-1} = \phi(f)$, $f \in \mathcal{E}$.

$T : \mathcal{E}_{\mathbb{C}} \rightarrow \mathcal{E}_{\mathbb{C}}$ を縮小作用素とする.

$$U_W \Gamma(T) U_W^{-1} : L^2(\mathcal{Q}) \rightarrow L^2(\mathcal{Q})$$

も $L^2(\mathcal{Q})$ 上の第 2 量子化作用素とよばれ, 簡単に $\Gamma(T)$ と書くことにする. $T : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ のとき,

$$\Gamma(T) : \prod_{i=1}^n \phi(f_i) := : \prod_{i=1}^n \phi(T f_i) :, \quad f_i \in \mathcal{E}, \quad \Gamma(T) \mathbb{1} = \mathbb{1}$$

がわかる. さらに自己共役作用素 h に対して $U_W d\Gamma(h) U_W^{-1}$ も混乱しない限りは簡単に $d\Gamma(h)$ とかくことにする. もちろん $h : \mathcal{E} \cap D(h) \rightarrow \mathcal{E}$ のとき

$$d\Gamma(h) : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) := \sum_{j=1}^n : \phi(f_1) \cdots \phi(h f_j) \cdots \phi(f_n) :, \quad f_i \in \mathcal{E}, \quad d\Gamma(h) \mathbb{1} = 0$$

である.

命題 7.7 (正值保存性) T を実 Hilbert 空間 \mathcal{E} 上の縮小作用素とする. このとき $\Gamma(T)$ は正值保存作用素になる.

証明: $\Gamma(T) : \exp(\alpha\phi(f)) := \exp(\alpha\phi(Tf))$: が $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して成立する. よって

$$\Gamma(T)e^{\alpha\phi(f)} = e^{\alpha\phi(Tf)} e^{\frac{1}{4}\alpha^2(f, (1-T^*T)f)}$$

となる. $F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n)) \in \mathcal{S}_{\mathcal{Q}}$ に対しては,

$$\Gamma(T)F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n)) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} dk \hat{F}(k) e^{-\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n (f_i, (1-T^*T)f_j) k_i k_j} e^{i\sum_{j=1}^n k_j \phi(Tf_j)}.$$

$\|T\| \leq 1$ なので, $\{(f_i, (1-T^*T)f_j)\}_{i,j}$ は正定値³¹. よって F とガウス核 D_T のたたみこみで

$$\Gamma(T)F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n)) = (2\pi)^{-n/2} (F * D_T)(\phi(Tf_1), \dots, \phi(Tf_n))$$

と表せる. これから $F \geq 0$ は $\Gamma(T)F \geq 0$ を意味する. $\Psi \in L^2(\mathcal{Q})$ を非負としよう. $F_n \in \mathcal{S}_{\mathcal{Q}}$ で $0 \leq F_n \rightarrow \Psi$ ($n \rightarrow \infty$) となる列が存在するので極限操作により命題が従う. \square

7.5 スカラー場

スカラー場を考える. $\mathcal{W} = L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき $\mathcal{F}^{(n)}$ は $L^2(\mathbb{R}^{dn})$ の対称関数の全体 $\{f \in L^2(\mathbb{R}^{dn}) | f(k_1, \dots, k_n) = f(k_{\pi(1)}, \dots, k_{\pi(n)}), \forall \pi \in \wp_n\}$ と同一視できる. 生成・消滅作用素は³²

$$(a(f)\Psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \sqrt{n+1} \int_{\mathbb{R}^d} f(k) \Psi^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n) dk, \quad n \geq 0,$$

$$(a^*(f)\Psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n f(k_j) \Psi^{(n-1)}(k_1, \dots, \hat{k}_j, \dots, k_n), \quad n \geq 1,$$

$$(a^*(f)\Psi)^{(0)} = 0$$

³¹positive semi-definite.

³²形式的に記号 $a(k)$ と $a^*(k)$ は

$$(a(k)\Psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \sqrt{n+1} \Psi^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n),$$

$$(a^*(k)\Psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \delta(k - k_j) \Psi^{(n-1)}(k_1, \dots, \hat{k}_j, \dots, k_n),$$

となり $[a(k), a^*(k')] = \delta(k - k')$, $[a(k), a(k')] = 0 = [a^*(k), a^*(k')]$ をみたす.

となる. $\omega : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ はかけ算作用素で³³, 次で定義される.

$$\omega(k) = \sqrt{|k|^2 + m^2}, \quad k \in \mathbb{R}^d. \quad (7.3)$$

ここで $m \geq 0$ はボゾンの質量を表す. その第 2 量子化作用素は

$$(d\Gamma(\omega)\Psi)^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \left(\sum_{j=1}^n \omega(k_j) \right) \Psi^{(n)}(k_1, \dots, k_n)$$

となる. $d\Gamma(\omega)$ は自由 Hamiltonian といわれ,

$$H_f = d\Gamma(\omega) \quad (7.4)$$

とおく³⁴.

$$\sigma(H_f) = [0, \infty), \quad \sigma_p(H_f) = \{0\} \quad (7.5)$$

である. 特に $H_f \Omega_b = 0$. 交換関係は

$$[H_f, a(f)] = -a(\omega f), \quad [H_f, a^*(f)] = a^*(\omega f).$$

もし $f/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ならば次の有用な不等式

$$\|a(f)\Psi\| \leq \|f/\sqrt{\omega}\| \|H_f^{1/2}\Psi\|, \quad \|a^*(f)\Psi\| \leq \|f/\sqrt{\omega}\| \|H_f^{1/2}\Psi\| + \|f\| \|\Psi\|$$

が成り立つ. 形式的な表記

$$a^\sharp(f) = \int a^*(k)f(k)dk$$

をこのノートでは断りなしに使う.

7.6 Euclid 場と Markov 性

ガウス超過程の作る空間 $L^2(\mathcal{Q}, d\mu)$ が $\mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d))$ と自然に同型となるものを構成しよう.

定理 7.8 (Bochner-Minlos の定理) $\mathcal{Q} = \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)'$ として, $\phi(f) = \langle \phi, f \rangle$, $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, とする. このとき, $\phi(f)$, $f \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ がガウス超過程になる測度 μ が \mathcal{Q} 上に存在する.

³³ dispersion relation とよばれる.

³⁴ 形式的に $H_f = \int \omega(k)a^*(k)a(k)dk$ と書くこともある.

定理 7.8 により

$$\mathbb{E}_\mu[|\phi(f)|^2] = \frac{1}{2}\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2$$

となるから, $\phi(f)$ は $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ まで拡大することが出来る. 実際 $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ に対して $f_n \rightarrow f$ となる列 $f_n \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ が存在するので

$$\phi(f) = s - \lim_{n \rightarrow \infty} \phi(f_n)$$

として定義できる.

定理 7.9 ($\phi(f), f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$) は $(\mathcal{Q}, \Sigma, \mu)$ 上のガウス超過程である.

$f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$\phi(f) = \phi(\Re f) + i\phi(\Im f), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

まで拡張しておく. $L^2(\mathcal{Q}) \cong \mathcal{F}(L^2(\mathbb{R}^d))$ が Wiener-Itô-Segal 同型から従う. $F : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ をフーリエ変換とし, ユニタリー作用素 $\Gamma(F) : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ を考える. このとき

$$\Gamma(F)a^*(f)\Gamma(F)^{-1} = a^*(\hat{f}), \quad \Gamma(F)a(f)\Gamma(F)^{-1} = a(\hat{\bar{f}})$$

となる. 特に

$$\Gamma(F)\Phi(f)\Gamma(F)^{-1} = \Phi(\hat{f}), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d)$$

が成り立つから, $\Phi(f)$ と $\Phi(\hat{f})$ は同型である. よって $U_W\phi(f)U_W^{-1} = \Phi(f)$, $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, なので

$$\phi(f) \cong \Phi(\hat{f}), \quad f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$$

となる. ここで, 細かな注意をあたえる. 一般の $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ に対しては $\phi(f)$ と $\Phi(\hat{f})$ は同型にならない. なぜならば, $\phi(f)$ は f について複素線形だが, $\Phi(\hat{f})$ は実線形なため. そこで,

$$\phi_b(f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k)\hat{f}(k) + a(k)\hat{f}(-k) \right) dk$$

とすれば,

$$\phi(f) \cong \phi_b(f), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

となる. もちろん $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ のとき $\Phi(\hat{f}) = \phi_b(f)$ である. また, 時間発展について考えてみよう. h を自己共役作用素とする. このとき

$$e^{itd\Gamma(h)}a^*(f)e^{-itd\Gamma(h)} = a^*(e^{ith}f), \quad e^{itd\Gamma(h)}a(f)e^{-itd\Gamma(h)} = a^*(\overline{e^{ith}f})$$

となる. よって

$$e^{itd\Gamma(h)}\Phi(f)e^{-itd\Gamma(h)} = \Phi(e^{ith}f), \quad f \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

となる. しかし, 一般に

$$e^{itd\Gamma(h)}\phi(f)e^{-itd\Gamma(h)} \neq \phi(e^{ith}f)$$

である. ただし, 条件 $e^{ith} : L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ のとき

$$e^{itd\Gamma(h)}\phi(f)e^{-itd\Gamma(h)} = \phi(e^{ith}f), \quad f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d),$$

が従う.

さて, $\phi_E(F)$ は確率空間 $(\mathcal{Q}_E, \Sigma_E, \mu_E)$ 上の $F \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1})$ を指数に持つガウス超過程とする. 構成の仕方は $\phi(f)$ と全く同じである. 違うのは次元が $d+1$ 次元に変わったところだけである. これを Euclid 場という. いまから

$$J_t : L^2(\mathcal{Q}) \rightarrow L^2(\mathcal{Q}_E) \quad (7.6)$$

を

$$j_t : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d) \quad (7.7)$$

の第 2 量子化作用素で定義しよう. ここで

$$\widehat{j_s f}(k_0, k) = \frac{e^{-itk_0}}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{\omega(k)}}{\sqrt{\omega(k)^2 + |k_0|^2}} \widehat{f}(k). \quad (7.8)$$

$f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ に対して $\overline{j_t f} = j_t f$ だから j_t は実を実にうつす. I.e., $j_t : L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$.

$$\widehat{\omega} = \omega(-i\nabla) = \sqrt{-\Delta + \nu^2} \quad (7.9)$$

とする.

命題 7.10 任意の $t, s \in \mathbb{R}$ に対して, $j_s^* j_t = e^{-|t-s|\widehat{\omega}}$. 特に j_t は等長作用素である.

証明: 簡単なので省略する. □

$J_t : L^2(\mathcal{Q}) \rightarrow L^2(\mathcal{Q}_E)$ を

$$J_t \mathbb{1}_M = \mathbb{1}_E, \quad J_t : \phi(f_1) \cdots \phi(f_n) := \phi_E(j_t f_1) \cdots \phi_E(j_t f_n) : \quad (7.10)$$

で定義する. 恒等式 $j_s^* j_t = e^{-|t-s|\widehat{\omega}}$ から

$$J_t^* J_s = e^{-|t-s|U_W^{-1} H_f U_W} \quad (7.11)$$

が従う. ここで $U_W^{-1} H_f U_W$ は $L^2(\mathcal{Q})$ の自由 Hamiltonian で, 以降 H_f と書くことにする.

命題 7.11 (自由 Hamiltonian の汎関数積分表示) $F, G \in L^2(\mathcal{Q})$ とし $t \geq 0$ とする. このとき

$$(F, e^{-tH_t}G)_{L^2(\mathcal{Q})} = (J_0F, J_tG)_{L^2(\mathcal{Q}_E)}.$$

証明: (7.11) から従う. □

ユークリッド場の Markov 性について説明する. $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$ に対して

$$U(\mathcal{O}) = \overline{\{f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1}) \mid f \in \text{Ran}(j_t), t \in \mathcal{O}\}}$$

とおき, 射影作用素 $L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1}) \rightarrow U(\mathcal{O})$ を $e_{\mathcal{O}}$ で表す. $\Sigma_{\mathcal{O}}$ は

$$\Sigma_{\mathcal{O}} = \sigma(\{\phi_E(f) \in L^2(\mathcal{Q}_E) \mid f \in U(\mathcal{O})\}) \subset \Sigma.$$

一方

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}} = \{\Phi \in L^2(\mathcal{Q}_E) \mid \Phi \text{ は } \Sigma_{\mathcal{O}} \text{ 可測}\}$$

とする. $e_t = j_t j_t^* : L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1}) \rightarrow \text{Ran}(j_t)$, $t \in \mathbb{R}$, とすれば $\{e_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ は射影作用素の族になる. $\Sigma_t = \Sigma_{\{t\}}$, $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_{\{t\}}$ としよう.

補題 7.12 $a \leq b \leq t \leq c \leq d$ とする. 次の (a)-(d) が成立する. (a) $e_a e_b e_c = e_a e_c$, (b) $e_{[a,b]} e_t e_{[c,d]} = e_{[a,b]} e_{[c,d]}$, (c) $e_c e_b e_a = e_c e_a$, (d) $e_{[c,d]} e_t e_{[a,b]} = e_{[c,d]} e_{[a,b]}$.

$E_t = J_t J_t^* = \Gamma_E(e_t)$, $E_{\mathcal{O}} = \Gamma_E(e_{\mathcal{O}})$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}$, としよう.

命題 7.13 (Markov 性) (1) $\text{Ran}(E_{[a,b]}) = \mathcal{E}_{[a,b]}$. (2) $E_{[a,b]} E_t E_{[c,d]} = E_{[a,b]} E_{[c,d]}$, $E_{[c,d]} E_t E_{[a,b]} = E_{[c,d]} E_{[a,b]}$ が $a \leq b \leq t \leq c \leq d$ に対して成り立つ. (3) もし $[a, b] \subset [c, d]$ ならば $E_{[a,b]} E_{[c,d]} = E_{[c,d]} E_{[a,b]} = E_{[a,b]}$.

注意 7.14 命題 7.13 (1) から $E_{[a,b]}$ は $\Sigma_{[a,b]}$ 可測な $L^2(\mathcal{Q}_E)$ 関数全体への射影である. $E_{[a,b]} F$ は $\mathbb{E}_{\mu_E}[F \mid \Sigma_{[a,b]}]$ と一致する³⁵. また $E_t F = \mathbb{E}_{\mu_E}[F \mid \Sigma_t]$. 命題 7.13 (2) は E_s , $s \in \mathbb{R}$, の Markov 性とよばれる.

命題 7.15 $F \in \mathcal{E}_{s+t}$ とするとき $\mathbb{E}_{\mu_E}[F \mid \Sigma_{(-\infty, s]}] = \mathbb{E}_{\mu_E}[F \mid \Sigma_s]$ が成り立つ.

³⁵条件付き期待値という.

証明: $\mathbb{E}_{\mu_E}[F|\Sigma_{(-\infty,s]}] = \mathbb{E}_{(-\infty,s]}F = \mathbb{E}_{(-\infty,s]}E_{s+t}F = \mathbb{E}_{(-\infty,s]}E_sE_{s+t}F$ が Markov 性から従う。
 $\mathbb{E}_{(-\infty,s]}E_s = \mathbb{E}_{(-\infty,s]}E_{\{s\}} = \mathbb{E}_{\{s\}} = E_s$ なので $\mathbb{E}_{(-\infty,s]}E_sE_{s+t}F = E_sE_{s+t}F = E_sF = \mathbb{E}_{\mu_E}[F|\Sigma_s]$
 がわかる。 \square

この Markov 性を使って Feynman-Kac 型汎関数積分表示を構成できる。簡単な例を紹介しよう。多項式

$$P(X) = a_{2n}X^{2n} + a_{2n-1}X^{2n-1} + \cdots + a_1X + a_0$$

で $a_{2n} > 0$ とする。 $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ に対して

$$H_1 =: P(\phi(f)):$$

そして

$$H_P = H_f \dot{+} H_1$$

とする³⁶。 e^{-tH_P} の Feynman-Kac 型汎関数積分表示を形式的に求める。 Trotter 積公式から

$$e^{-tH_P} = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} \left(e^{-(t/n)H_f} e^{-(t/n)H_1} \right)^n.$$

ここに $e^{-|t-s|H_f} = J_t^* J_s$ を代入すると

$$e^{-tH_P} = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} J_0^* \left(\prod_{j=1}^n J_{tj/n} e^{-(tj/n)H_1} J_{tj/n}^* \right) J_t.$$

よって

$$e^{-tH_P} = s\text{-}\lim_{n \rightarrow \infty} J_0^* \left(\prod_{j=1}^n E_{tj/n} e^{-(tj/n)H_1(tj/n)} E_{tj/n} \right) J_t.$$

$H_1(t/n)$ は $L^2(\mathcal{Q}_E)$ に作用する作用素。 E_s の Markov 性からすべての E_s を消し去ることができて

$$(F, e^{-tH_P} G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(J_0 F, \left(\prod_{j=1}^n e^{-(tj/n)H_1(tj/n)} \right) J_t G \right) = (J_0 F, e^{-\int_0^t H_1(s) ds} J_t G)$$

となる。厳密に証明すれば以下のようなになる。

定理 7.16 (Feynman-Kac-Nelson 公式) $F, G \in L^2(\mathcal{Q})$ とする。このとき

$$(F, e^{-tH_P} G)_{L^2(\mathcal{Q})} = (J_0 F, e^{-\int_0^t H_1(s) ds} J_t G)_{L^2(\mathcal{Q}_E)}.$$

³⁶ $\dot{+}$ は quadratic form sum を表す。

証明: $F_0 = J_t F$, $G_t = J_t G$ とおく. トロツタ 積公式と $e^{-|t-s|H_t} = J_t^* J_s$ によって,

$$(F, e^{-tH_P} G) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F, (e^{-(t/n)H_t} e^{-(t/n)H_1})^n G) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(F_0, \prod_{i=1}^n (E_{ti/n} R_i E_{ti/n}) G_t \right).$$

ここで $R_j = e^{-(t/n)P(\phi_E(j_t/n f))}$, 等式

$$J_s \exp(-tH_1) J_s^* = E_s \exp(-t : P(\phi_E(j_s f)) :) E_s$$

をつかった. 実際, この等式は以下のように示すことができる.

$$J_t \phi(f) : \prod_{i=1}^n \phi(f_i) : =: \phi_E(j_t f) \prod_{i=1}^n \phi_E(j_t f_i) : + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (j_t f, j_t f_j) : \prod_{i \neq j}^n \phi(j_t f_i) : =: \phi_E(j_t f) J_t : \prod_{i=1}^n \phi(f_i) : .$$

よって $J_t \phi(f) J_t^* = \phi_E(j_t f) E_t = E_t \phi_E(j_t f) E_t$ となり, 帰納的に

$$J_t \left(\prod_{j=1}^n \phi(f_j) \right) J_t^* = E_t \left(\prod_{j=1}^n \phi_E(j_t f_j) \right) E_t$$

が示せて, 簡単な極限操作で等式をえる. よって

$$\left(F_0, \prod_{i=1}^n (E_{ti/n} R_i E_{ti/n}) G_t \right) = \left(\underbrace{F_0}_{\in \mathcal{E}_{\{0\}}}, \underbrace{E_{t/n} R_1 E_{t/n} (E_{2t/n} R_2 E_{2t/n}) \cdots (E_t R_n E_t) G_t}_{\in \mathcal{E}_{[t/n, t]}} \right).$$

Markov 性から $E_{t/n}$ を消してもいいから

$$\left(F_0, \prod_{i=1}^n (E_{ti/n} R_i E_{ti/n}) G_t \right) = \left(\underbrace{R_1 F_0}_{\in \mathcal{E}_{[0, t/n]}}, \underbrace{E_{2t/n} R_2 E_{2t/n} \cdots (E_t R_n E_t) G_t}_{\in \mathcal{E}_{[2t/n, t]}} \right).$$

同様に $E_{t/n}$ も消していいので

$$\left(F_0, \prod_{i=1}^n (E_{ti/n} R_i E_{ti/n}) G_t \right) = \left(\underbrace{R_1 F_0}_{\in \mathcal{E}_{[0, t/n]}}, \underbrace{E_{2t/n} R_2 E_{2t/n} \cdots (E_t R_n E_t) G_t}_{\in \mathcal{E}_{[2t/n, t]}} \right).$$

帰納的に全ての E_s を消していいから

$$(F, e^{-tH_P} G) = \lim_{n \rightarrow \infty} (F_0, R_1 \cdots R_n G_t) = (F_0, e^{-\int_0^t H_1(s) ds} G_t)_{L^2(\mathcal{Q})}.$$

□

7.7 Euclid 群と射影作用素の分解

$L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ 上の Euclid 群 $\{u_t, R\}$ は時間シフト $u_t f(x_0, \mathbf{x}) = f(x_0 - t, \mathbf{x})$, 時間反転 $r f(x_0, \mathbf{x}) = f(-x_0, \mathbf{x})$ で定義される. $U_t = \Gamma(u_t) : L^2(\mathcal{Q}_E) \rightarrow L^2(\mathcal{Q}_E)$, $R = \Gamma(r) : L^2(\mathcal{Q}_E) \rightarrow L^2(\mathcal{Q}_E)$ と定義する. このとき $U_t^* = U_{-t}$, $R^* = R$ を満たし, ともにユニタリーである. $U_t J_s = J_{s+t}$, $R U_s = U_{-s} R$ が成立する. また, 射影作用素は $E_s = J_s J_s^* = J_s J_0^* U_{-s}$ のように分解できる.

8 Nelson 模型

8.1 Nelson 模型の形式的な導出

Nelson 模型はスカラー場と Schrödinger 方程式に従う非相対論的な粒子が線形の相互作用をする模型である. E. Nelson は 1964 年に [Nel64a, Nel64b] で今日 Nelson 模型といわれるものを厳密に定義し, UV くりこみに成功して紫外切断のない自己共役作用素を定義した.

Nelson 模型の Lagrangian 密度 $\mathcal{L}_N = \mathcal{L}_N(x, t)$, $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, は

$$\mathcal{L}_N = i\Psi^* \dot{\Psi} + \frac{1}{2m} \partial_j \Psi^* \partial_j \Psi + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \nu^2 \phi^2 + \Psi^* \Psi \phi$$

で与えられる. ここで $\Psi = \Psi(x, t)$ は非相対論的でスピンのない粒子を表す複素スカラー場, $\phi(x, t)$ は中性スカラー場, $\nu \geq 0$ はボゾンの質量, $m > 0$ は粒子の質量である. ここで $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \dot{\phi} \dot{\phi} - \partial_j \phi \partial_j \phi$, $\partial_j = \partial_{x_j}$, $\dot{\phi}$ は時間微分を表し $*$ は複素共役を表す. これは湯川型の強い相互作用と同じ相互作用項 $\Psi^* \Psi \phi$ をもつ. ただし素粒子論で強い相互作用に現れるフェルミオン³⁷は生成消滅をしない非相対論的な Schrödinger 作用素に置換えられている. Euler-Lagrange 方程式は

$$\begin{cases} (\square + \nu^2) \phi(x, t) = \Psi^*(x, t) \Psi(x, t), \\ (i\partial_t + \frac{1}{2m} \Delta_x) \Psi(x, t) = \phi(x, t) \Psi(x, t). \end{cases}$$

前者が $\Psi^*(x, t) \Psi(x, t)$ を電荷密度 (のようなもの) にもったクラインゴールドン方程式で, 後者が $\phi(x, t)$ をポテンシャルにもった Schrödinger 方程式である. Legendre 変換から Hamiltonian 密度を計算してみよう. 共役な運動量は

$$\Phi = \frac{\partial \mathcal{L}_N}{\partial \dot{\Psi}} = i\Psi^*, \quad \pi = \frac{\partial \mathcal{L}_N}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}.$$

³⁷グルオン

よって Hamiltonian 密度 $H = H_N(x, t)$ は

$$H = \Phi \dot{\Psi} + \pi \dot{\phi} - \mathcal{L}_N = \frac{1}{2m} |\partial_x \Psi|^2 + \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + (\partial_x \phi)^2 + \nu^2 \phi^2) - \Psi^* \Psi \phi.$$

さらに Hamiltonian は

$$H = \int_{\mathbb{R}^3} \left\{ \Psi^* \left(-\frac{1}{2} \Delta_x \right) \Psi + \frac{1}{2} (\dot{\phi}^2 + (\partial_x \phi)^2 + \nu^2 \phi^2) - \Psi^* \Psi \phi \right\} dx.$$

運動項は $\int_{\mathbb{R}^3} \Psi^* \left(-\frac{1}{2} \Delta_x \right) \Psi dx \rightarrow -\frac{1}{2} \Delta$ に置換えられ, 相互作用項は $-\int_{\mathbb{R}^3} \Psi^* \Psi \phi dx \rightarrow \phi(x)$ に置換えられる. 粒子のポテンシャル V を加えて, 形式的に Nelson 模型は $-\frac{1}{2} \Delta + V + H_f + \phi(x)$ となる. ここで $H_f = \frac{1}{2} \int (\dot{\phi}^2 + (\partial_x \phi)^2 + \nu^2 \phi^2) dx$ である. 次の節で厳密に自己共役作用素として Nelson 模型の Hamiltonian を定義する.

8.2 Fock 空間上の Nelson 模型

空間次元を d とする. $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の Fock 空間を簡単に \mathcal{F} とおき, Nelson 模型の状態ベクトルのなす Hilbert 空間は

$$\mathcal{H}_N = L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F} \quad (8.1)$$

で与えられる.

条件 8.1 (Dispersion relation) $\omega = \omega(k) = \sqrt{|k|^2 + \nu^2}$, $\nu \geq 0$.

(荷電分布) $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\overline{\hat{\varphi}(k)} = \hat{\varphi}(-k) = \hat{\varphi}(k)$, $\hat{\varphi}/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\hat{\varphi}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

(ポテンシャル) $V = V_+ - V_-$ は Kato 分解可能.

以降, 断らない限りは条件 8.1 を仮定する. \mathcal{H}_N を \mathcal{F} 値 L^2 関数の空間と同一視する.

$$\mathcal{H}_N \cong \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \mathcal{F} dx = \left\{ F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathcal{F} \mid \int_{\mathbb{R}^d} \|F(x)\|_{\mathcal{F}}^2 dx < \infty \right\}.$$

$H_1(x)$, $x \in \mathbb{R}^d$, を

$$H_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ a^*(\hat{\varphi} e^{-ikx}/\sqrt{\omega}) + a(\tilde{\varphi} e^{ikx}/\sqrt{\omega}) \right\}$$

で定める³⁸. ここで $\tilde{\varphi}(k) = \hat{\varphi}(-k)$, $\overline{\hat{\varphi}(k)} = \hat{\varphi}(-k)$ なので $H_1(x)$ は対称作用素で \mathcal{F} の有限粒子部分空間上で本質的に自己共役になる. $H_1(x)$ の自己共役拡大を $\overline{H_1(x)}$ とかく.

³⁸ 形式的に $H_1(x) = \int \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} (\hat{\varphi}(k) e^{-ikx} a^*(k) + \hat{\varphi}(-k) e^{ikx} a(k)) dk$ と書かれる.

定義 8.2 (相互作用項) 相互作用項 H_I を

$$H_I = \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \overline{H_I(x)} dx$$

で定める. これは $(H_I\Psi)(x) = \overline{H_I(x)}\Psi(x)$ のように作用し, 定義域は

$$D(H_I) = \left\{ \Psi \in \mathcal{H}_N \mid \Psi(x) \in D(\overline{H_I(x)}), x \in \mathbb{R}^d \right\}.$$

自由 Hamiltonian は $H_f = d\Gamma(\omega)$ で与えられる.

定義 8.3 (Fock 空間上の Nelson Hamiltonian)

$$H = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + H_I$$

を Nelson Hamiltonian という.

自己共役性に関しては次のことが容易に示せる.

命題 8.4 (自己共役性)

(1) $H_0 = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f$ は $D(H_0) = D(H_p \otimes \mathbb{1}) \cap D(\mathbb{1} \otimes H_f)$ 上非負自己共役である.

(2) H は $D(H_0)$ 上自己共役である. さらに H_0 の任意の芯³⁹で本質的自己共役である.

証明: (1) は一般論. (2) を示す.

$$\|\overline{H_I(x)}\Psi\|_{\mathcal{F}} \leq (2\|\hat{\varphi}/\omega\| + \|\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}\|)\|(H_f + \mathbb{1})^{1/2}\Psi\|_{\mathcal{F}}, \quad \Psi \in D(H_f),$$

が $x \in \mathbb{R}^d$ ごとに成り立つ. よって $\Phi \in D(\mathbb{1} \otimes H_f)$ に対して,

$$\|H_I\Phi\|_{\mathcal{H}_N} \leq (2\|\hat{\varphi}/\omega\| + \|\hat{\varphi}/\sqrt{\omega}\|)\|\mathbb{1} \otimes (H_f + \mathbb{1})^{1/2}\Phi\|_{\mathcal{H}_N}.$$

さらに

$$\|(\mathbb{1} \otimes H_f + \mathbb{1})^{1/2}\Psi\| \leq \varepsilon\|H_0\Psi\| + \left(1 + \frac{1}{4\varepsilon}\right)\|\Psi\|$$

なので, Kato-Rellich の定理 [RS75, p.162] から H が $D(H_0)$ 上自己共役で, H_0 の任意の芯上本質的自己共役になることがわかる. \square

³⁹core

8.3 汎関数空間上の Nelson 模型

ガウス超過程 (Q, Σ, μ) , $(\phi(f), f \in L^2(\mathbb{R}^d))$, を固定する. Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示をもちいて Nelson Hamiltonian を解析するときは確率空間上に Hamiltonian を定義すると便利である. すぐに

$$U_W H_I(x) U_W^{-1} = \phi(\tilde{\varphi}(\cdot - x))$$

がわかる. ここで

$$\tilde{\varphi} = (\hat{\varphi}/\sqrt{\omega})^\vee.$$

定義 8.5 (相互作用項) $L^2(\mathcal{Q}_E)$ 上の相互作用項を次で定義する.

$$\tilde{H}_I = \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} \phi(\tilde{\varphi}(\cdot - x)) dx.$$

つまり $\tilde{H}_I : F(x, \phi) \mapsto \phi(\tilde{\varphi}(\cdot - x))F(x, \phi)$ となるかけ算作用素.

定義 8.6 (汎関数空間上の Nelson Hamiltonian) ヒルベルト空間 $L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(Q)$ 上の Nelson Hamiltonian を

$$H = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + \tilde{H}_I$$

で定義する.

H_p の作用する Hilbert 空間 $L^2(\mathbb{R}^d)$ も基底状態変換で変換する. 基底状態変換は

$$U_{\varphi_p} : L^2(\mathbb{R}^d, dN_0) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d, dx), \quad f \mapsto \varphi_p f,$$

だった. $P_0 = N_0 \times \mu$ とおけば, これは $\mathbb{R}^d \otimes \mathcal{Q}$ 上の確率測度になる. $L^2(\mathbb{R}^d \otimes \mathcal{Q}, dP_0)$ と \mathcal{H}_N は

$$U_{\varphi_p} \otimes U_W : \mathcal{H}_N \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d \times \mathcal{Q}, dP_0)$$

によってユニタリー同値になる. 簡単のために $L^2(\mathbb{R}^d \times \mathcal{Q}, dP_0)$ を $L^2(P_0)$, $L^2(\mathbb{R}^d, dN_0)$ を $L^2(N_0)$ で表す.

定義 8.7 (Nelson Hamiltonian) $L^2(P_0)$ 上の Nelson Hamiltonian を

$$L = L_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + \tilde{H}_I$$

で定義する.

もちろん, H と L はユニタリー同値である. 以降 \tilde{H}_I を簡単に H_I と書くことにする.

8.4 Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示

半群 e^{-tH} の Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示を求めよう. ここでは Brown 運動による構成と, $P(\phi)_1$ 過程による構成を紹介する.

定理 8.8 (Brown 運動による構成) $F, G \in \mathcal{H}_N$ とする. このとき,

$$(F, e^{-tH}G)_{\mathcal{H}_N} = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\int_0^t V(B_s) ds} \left(J_0 F(B_0), e^{-\phi_E \left(\int_0^t j_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s) ds \right)} J_t G(B_t) \right) \right].$$

ここで $F, G \in \mathcal{H}_N$ は $L^2(\mathcal{Q}_E)$ 値 L^2 関数とみなされている.

証明: $V \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ と仮定する. トロツタ積公式と $e^{-|t-s|H_t} = J_t^* J_s$ から

$$\begin{aligned} (F, e^{-tH}G) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (F, (e^{-(t/n)H_P} e^{-(t/n)H_I} e^{-(t/n)H_t})^n G) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\sum_{j=0}^{n-1} (t/n) V(B_{tj/n})} \left(J_0 F(B_0), e^{-\sum_{j=0}^{n-1} (t/n) \phi_E(j_{tj/n} \tilde{\varphi}(\cdot - B_{tj/n}))} J_t G(B_t) \right) \right]. \end{aligned}$$

$s \mapsto j_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s)$ は $\mathbb{R} \rightarrow L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{d+1})$ の写像として殆ど至るところ強連続であることを注意しておく. その結果, $s \mapsto \phi_E(j_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s))$ も写像 $\mathbb{R} \rightarrow L^2(\mathcal{Q}_E)$ として強連続になる. よって定理が従う. V が Kato 分解できるときは簡単な極限操作によって証明できる. \square

定理 8.9 ($P(\phi)_1$ 過程による構成) $F, G \in L^2(P_0)$ とする. このとき,

$$(F, e^{-tL}G)_{L^2(P_0)} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[\left(J_0 F(X_0), e^{-\phi_E \left(\int_0^t j_s \tilde{\varphi}(\cdot - X_s) ds \right)} J_t G(X_t) \right) \right].$$

証明: 証明は定理 8.8 と同じである. \square

定理 8.8, 8.9 の成分表示を Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示といい, 目的にあわせて使い分けられる. 例えば Nelson Hamiltonian の基底状態の存在・非存在の証明には $P(\phi)_1$ 過程を用いた表示を使い, 基底状態の空間的指数減衰性の評価には Brown 運動を用いた表示が有用である.

$e^{\phi_E(h)}$ はもちろん有界作用素ではない. しかし次の不等式はよく知られている.

補題 8.10 $\Phi \in L^1(\mathcal{Q})$ とする. このとき $J_t^* \Phi J_s$, $t \neq s$, は有界作用素でその作用素ノルムは $\|J_t^* \Phi J_s\| \leq \|\Phi\|_{L^1(\mathcal{Q})}$ となる. 特に $J_0^* e^{\phi_E(h)} J_t$ は有界作用素で $\|J_0^* e^{\phi_E(h)} J_t\| \leq e^{\|h\|^2/4}$ となる.

8.5 ユークリッド場の一般化と Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示

この章ではユークリッド場 $\phi_E(f)$ を一般化する. d は空間次元を表し, $\Phi_d(f)$ は $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ を指数にもつ $(\mathcal{Q}_d, \Sigma_d, \mu_d)$ 上のガウス超過程で平均ゼロで共分散が

$$\mathbb{E}_{\mu_d}[\Phi_d(f)\Phi_d(g)] = \frac{1}{2}(\hat{f}, \hat{g})_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

となるものとする. $\Phi_d(f_1) \cdots \Phi_d(f_n)$ で張られるベクトル空間は $L^2(\mathcal{Q}_d)$ で稠密である. Wick 積は $\phi(f)$ のそれと同様に定義する. ヒルベルト空間 A と B に対して,

$$\mathcal{C}(A, B) = \{T : A \rightarrow B \mid \|T\|_{A \rightarrow B} \leq 1\}$$

は A から B への縮小写像全体の集合とし, 特に

$$\mathcal{C}_0(A, B) = \{T \in \mathcal{C}(A, B) \mid T \text{ は等長作用素}\}$$

とおく. 第 2 量子化の記号 Γ はファンクター

$$\Gamma : \mathcal{C}(L^2(\mathbb{R}^d), L^2(\mathbb{R}^{d'})) \rightarrow \mathcal{C}(L^2(\mathcal{Q}_d), L^2(\mathcal{Q}_{d'})),$$

$$\Gamma : \mathcal{C}_0(L^2(\mathbb{R}^d), L^2(\mathbb{R}^{d'})) \rightarrow \mathcal{C}_0(L^2(\mathcal{Q}_d), L^2(\mathcal{Q}_{d'})),$$

を定める. つまり

$$\Gamma(T)\mathbb{1}_{L^2(\mathcal{Q}_d)} = \mathbb{1}_{L^2(\mathcal{Q}_{d'})}, \quad (8.2)$$

$$\Gamma(T) : \Phi_d(f_1) \cdots \Phi_d(f_n) :=: \Phi_{d'}(Tf_1) \cdots \Phi_{d'}(Tf_n) :. \quad (8.3)$$

それは半群性 $\Gamma(T)\Gamma(S) = \Gamma(TS)$ を満たすことはすぐに分かる. 記号 $\Gamma(T)$ は本来 $\Gamma_{dd'}(T)$ と表すべきだが簡単に $\Gamma(T)$ と表すことにする. K を $L^2(\mathbb{R}^d)$ の自己共役作用素とすれば, $\Gamma(e^{-itK})$, $t \in \mathbb{R}$, は $L^2(\mathcal{Q}_d)$ の 1 係数ユニタリ群になる. そこで, その生成子を $d\Gamma(K)$ で表す. つまり $\Gamma(e^{-itK}) = e^{-itd\Gamma(K)}$. $h \geq 0$ を \mathbb{R}^d 上のボレル可測関数とする. $j_{d,h}(t) \in \mathcal{C}_0(L^2(\mathbb{R}^d), L^2(\mathbb{R}^{d+1}))$, $t \in \mathbb{R}$, を

$$\widehat{j_{d,h}(t)f} = \frac{e^{-itk_{d+1}}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{h(k)}{h(k)^2 + |k_{d+1}|^2} \right)^{1/2} \hat{f}(k), \quad k \in \mathbb{R}^d, \quad k_{d+1} \in \mathbb{R} \quad (8.4)$$

で定める. そうすると

$$j_{d,h}(s)^* j_{d,h}(t) = e^{-|t-s|h(-i\nabla)} \quad (8.5)$$

となる. 同様に与えられた非負ボレル可測関数 h_1 (\mathbb{R}^d 上), h_2 (\mathbb{R}^{d+1} 上), h_3 (\mathbb{R}^{d+2} 上), ..., に対して

$$L^2(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{j_{d,h_1}(t)} L^2(\mathbb{R}^{d+1}) \xrightarrow{j_{d+1,h_2}(t)} L^2(\mathbb{R}^{d+2}) \xrightarrow{j_{d+2,h_3}(t)} \dots \quad (8.6)$$

となる. (8.6) の等長作用素は (8.5) を満たす. $J_{d,h}(t) \in \mathcal{C}_0(L^2(\mathcal{Q}_d), L^2(\mathcal{Q}_{d+1}))$ を $j_{d,h}(t)$ の第 2 量子化で定義する. つまり,

$$J_{d,h}(t) = \Gamma(j_{d,h}(t)). \quad (8.7)$$

その結果 $J_{d,h}(s)^* J_{d,h}(t) = \Gamma(e^{-|t-s|h(-i\nabla)})$ となる. 列 (8.6) は

$$L^2(\mathcal{Q}_d) \xrightarrow{j_{d,h_1}(t)} L^2(\mathcal{Q}_{d+1}) \xrightarrow{j_{d+1,h_2}(t)} L^2(\mathcal{Q}_{d+2}) \xrightarrow{j_{d+2,h_3}(t)} \dots \quad (8.8)$$

を導く. h と f を \mathbb{R}^d 上のボレル可測関数とする. そうすると次の intertwining 性が従う.

$$\Gamma(e^{-t(h(-i\nabla) \otimes \mathbb{1})}) J_{d,f}(s) = J_{d,f}(s) \Gamma(e^{-th(-i\nabla)}). \quad (8.9)$$

ここで, $h(-i\nabla) \otimes \mathbb{1}$ は $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ 上の作用素で, $L^2(\mathbb{R}^{d+1}) \cong L^2(\mathbb{R}^d) \otimes L^2(\mathbb{R})$ と同一視している. これは次の命題を示したことになる.

命題 8.11 h_j , $j = 1, \dots, N$, を \mathbb{R}^d 上の非負ボレル可測関数, $t_j \geq 0$, $j = 1, \dots, N$, とする. $H_j = d\Gamma(h_j(-i\nabla))$ としよう. このとき

$$\left(\Psi, \prod_{i=1}^N e^{-t_i H_i} \Phi \right)_{L^2(\mathcal{Q}_d)} = \left(\prod_{i=N}^1 J_{i+d-1, h_i^{\text{ex}}}(0) \Psi, \prod_{i=N}^1 J_{i+d-1, h_i^{\text{ex}}}(t_i) \Phi \right)_{L^2(\mathcal{Q}_{d+N})}. \quad (8.10)$$

ここで $\prod_{i=1}^N T_i = T_1 \cdots T_N$, $\prod_{i=N}^1 T_i = T_N \cdots T_1$. そして h_i^{ex} は h の $L^2(\mathbb{R}^{d-1+i})$ 上の非負関数への拡張で $h_i^{\text{ex}}(\mathbf{k}, k_{d+1}, \dots, k_{d-1+i}) = h_i(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, と定義する.

さて

$$\xi_t = j_{d+1, I}(t) \quad (8.11)$$

とする. ここで I は $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ 上の恒等作用素. 今までの記号と対応させれば

$$\begin{aligned} \mathcal{Q} &= \mathcal{Q}_d, & \mu &= \mu_d, & j_t &= j_{d, \omega}(t), \\ \mathcal{Q}_E &= \mathcal{Q}_{d+1}, & \mu_E &= \mu_{d+1}, & \xi_t &= j_{d+1, I}(t). \end{aligned} \quad (8.12)$$

$\Xi_t \in \mathcal{C}_0(L^2(\mathcal{Q}_E), L^2(\mathcal{Q}_{d+2}))$ を

$$\Xi_t = \Gamma(\xi_t) = J_{d+1, I}(t) \quad (8.13)$$

と定める. N_E を $L^2(\mathcal{Q}_E)$ の個数作用素とする. 次の補題が成り立つ.

補題 8.12 任意の $s, t \in \mathbb{R}$ に対して $\Xi_s^* \Xi_t = e^{-|t-s|N_E}$. さらに

$$e^{-\beta N_E} J_s = J_s e^{-\beta N}, \quad \beta \geq 0. \quad (8.14)$$

また, $\Psi, \Phi \in L^2(\mathcal{Q})$ とする. このとき次が成り立つ.

$$(\Psi, e^{-\beta N} e^{-tH_f} \Phi)_{L^2(\mathcal{Q})} = (\Xi_0 J_0 \Psi, \Xi_\beta J_t \Phi)_{L^2(\mathcal{Q}_{d+2})}. \quad (8.15)$$

証明: 命題 8.11 から従う. □

8.6 赤外発散, 紫外発散, 基底状態の存在・非存在

量子論では電子は点と考えられるので, 電荷の分布を表す $\varphi(x)$ は $\varphi(x) = \delta(x)$ とみなされる. これは

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} dk = \infty \quad (\hat{\varphi}(k) = (2\pi)^{-d/2})$$

を意味する. これを紫外発散という. 数学的に厳密に H を定義するためには $\hat{\varphi}$ に

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} dk < \infty$$

なる条件を取りあえず仮定する必要がある. その結果 H_I が \mathcal{F} 上の作用素として意味をもつ. もう一つの発散が赤外発散である. $\hat{\varphi}(k) = (2\pi)^{-d/2} (|k| < \varepsilon)$ としよう. この場合

$$\int_{|k| < \varepsilon} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} dk = \infty \quad (d \leq 3)$$

となる. これを赤外発散という. 物理的な理解では H の基底状態 Ψ_g のボゾン数の期待値は有限, $(\Psi_g, N \Psi_g) < \infty$, で

$$(\Psi_g, N \Psi_g) \approx \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} dk \quad (8.16)$$

のように予想され,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} dk = \infty$$

のときは (8.16) からわかるように, 基底状態に運動量の小さなボゾン (軟ボゾン) が沢山まわりつき, 結局 H の基底状態が存在しないと期待される. 基底状態の存在・非存在の議論で最も重要な記号

$$I_{\text{IR}} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} dk \quad (8.17)$$

を導入する.

定義 8.13 (赤外正則条件と赤外特異条件) $I_{\text{IR}} < \infty$ を赤外正則条件といい, $I_{\text{IR}} = \infty$ を赤外特異条件という.

(1) $\omega(k) = |k|$, $\hat{\varphi}(k) = \mathbb{1}_{\{\kappa < |k| < \Lambda\}}$, $d = 3$ とする. κ と Λ は夫々赤外切断パラメーター, 紫外切断パラメーターといわれる. $\kappa = 0$ のとき赤外特異条件をみたし, $\kappa > 0$ のとき赤外正則条件をみたす.

(2) $\varphi > 0$ かつ $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ とする. $d \leq 3$ のとき $I_{\text{IR}} = \infty$ になる.

(3) $\omega(k) = \sqrt{|k|^2 + \nu^2}$, $\hat{\varphi}(k) = g\mathbb{1}_{\{|k| < \Lambda\}}$ のときは赤外正則条件をみたす.

(1),(2) は massless 模型, (3) は massive 模型とよばれる.

8.7 埋蔵固有値の摂動問題

Nelson 模型を例に埋蔵固有値について説明する. g を結合定数として,

$$H_g = H_0 + gH_1$$

とおこう. $V(x) = -1/|x|$ としよう. このとき,

$$\sigma(H_p) = \{E_j\}_{j=0}^{\infty} \cup [0, \infty), \quad E_0 \leq E_1 \leq \dots < 0,$$

となる. $\sigma(H_f) = \{0\} \cup [\nu, \infty)$, $\sigma_p(H_f) = \{0\}$ であるから, 非結合 Hamiltonian $H_0 = H_p + H_f$ のスペクトルは

$$\sigma(H_0) = [E_0 + \nu, \infty) \cup \{E_j\}_{j=0}^{\infty}$$

となる. $0 < \nu$ が十分小さければ図 4 のように点スペクトル $\{E_j\}_{j=0}^{\infty}$ の一部は連続スペクトルに埋め込まれ, 埋蔵固有値になる. $\nu > 0$ とすれば E_0 は多重度 1 の離散固有値である. E_0 の摂動について考えよう.

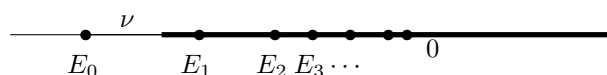


図 4: H_g ($\nu > 0$)

定義 8.14 (解析族) R を \mathbb{C} の開集合とする. $\{H_g, g \in R\}$ は閉作用素の族 (自己共役作用素とは限らない) で $\rho(H_g) \neq \emptyset$ とする. 次の (1), (2) をみたすとき $\{H_g, g \in R\}$ を A 型の解析族という. (1) ある稠密な \mathcal{D} が存在して $D(H_g) = \mathcal{D}, g \in R$, をみたす. (2) $H_g u, u \in \mathcal{D}, g$ について強解析的である.

命題 8.15 H_g を $g = 0$ の近傍で A 型の解析族とする. E を多重度 m の H_0 の離散固有値とする. このとき H_g の離散固有値 $E^{(1)}(g), \dots, E^{(r)}(g)$ で次をみたすものが存在する. (1) $E = E^{(k)}(0), k = 1, \dots, r$. (2) $E^{(1)}(g), \dots, E^{(r)}(g)$ の多重度の和は m . (3) 各 $E^{(r)}(g)$ に対してある $p \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ が存在して $E^{(r)}(g)$ は $g^{1/p}$ の解析関数. (4) H_g が $g \in \mathbb{R}$ で自己共役作用素ならば $E^{(r)}(g)$ は g の解析関数.

$\nu > 0$ のとき, 命題 8.15 より $|g| \ll 1$ で $E_0(g)$ は離散固有値であり g について解析的であることがわかる. 特に $E_0(g)$ は H の基底状態である. しかし $\nu = 0$ のときは様相が一変する. このときは図 5 のように E_0 が埋蔵固有値になる. そのため $|g| \ll 1$ でも $E_0(g)$ が固有値として存在するのかわからずにはわからない. また g に関する微分可能性も一般にはよくわからない. これが埋蔵固有値の摂動問題である.

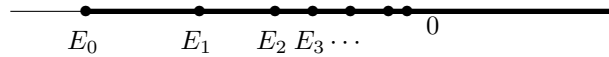


図 5: H_g ($\nu = 0$)

8.8 ペアポテンシャル

L の固有ベクトルを解析するために, Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示を使う. L が至るところ正な基底状態 Ψ_g を一意的にもつと仮定する. このとき

$$\|e^{-T(L-E)} F\|^{-1} e^{-T(L-E)} F \rightarrow \Psi_g(T \rightarrow \infty).$$

ここで $F \in L^2(\mathbb{P}_0)$ は $F > 0$ なるベクトル. よって Ψ_g の性質を調べる処方箋の一つが $\|e^{-T(L-E)} F\|^{-1} e^{-T(L-E)} F$ の解析である.

系 8.16 ($(P(\phi)_1$ 過程による真空期待値) $f, g \in L^2(\mathbb{N}_0)$ とする. このとき $T > 0$ に対して

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-TL} g \otimes \mathbb{1})_{L^2(\mathbb{P}_0)} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[\overline{f(X_0)} g(X_T) e^{\frac{1}{2} \int_0^T ds \int_0^T dt W(X_s - X_t, s-t)} \right].$$

ここで

$$W(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)} e^{-ik \cdot x} e^{-\omega(k)|t|} dk. \quad (8.18)$$

証明: $I_T = \int_0^T \int_s \tilde{\varphi}(\cdot - X_s) ds$ とおく. このとき

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-TL} g \otimes \mathbb{1})_{L^2(P_0)} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[\overline{f(X_0)g(X_t)} \mathbb{E}_{\mu_E} [e^{-I_T}] \right].$$

I_T の分散が

$$\mathbb{E}_{\mu_E} [I_T^2] = \int_0^T ds \int_0^T dt W(X_t - X_s, t - s)$$

なので

$$\mathbb{E}_{\mu_E} [e^{-I_T}] = \exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T ds \int_0^T dt W(X_s - X_t, s - t) \right).$$

よって, Fubini の定理から系が従う. □

定義 8.17 (ペアポテンシャル)

$$W(x, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)} e^{-ik \cdot x} e^{-\omega(k)|t|} dk$$

は Nelson 模型に付随するペアポテンシャルといわれる.

系 8.18 (Brown 運動による真空期待値) $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき $T > 0$ に対して

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-TH} g \otimes \mathbb{1})_{\mathcal{H}_N} = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\int_0^T V(B_s) ds} \overline{f(B_0)g(B_T)} e^{\frac{1}{2} \int_0^T ds \int_0^T dt W(B_s - B_t, s - t)} \right].$$

証明: 証明は系 8.16 と全く同じである. □

これから頻繁に使うのでペアポテンシャル W の評価と $I_{\mathbb{R}}$ の関係をチェックしておく.

$$\begin{aligned} \left| \int_0^T dt \int_0^T ds W(X_t - X_s, t - s) \right| &\leq T \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^2} dk - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} (1 - e^{-T\omega(k)}) dk \\ \left| \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds W(X_t - X_s, t - s) \right| &\leq 2T \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^2} dk - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} (1 - e^{-2T\omega(k)}) dk \\ \left| \int_0^T dt \int_{-T}^0 ds W(X_t - X_s, t - s) \right| &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} (1 - e^{-T\omega(k)})^2 dk. \end{aligned}$$

特に

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^T dt \int_0^T ds W(X_t - X_s, t - s) \right| &\leq T \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^2} dk \\
\left| \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds W(X_t - X_s, t - s) \right| &\leq 2T \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^2} dk \\
\left| \int_0^T dt \int_{-T}^0 ds W(X_t - X_s, t - s) \right| &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} dk \\
\left| \int_0^T dt \int_{-T}^0 ds W(X_t - X_s, t - s) \right| &\leq \frac{T}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^2} dk \\
\left| \int_0^T dt \int_{-T}^0 ds W(X_t - X_s, t - s) \right| &\leq \frac{T^2}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} dk
\end{aligned}$$

がわかり、非対角成分の積分は $I_{\mathbb{R}} < \infty$ のとき $T \rightarrow \infty$ で収束する。

8.9 参考文献など

無限次元 OU 過程 $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ を用いた Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示も存在する。無限次元 OU 過程 $(\xi_t)_{t \in \mathbb{R}}$ の詳しい構成法などは [LHB11, Section 5.6] にある。

9 赤外正則条件と基底状態の存在

9.1 存在

この章では H の基底状態の存在を $P(\phi)_1$ 過程による Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示を応用して示す。基底状態が存在すればその一意性はすぐに分かる。

系 9.1 (一意性) H が基底状態をもつと仮定する。このとき基底状態は一意的である。

証明: 恒等的にゼロではない $F \geq 0, G \geq 0$ に対して Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示と J_t の正値保存性から $(F, e^{-tL}G) > 0$ がわかる。故に e^{-tL} は正値改良型作用素である。よって Perron-Frobenius 定理から題意が従う。 \square

Σ_p を H_p の本質的スペクトルの下限とする。

定理 9.2 (基底状態の存在) 赤外正則条件 $I_{\text{IR}} < \infty$ を仮定し,

$$\Sigma_p - E_p > \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2} \frac{|k|^2}{2\omega(k) + |k|^2} dk \quad (9.1)$$

とする. このとき H の基底状態が存在する.

この定理の証明の最大のポイントはペアポテンシャルのパスに一様な評価

$$\int_{-\infty}^0 ds \int_0^{\infty} |W(X_s - X_t, s - t)| dt \leq \frac{1}{2} I_{\text{IR}} < \infty \quad (9.2)$$

である.

補題 9.3 $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は連続で $f(x) > 0$ としよう. このとき

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(f \otimes \mathbb{1}, e^{-(T+t)H} f \otimes \mathbb{1})}{(f \otimes \mathbb{1}, e^{-TH} f \otimes \mathbb{1})} = e^{-tE}.$$

証明: Q が \mathbb{R} 上の測度とする. $\inf \text{supp}(Q) = E(Q)$ とおくと,

$$E(Q) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-Tx} Q(dx) \right), \quad (9.3)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{-(T+t)x} Q(dx)}{\int_{\mathbb{R}} e^{-Tx} Q(dx)} = e^{-tE(Q)} \quad (9.4)$$

が成り立つ. H の $f \otimes \mathbb{1}$ に関するスペクトル測度を $\mu_{f \otimes \mathbb{1}}$ とする. (9.3) と (9.4) を $\mu_{f \otimes \mathbb{1}}$ に応用すると $E(\mu_{f \otimes \mathbb{1}}) = E$ を示せばいいことになる.

$$\mathcal{G} = \left\{ F \in \mathcal{H}_N \mid \text{supp} F \subset \bigcup_{N, M > 0} B_N(\mathbb{R}^d) \times B_M(\mathcal{Q}) \right\}$$

とする. ここで $B_N(\mathbb{R}^d)$ と $B_M(\mathcal{Q})$ は \mathbb{R}^d と \mathcal{Q} の原点を中心にした半径 N と M のボールを表す. \mathcal{G} は \mathcal{H}_N で稠密. $g \in \mathcal{G}$ とする. e^{-tH} は正値保存作用素なので

$$(g, e^{-TH} g) \leq (|g|, e^{-TH} |g|) \leq C^2 (f \otimes \mathbb{1}, e^{-TH} f \otimes \mathbb{1}).$$

ここで

$$C = \frac{\text{ess sup}_{(x, \xi) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{Q}} |g(x, \xi)|}{\text{ess inf}_{(x, \xi) \in \text{supp}|g|} f(x)}.$$

これから $E(\mu_{f \otimes \mathbb{1}}) \leq E(\mu_g)$ が全ての $g \in \mathcal{G}$ でわかる. \mathcal{G} は $D(H)$ の稠密な部分空間なので $E(\mu_{f \otimes \mathbb{1}}) \geq E = \inf\{E(\mu_g) | g \in \mathcal{G}\} \geq E(\mu_{f \otimes \mathbb{1}})$. よって $E = E(\mu_{f \otimes \mathbb{1}})$. \square

φ_p を H_p の正規化された正の基底状態として

$$\Psi_g^T = \frac{e^{-TH}(\varphi_p \otimes \mathbb{1})}{\|e^{-TH}(\varphi_p \otimes \mathbb{1})\|}$$

とする. $\|\Psi_g^T\| = 1$ なので, 部分列 $\Psi_{g'}^{T'}$ で, あるベクトル Ψ_g^∞ に弱収束するものが存在する. T' を改めて T と書くことにする. 心の中では Ψ_g^T が基底状態の近似列だと思っている.

$$\gamma(T) = (\varphi_p \otimes \mathbb{1}, \Psi_g^T)^2 = \frac{(\varphi_p \otimes \mathbb{1}, e^{-TH} \varphi_p \otimes \mathbb{1})^2}{(\varphi_p \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH} \varphi_p \otimes \mathbb{1})}$$

とおく. 次の命題は基底状態の存在・非存在を示すときに有用である.

命題 9.4 (基底状態の存在・非存在の必要十分条件) $\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma(T) = a$ とする. $a > 0$ ならば H の基底状態は存在し, $a = 0$ なら基底状態は存在しない.

証明: $\inf \sigma(H) = 0$ と仮定する. はじめに $a = 0$ とする. 基底状態 Ψ_g が存在すると仮定して矛盾を導く. 基底状態 Ψ_g が存在するので強収束の意味で $\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-TH} = \mathbb{1}_{\{0\}}(H)$ となる. Ψ_g は正なので, $a = (\varphi_p \otimes \mathbb{1}, \Psi_g) > 0$ となるから, $a = 0$ に矛盾する. よって基底状態は存在しない.

次に $a > 0$ と仮定する. このとき十分大きな全ての T に対して $\epsilon \leq \sqrt{\gamma(T)}$ が成り立つ. H のスペクトル測度 dE を用いれば $\sqrt{\gamma(T)}$ は以下のように評価できる.

$$\sqrt{\gamma(T)} = \frac{\int_0^\infty e^{-T\lambda} dE}{(\int_0^\infty e^{-2T\lambda} dE)^{1/2}} \leq \frac{\int_0^\delta e^{-T\lambda} dE + \int_\delta^\infty e^{-T\lambda} dE}{(\int_0^\delta e^{-2T\lambda} dE)^{1/2}}.$$

右辺の分子の第 1 項に Schwarz の不等式, 第 2 項は被積分関数の最大値をとれば

$$\sqrt{\gamma(T)} \leq \frac{(\int_0^\delta e^{-2T\lambda} dE)^{1/2} (E([0, \delta])^{1/2} + e^{-T\delta})}{(\int_0^\delta e^{-2T\lambda} dE)^{1/2}} = (E([0, \delta])^{1/2} + \frac{1}{(\int_0^\delta e^{-2T(\lambda-\delta)} dE)^{1/2}}).$$

両辺の $T \rightarrow \infty$ をとれば, 右辺の第 2 項が消えるから, $\sqrt{\epsilon} \leq (E([0, \delta])^{1/2})$. さらに $\delta \downarrow 0$ とすれば

$$\sqrt{\epsilon} \leq E(\{0\})^{1/2}.$$

よって $\{0\}$ は重みを持つから基底状態が存在する. \square

系 9.5 $\Psi_g^\infty \neq 0$ は H が基底状態をもつための必要十分条件である.

証明: Ψ_g^T は非負なので, 弱収束の極限 Ψ_g^∞ も非負. その結果, もし $\Psi_g^\infty \neq 0$ ならば $\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma(T) = (\mathbb{1}, \Psi_g^\infty)^2 > 0$. よって 命題 9.4 から系が従う. \square

定理 9.2 の証明: $\varphi_p \otimes \mathbb{1}$ を簡単に φ_p とかこう. 系 9.5 から Ψ_g^T の弱極限が非ゼロであることをいえばいい.

$$S_{[a,b]} = \frac{1}{2} \int_a^b ds \int_a^b W(X_s - X_t, s - t) dt \quad (9.5)$$

とする. $f(T, t) = (\Psi_g^T, (e^{-tH_p} \otimes P_0) \Psi_g^T)$ とおく. ここで P_0 は $\mathbb{1} \in L^2(\mathcal{Q})$ への射影である. 次が成立することを示す:

$$\liminf_{T \rightarrow \infty} f(T, t) \geq \exp \left(-t \left(E + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2} dk \right) - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2 (1 + e^{-t\omega(k)})}{2\omega(k)^3} dk \right). \quad (9.6)$$

これを示すために次のように書き変える:

$$f(T, t) = \frac{(\varphi_p, e^{-TH} (e^{-tH_p} \otimes P_0) e^{-TH} \varphi_p)}{(\varphi_p, e^{-(2T+t)H} \varphi_p)} \frac{(\varphi_p, e^{-(2T+t)H} \varphi_p)}{(\varphi_p, e^{-2TH} \varphi_p)}.$$

第 2 項の比は e^{-Et} に収束する (補題 9.3). 第 1 項の比を $g(T, t)$ とおく. これを $P(\phi)_1$ 過程で汎関数積分表示する. 分母は $\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [e^{S[-T, T+t]}] e^{-(2T+t)E_p}$. ここで $(X_t)_{t \geq 0}$ のシフト不変性をつかった. 分子は $h_T(x) = (\mathbb{1}, e^{-TH} \varphi_p)_{L^2(\mathcal{Q})}(x)$ とすれば

$$(\varphi_p, e^{-TH} (e^{-tH_p} \otimes P_0) e^{-TH} \varphi_p) = (h_T, e^{-tH_p} h_T)_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

に注意する. また

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} h_T(x) f(x) \varphi_p(x) dx &= (f \varphi_p \otimes \mathbb{1}, e^{-TH} \varphi_p \otimes \mathbb{1}) \\ &= \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[f(X_0) \mathbb{E}_{\mu_E} \left[e^{-\int_0^t \int_s \tilde{\varphi}(\cdot - X_s) ds} \right] \right] e^{-TE_p} = \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x [e^{S[0, T]}] e^{-TE_p} \varphi_p(x)^2 dx. \end{aligned}$$

これから $h_T(x) = \varphi_p(x) F(x) e^{-TE_p}$. ここで $F(x) = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x [e^{S[0, T]}]$. よって

$$\begin{aligned} (h_T, e^{-tH_p} h_T)_{L^2(\mathbb{R}^d)} &= (F, e^{-tL_p} F)_{L^2(\mathcal{N}_0)} e^{-(2T+t)E_p} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [F(X_0) F(X_t)] e^{-(2T+t)E_p} \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x [\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x [e^{S[0, T]}] \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^{X_t} [e^{S[0, T]}]] e^{-(2T+t)E_p} d\mathcal{N}_0. \end{aligned}$$

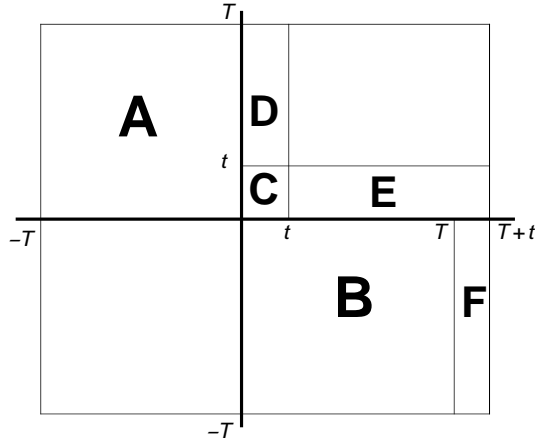


図 6: S_Δ の積分領域

鏡映対称性により

$$(h_T, e^{-tH_p} h_T) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x \left[\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x [e^{S[-T,0]}] \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^{X_t} [e^{S[0,T]}] \right] e^{-(2T+t)E_p} d\mathbf{N}_0.$$

また Markov 性により

$$(h_T, e^{-tH_p} h_T) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x \left[\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x [e^{S[-T,0]}] \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x [e^{S[t,T+t]} | \sigma(X_t)] \right] e^{-(2T+t)E_p} d\mathbf{N}_0.$$

さらに X_{-t} , $t \geq 0$, と X_s , $s \geq 0$, の独立性から

$$\begin{aligned} (h_T, e^{-tH_p} h_T) &= \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x [e^{S[-T,0]+S[t,T+t]}] e^{-(2T+t)E_p} d\mathbf{N}_0 \\ &= \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [e^{S[-T,0]+S[t,T+t]}] e^{-(2T+t)E_p}. \end{aligned}$$

最後に

$$g(T, t) = \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [e^{S[-T,0]+S[t,T+t]}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [e^{S[-T,T+t]}]} = \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [e^{S_\Delta+S[-T,T+t]}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [e^{S[-T,T+t]}]}.$$

ここで

$$S_\Delta = S[-T, 0] + S[t, T+t] - S[-T, T+t].$$

図 9.1 からわかるように S_Δ は $A \sim F$ の領域の積分に分けられる. 夫々

$$A + B = 2 \int_{-T}^0 \int_0^T, \quad C = \int_0^t \int_0^t, \quad D + E = 2 \int_0^t \int_t^{T+t}, \quad F = \int_T^{T+t} \int_{-T}^0$$

となるから, $T \rightarrow \infty$ にすれば F 上の積分は消えて, パスに関する一様評価から

$$\begin{aligned} |S_\Delta| &\leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)} dk \left(2 \int_{-\infty}^0 \int_0^\infty + 2 \int_0^t \int_t^\infty + \int_0^t \int_0^t \right) e^{-\omega(k)|t-s|} ds dt \\ &\leq t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2} dk + \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2(1+2e^{-t\omega(k)})}{2\omega(k)^3} dk \end{aligned}$$

となる. $g(T, t)$ の分母と分子を比べて

$$g(T, t) \geq \exp \left(-t \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2} dk - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2(1+2e^{-t\omega(k)})}{2\omega(k)^3} dk \right).$$

これで (9.6) が示せて, $\liminf_{T \rightarrow \infty} \|e^{-tH_p/2} \otimes P_0 \Psi_g^T\|$ が非ゼロであることがわかった. あともう一息. Ψ_g^T がゼロに収束しないことを示すために $e^{-tH_p/2} \otimes P_0$ をコンパクト作用素におきかえればいい. $\mathbb{1}_{[a,b]}(H_p)$ は H_p のスペクトル射影. Σ_p の定義から H_p は $\Sigma_p - \delta$ 以下では離散固有値しか持たないので $\mathbb{1}_{[E_p, \Sigma_p - \delta]}(H_p) \otimes P_0$ は有限ランク作用素になる. よって

$$(\mathbb{1}_{[E_p, \Sigma_p - \delta]}(H_p) \otimes P_0) \Psi_g^T \rightarrow (\mathbb{1}_{[E_p, \Sigma_p - \delta]}(H_p) \otimes P_0) \Psi_g^\infty$$

が強収束する. 一方 $e^{-tH_p} \mathbb{1}_{(\Sigma_p - \delta, \infty)}(H_p)$ のノルムは有界で $e^{-tH_p} \mathbb{1}_{(\Sigma_p - \delta, \infty)} \leq e^{-t(\Sigma_p - \delta)}$. その結果

$$\begin{aligned} &(\Psi_g^\infty, (e^{-tH_p} \mathbb{1}_{[E_p, \Sigma_p - \delta]}(H_p) \otimes P_0) \Psi_g^\infty) \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ (\Psi_g^T, (e^{-tH_p} \otimes P_0) \Psi_g^T) - (\Psi_g^T, (e^{-tH_p} \mathbb{1}_{(\Sigma_p - \delta, \infty)}(H_p) \otimes P_0) \Psi_g^T) \right\} \end{aligned}$$

そして

$$\begin{aligned} (\Psi_g^\infty, (e^{-tH_p} \mathbb{1}_{[E_p, \Sigma_p - \delta]}(H_p) \otimes P_0) \Psi_g^\infty) &\geq e^{-t(E+C)-C(t)} - e^{-t(\Sigma_p - \delta)} \\ &= e^{-t(E+C)} (e^{-C(t)} - e^{-t(\Sigma_p - \delta - E - C)}). \end{aligned}$$

ここで

$$C = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2} dk, \quad C(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2(1+e^{-t\omega(k)})}{2\omega(k)^3} dk.$$

$I_{\mathbb{R}} < \infty$ なので $C(t) < \infty$ になることに注意する. δ を十分小さくして t を十分大きくすれば,

$$E < \Sigma_p - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)^2} dk \quad (9.7)$$

のとき Ψ_g^∞ が非ゼロであることがわかる. 最後に (9.7) を E_p を含む形に変える. これは不等式

$$E \leq E_p - \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)(\omega(k) + |k|^2/2)} dk \quad (9.8)$$

から得られる. この不等式は補題 9.6 で示す. (9.8) と (9.7) から証明が完了する. \square

補題 9.6 (9.7) が成り立つ.

証明: $P_f = d\Gamma(k)$ は \mathcal{F} の運動量作用素で $\psi_f = e^{ix \otimes P_f} \varphi_p(x) \otimes e^{-i\Pi(f)} \Omega_b$ と定義する. ここで $\Pi(f) = i(a^*(f) - a(\bar{f}))$, そして f はあとで決める. 直接計算して

$$\begin{aligned} E &\leq (\psi_f, H\psi_f) \\ &= E_p + \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} k |f(k)|^2 dk \right)^2 + \int_{\mathbb{R}^d} \left\{ \left(\omega(k) + \frac{1}{2}|k|^2 \right) |f(k)|^2 + \frac{\hat{\varphi}(k)(\overline{f(k)} + f(k))}{\sqrt{2\omega(k)}} \right\} dk. \end{aligned} \quad (9.9)$$

f は $f(-k) = f(k)$ とする. このとき (9.9) の右辺第 2 項は $(\int k |f(k)|^2 dk)^2 = 0$, そして最後の項は

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\omega(k) + \frac{1}{2}|k|^2 \right) (|f(k) + \Phi(k)|^2 - \Phi^2(k)) dk.$$

ここで

$$\Phi(k) = -\frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{2\omega(k)(\omega(k) + |k|^2/2)}}.$$

$f(k) = \Phi(k)$ とおけば (9.7) をえる. \square

系 9.7 (任意の結合定数での基底状態の存在) $\omega(k) = |k|$ とし, $\hat{\varphi}(k) = g \mathbb{1}_{\{\kappa < |k| < \Lambda\}}$ で $g \in \mathbb{R}$ と仮定する. さらに赤外正則条件 $I_{\mathbb{R}} < \infty$ を仮定し $\sigma(H_p)$ は離散固有値だけからなるとする. このとき任意の $0 < \kappa < \Lambda$ と $g \in \mathbb{R}$ に対して, H は一意的な基底状態をもつ.

証明: $\Sigma_p - E_p = \infty$ なので定理 9.2 から系が従う. \square

9.2 参考文献など

基底状態の存在問題は現在では非常に多くのことが知られている。ここで全てを網羅することは不可能なので、一部を紹介するにとどめる。このような量子系で、初めて厳密に基底状態の存在を示したのは Arai-Hirokawa [AH97], Bach-Fröhlich-Sigal [BFS98] である。そのアイデアは Glimm-Jaffe [GJ68] の格子近似に源流があると思われる。その後 Bach-Fröhlich-Sigal [BFS98] は Pauli-Fierz 模型の基底状態の存在を赤外正則条件を仮定せずに示した。この章で紹介した汎関数積分をもちいる方法は Spohn [Spo98] による。[Spo98] では結合定数に一切依らずに基底状態の存在が示されている。この別証明が Gérard [Ger00] で与えられている。いずれの結果も H_p が純粋に固有値のみからなるスペクトルを持つことが必要である。Griesemer-Lieb-Loss [GLL01] はもっと広いクラスのポテンシャルに対して基底状態が存在することを Pauli-Fierz 模型で示した。この技法を Sasaki [Sas05] が Nelson 模型に応用して、必ずしも離散固有値のみからなるとは限らないスペクトルを持った H_p を運動項として含む Nelson Hamiltonian に対しても基底状態の存在を示した。また、 $I_{\text{IR}} = \infty$ となる場合でも非フォック表現といわれるもので Nelson Hamiltonian を定義すればその Hamiltonian が基底状態を持つことを Arai [Ara01] が示した。また、massless 模型であっても、Nelson 模型を時間不変なローレンツ 多様体上に定義すれば、適当な幾何学的な要素から、基底状態の存在が示せる。これは Gérard-Hiroshima-Panati-Suzuki [GHPS11] による。さらに H_p が基底状態を持たないときでも H の基底状態の存在問題を考えることが出来る。この場合、非結合 Hamiltonian $H_0 = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f$ はもちろん基底状態をもたない。ところが、 $H_g = H_0 + gH_I$ で粒子の個数が 2 個以上あれば、十分大きな g で H_g の基底状態の存在が示せる。これは Hiroshima-Sasaki [HS08, HS15] による。最後に Nelson Hamiltonian H は適当にくりこんで紫外切断 $\hat{\varphi} \rightarrow \mathbb{1}$ の極限で定義される自己共役作用素 H_∞ の存在を示すことが出来る。この事実は [Nel64a] による。また第 8 章で汎関数積分表示による証明を与える。Hirokawa-Hiroshima-Spohn [HHS05] はこの H_∞ にも基底状態が存在することを示した。さらに [HHS05] では赤外正則条件も仮定していない。

10 赤外発散と基底状態の非存在

10.1 非存在

この章では次の条件を仮定する。

条件 10.1 $d = 3$, $\varphi \geq 0$ ($\varphi \neq 0$), $\omega(k) = |k|$ とし $V(x) \geq C|x|^{2\beta}$, $\beta > 0$.

この条件下で H_p は至るところ正の基底状態 φ_p をもつ. さらに重要な性質として

$$\varphi_p(x) \leq e^{-C|x|^{\beta+1}} \quad (10.1)$$

が成立する. 赤外正則条件 $I_{\text{IR}} < \infty$ で H の基底状態は存在したが, これから述べるように条件 10.1 の下では赤外特異条件 $I_{\text{IR}} = \infty$ が成立する. しかも H の基底状態は存在しない.

定理 10.2 (基底状態の非存在) 条件 10.1 を仮定する. このとき H の基底状態は存在しない.

$\gamma(T) = (\varphi_p \otimes \mathbb{1}, \Psi_g^T)^2$ を思い出そう. 定理 10.2 を証明するために $\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma(T) = 0$ をいえばいい.

$$\gamma(T) = \frac{(\varphi_p \otimes \mathbb{1}, e^{-TH} \varphi_p \otimes \mathbb{1})^2}{(\varphi_p \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH} \varphi_p \otimes \mathbb{1})},$$

なので $\gamma(T)$ は, $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ 上の $P(\phi)_1$ 過程 $(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ で

$$\gamma(T) = \frac{(\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [e^{S[0,T]}])^2}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [e^{S[-T,T]}]}$$

と表せる. ここで,

$$S[a, b] = \frac{1}{2} \int_a^b dt \int_a^b ds W(t-s, X_t - X_s)$$

だった. いま

$$\mathcal{B}(\mathcal{X}) \ni A \mapsto \mathcal{N}_T(A) = \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [\mathbb{1}_A e^{S[-T,T]}]}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [e^{S[-T,T]}}]}$$

で $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ 上の確率測度 \mathcal{N}_T を定義する.

補題 10.3 次式が成り立つ.

$$\gamma(T) \leq \mathbb{E}_{\mathcal{N}_T} \left[e^{-\int_{-T}^0 ds \int_0^T W(X_t - X_s, t-s) dt} \right].$$

証明: $\gamma(T)$ の分子は Schwarz の不等式と X_t の鏡映対称性によって

$$\begin{aligned} (\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [e^{S[0,T]}])^2 &\leq \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x [e^{S[0,T]}])^2 d\mathbf{N}_0 \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} (\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x [e^{S[0,T]}]) (\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x [e^{S[-T,0]}]) d\mathbf{N}_0 \end{aligned}$$

と評価できる. $X_{-s}, s \geq 0$, と $X_t, t \geq 0$, が独立なので

$$(\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [e^{S[0,T]}])^2 \leq \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0}^x [e^{S[0,T]+S[-T,0]}] d\mathbf{N}_0 = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [e^{S[0,T]+S[-T,0]}].$$

$S[0, T] + S[-T, 0] = S[-T, T] - \int_{-T}^0 ds \int_0^T W(X_t - X_s, t - s) dt$ なので

$$\left(\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [e^{S[0, T]}] \right)^2 \leq \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[e^{S[-T, T] - \int_{-T}^0 ds \int_0^T W(X_t - X_s, t - s) dt} \right].$$

よって

$$\gamma(T) \leq \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[e^{S[-T, T] - \int_{-T}^0 ds \int_0^T W(X_t - X_s, t - s) dt} \right]}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [e^{S[-T, T]}]} = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_T} \left[e^{-\int_{-T}^0 ds \int_0^T W(X_t - X_s, t - s) dt} \right]$$

となり補題が従う。 □

$I_{\text{IR}} < \infty$ のとき

$$\int_{-\infty}^0 dt \int_0^{\infty} ds W \leq \frac{1}{2} I_{\text{IR}} < \infty$$

だった。今から、 $\varphi > 0$ から $\int_{-T}^0 dt \int_0^T ds W$ が $T \rightarrow \infty$ で発散することを示す。つまり $\int_{-T}^0 dt \int_0^T ds W$ を下から評価する。 $e^{-|t|\sqrt{-\Delta}}$ の積分核は

$$e^{-|t|\sqrt{-\Delta}}(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \frac{|t|}{(|x - y|^2 + |t|^2)^2}$$

なのでペアポテンシャル $W(x, t)$ は具体的に計算できる。

$$\begin{aligned} W(x - y, t - s) &= \frac{1}{2} \int_{|t-s|}^{\infty} d|T| (e^{-ikx} \hat{\varphi}, e^{-|T|\omega} e^{-iky} \hat{\varphi}) \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^3} du \int_{\mathbb{R}^3} dv \frac{\varphi(u)\varphi(v)}{|x - y + u - v|^2 + |t - s|^2} > 0. \end{aligned}$$

ここで、 $\varphi > 0$ と定義したので $W(x - y, t - s) > 0$ である。

$$A_T = \{\omega \in \mathcal{X} \mid |X_t(\omega)| \leq T^\lambda, |t| \leq T\} \quad \lambda < 1$$

を考える。 $\mathbb{E}_{\mathcal{N}_T} \left[e^{-\int_{-T}^0 ds \int_0^T W(X_t - X_s, t - s) dt} \right]$ の積分領域を A_T と $\mathcal{X} \setminus A_T$ に分けて考える。

補題 10.4 $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_T} \left[\mathbb{1}_{A_T} e^{-\int_{-T}^0 ds \int_0^T W(X_t - X_s, t - s) dt} \right] = 0$ が成り立つ。

証明: A_T 上での評価式

$$|X_t - X_s + x - y|^2 + |t - s|^2 \leq 8T^{2\lambda} + 2|x - y|^2 + |t - s|^2 \quad (10.2)$$

$$\int_{-T}^0 ds \int_0^T dt \frac{1}{a^2 + |t - s|^2} \geq \log \left(\frac{a^2 + T^2/2}{a^2} \right) \quad (10.3)$$

から

$$\begin{aligned}
& \int_{-T}^0 ds \int_0^T W(X_t - X_s, t - s) dt \\
&= \int_{-T}^0 ds \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{|X_t - X_s + x - y|^2 + |t - s|^2} \\
&\geq \int_{-T}^0 ds \int_0^T dt \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{\mathbb{R}^3} dy \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{8T^{2\lambda} + 2|x - y|^2 + |t - s|^2} \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{\mathbb{R}^3} dy \varphi(x)\varphi(y) \log \left(\frac{8T^{2\lambda} + 2|x - y|^2 + T^2/2}{8T^{2\lambda} + 2|x - y|^2} \right)
\end{aligned}$$

を得る. 上の不等式は $\varphi > 0$ なので従うことを注意しておく. 右辺は $\lambda < 1$ なので $T \rightarrow \infty$ で発散する. 補題が示せた. \square

補題 10.5 $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mathcal{N}_T} \left[\mathbf{1}_{\mathcal{X} \setminus A_T} e^{-\int_{-T}^0 ds \int_0^T W(X_t - X_s, t - s) dt} \right] = 0$ が成立する.

証明: $\int_{-T}^0 ds \int_0^T W(X_t - X_s, |t - s|) dt \leq \frac{T}{2} \|\hat{\varphi}/\omega\|^2$ に注意せよ.

$$\begin{aligned}
\gamma(T) &\leq e^{(T/2)\|\hat{\varphi}/\omega\|^2} \frac{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[\mathbf{1}_{\mathcal{X} \setminus A_T} e^{S[-T, T]} \right]}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[e^{S[-T, T]} \right]} \\
&\leq e^{(T/2)\|\hat{\varphi}/\omega\|^2} \frac{\left(\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[e^{2S[-T, T]} \right] \right)^{1/2}}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[e^{S[-T, T]} \right]} \left(\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[\mathbf{1}_{\mathcal{X} \setminus A_T} \right] \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

さらに $-2T\|\hat{\varphi}/\omega\|^2 \leq |S[-T, T]| \leq 2T\|\hat{\varphi}/\omega\|^2$ となるから

$$\frac{\left(\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[e^{2S[-T, T]} \right] \right)^{1/2}}{\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[e^{S[-T, T]} \right]} \leq e^{4T\|\hat{\varphi}/\omega\|^2}.$$

よって

$$\gamma(T) \leq e^{(4+\frac{1}{2})T\|\hat{\varphi}/\omega\|^2} \left(\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[\mathbf{1}_{\mathcal{X} \setminus A_T} \right] \right)^{1/2}.$$

証明を完結するために次の評価をする.

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[\mathbf{1}_{\mathcal{X} \setminus A_T} \right] \leq T^{-\lambda} \sqrt{a + Tb} \exp(-cT^{\lambda(\beta+1)}). \quad (10.4)$$

これは補題 10.6 から得られる. ここで $a, b, c > 0$. よって

$$\gamma(T) \leq e^{(4+\frac{1}{2})\|\hat{\varphi}/\omega\|^2 T - \frac{c}{2} T^{\lambda(\beta+1)}} T^{-\lambda} \sqrt{a + Tb} \quad (10.5)$$

だから $1/(\beta + 1) < \lambda < 1$ と選べば (10.5) の右辺は $T \rightarrow \infty$ のときゼロに収束する. \square

定理 10.2 の証明: $F = e^{-\int_{-T}^0 ds \int_0^T W(X_s, X_t, t-s) dt}$ として

$$\gamma(T) \leq \mathbb{E}_{\mathcal{N}_T} \left[e^{-\int_{-T}^0 ds \int_0^T W(X_s, X_t, t-s) dt} \right] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_T} [\mathbb{1}_{A_T} F] + \mathbb{E}_{\mathcal{N}_T} [\mathbb{1}_{\mathcal{X} \setminus A_T} F]$$

と分ける. 補題 10.3 から $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu_T} [\mathbb{1}_{A_T} F] = 0$ が従い, 補題 10.4 から $\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu_T} [\mathbb{1}_{\mathcal{X} \setminus A_T} F] = 0$ が従う. よって $\lim_{T \rightarrow \infty} \gamma(T) = 0$. \square

補題 10.6 (10.4) が成り立つ.

証明: $\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [\mathbb{1}_{\mathcal{X} \setminus A_T}] = \mathcal{N}_0 (\sup_{t \in [-T, T]} |X_t| \geq T^\lambda)$ に注意せよ. (10.4) を示すために $P(\phi)_1$ 過程の Dirichlet 原理をつかう. $0 \leq f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ は偶関数で

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \geq T^\lambda, \\ \leq |x|, & T^\lambda - 1 < |x| < T^\lambda, \\ 0, & |x| \leq T^\lambda - 1 \end{cases}$$

とする. このとき

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [\mathbb{1}_{\mathcal{X} \setminus A_T}] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [\mathbb{1}_{\{\sup_{|s| < T} |X_s| > T^\lambda\}}] = \mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [\mathbb{1}_{\{\sup_{|s| < T} |f(X_s)| > T^\lambda\}}].$$

$(X_t)_{t \in \mathbb{R}}$ の鏡映対称性によって

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [\mathbb{1}_{\{\sup_{|s| < T} |f(X_s)| > T^\lambda\}}] = 2\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} [\mathbb{1}_{\{\sup_{0 \leq s \leq T} |f(X_s)| > T^\lambda\}}]$$

となる. 命題 6.13 によって

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_0} \left[\sup_{|s| < T} |f(X_s)| > T^\lambda \right] \leq \frac{2e}{T^\lambda} \sqrt{(f, f)_{L^2(\mathcal{N}_0)} + T(L_p^{1/2} f, L_p^{1/2} f)_{L^2(\mathcal{N}_0)}} \quad (10.6)$$

なので (10.6) の右辺を評価する. $f \Psi_g \in D(H_p)$ と $H_p f \varphi_p = -\Delta f \cdot \varphi_p - \nabla f \cdot \nabla \varphi_p + E_p f \varphi_p$ に注意せよ. これから

$$(L_p^{1/2} f, L_p^{1/2} f)_{L^2(\mathcal{N}_0)} = (f \varphi_p, -\Delta f \cdot \varphi_p - \nabla f \cdot \nabla \varphi_p).$$

また $\varphi_p(x) \leq e^{-C|x|^{\beta+1}}$ によって

$$\|f \varphi_p\|^2 = \int_{\mathbb{R}^3} f(x)^2 \varphi_p(x)^2 dx \leq e^{-2CT^{\lambda(\beta+1)}} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 e^{-2C|x|^{\beta+1}} dx.$$

$\nabla f, \Delta f \in L^\infty(\mathbb{R}^3)$ だから

$$(L_p^{1/2} f, L_p^{1/2} f)_{L^2(\mathbb{N}_0)} \leq C' \|f\| \|\varphi_p\| (\|\nabla \varphi_p\| + \|\varphi_p\|) \leq C'' e^{-cT^{\lambda(\beta+1)}} (\|\nabla \varphi_p\| + \|\varphi_p\|)$$

が従う. 同様に $(f, f)_{L^2(\mathbb{N}_0)} \leq e^{-2cT^{\lambda(\beta+1)}} \int_{\mathbb{R}^3} |x|^2 e^{-2c|x|^{\beta+1}} dx$. 故に

$$\mathbb{E}_{\mathcal{N}_T} [\mathbb{1}_{\mathcal{A}^c}] \leq T^{-\lambda} \sqrt{a + Tb} e^{-cT^{\lambda(\beta+1)}}$$

が適当な定数 a, b, c で従う. □

10.2 参考文献など

基底状態の非存在と赤外特異条件の係りに数学的に厳密に初めて指摘したのは Arai [Ara83a, Ara83b] と思われる. また [HSSS11, Theorem 3.28] も参照せよ. さらに, Arai-Hirokawa-Hiroshima [AHH99] でも同様の議論が展開されている. この章で紹介した非存在の証明は Lőrinczi-Minlos-Spohn [LMS02] による. キーとなるのは $P(\phi)_1$ 過程の Dirichlet 原理に依るパスの評価だが, これは Kipnis-Varadhan の [KV86, Lemma 1.12] によるが, 我々の模型にあった形に翻訳するには時間がかかる. 非存在の証明は Hirokawa [Hir03] が pull through 公式をつかってもっと精密化している. また, Dereziński-Gérard [DG04] はシンプルな証明を与えている. Gérard-Hiroshima-Panati-Suzuki [GHPS12b] はローレンツ多様体上に定義された Nelson Hamiltonian の基底状態の非存在を汎関数積分表示で示している.

11 Martingale 性と固有ベクトルの空間的減衰性

11.1 固有ベクトルの空間的減衰性

2.1 節と同じように Nelson Hamiltonian H についても Martingale 性示すことができる. $H\Phi = E\Phi$ としよう⁴⁰.

$$X_t(x) = e^{tE} e^{-\int_0^t V(B_r+x) dr} e^{-\phi_E(\int_0^t \int_r \tilde{\varphi}(\cdot-x-B_r) dr)} J_t \Phi(B_t+x)$$

とする. $(X_t(x))_{t \geq 0}$ は $(\Omega \times \mathcal{Q}_E, \mathcal{F} \times \Sigma_E, W \times \mu_E)$ 上の確率過程である. 任意の t に対して Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示から

$$(\Psi, \Phi) = (\Psi, e^{-t(H-E)} \Phi) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_{\mu_E} [\bar{\Psi}(x) \mathbb{E}_W^0 [J_0^* X_t(x)]]$$

⁴⁰ここで記号 E は H の固有値であり, スペクトルの下限とは限らない. 混乱がない限り固有値も E で表す.

となる。つまり

$$\Phi(x) = \mathbb{E}_W^0[J_0^* X_t(x)]$$

が成り立つ。

$$\mathcal{M}_t = \mathcal{F}_t \times \Sigma_{(-\infty, t]}, \quad t \geq 0,$$

と定義する。ここで、 \mathcal{F}_t は Brown 運動の自然なフィルトレーションである。

定理 11.1 (Martingale 性) $(X_t(x))_{t \geq 0}$ は $(\mathcal{M}_t)_{t \geq 0}$ に関して Martingale である。

証明: $\mathbb{E}_{\mu_E} \mathbb{E}_W^0 [X_t(x) | \mathcal{M}_s], t \geq s$, を評価する。

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_E} \mathbb{E}_W^0 [X_t(x) | \mathcal{M}_s] &= e^{tE} e^{-\int_0^s V(B_r+x)dr} e^{-\phi_E(\int_0^s j_r \tilde{\varphi}(\cdot-x-B_r)dr)} \\ &\times \mathbb{E}_{\mu_E} \mathbb{E}_W^0 \left[e^{-\int_s^t V(B_r+x)dr} e^{-\phi_E(\int_s^t j_r \tilde{\varphi}(\cdot-x-B_r)dr)} J_t \Phi(B_t+x) | \mathcal{M}_s \right] \end{aligned}$$

右辺の条件付き期待値を計算する。 $(B_t)_{t \geq 0}$ の Markov 性から

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\mu_E} \mathbb{E}_W^0 \left[e^{-\int_s^t V(B_r+x)dr} e^{-\phi_E(\int_s^t j_r \tilde{\varphi}(\cdot-x-B_r)dr)} J_t \Phi(B_t+x) | \mathcal{M}_s \right] \\ &= \mathbb{E}_{\mu_E} \left[\mathbb{E}_W^{B_s} \left[e^{-\int_0^{t-s} V(B_r+x)dr} e^{-\phi_E(\int_0^{t-s} j_r \tilde{\varphi}(\cdot-x-B_{r-s})dr)} J_t \Phi(B_{t-s}+x) | \Sigma_{(-\infty, s]} \right] \right]. \end{aligned}$$

また Euclid 場の Markov 性から

$$= \mathbb{E}_{\mu_E} \left[\mathbb{E}_W^{B_s} \left[e^{-\int_0^{t-s} V(B_r+x)dr} e^{-\phi_E(\int_0^{t-s} j_r \tilde{\varphi}(\cdot-x-B_{r-s})dr)} J_t \Phi(B_{t-s}+x) | \Sigma_s \right] \right]$$

となる。これは射影だったから

$$= E_s \mathbb{E}_W^{B_s} \left[e^{-\int_0^{t-s} V(B_r+x)dr} e^{-\phi_E(\int_0^{t-s} j_r \tilde{\varphi}(\cdot-x-B_{r-s})dr)} J_t \Phi(B_{t-s}+x) \right]$$

となる。この射影は $E_s = J_s J_0^* U_{-s}$ と分解できるから

$$\begin{aligned} &= J_s J_0^* U_{-s} \mathbb{E}_W^{B_s} \left[e^{-\int_0^{t-s} V(B_r+x)dr} e^{-\phi_E(\int_0^{t-s} j_r \tilde{\varphi}(\cdot-x-B_{r-s})dr)} J_t \Phi(B_{t-s}+x) \right] \\ &= J_s J_0^* \mathbb{E}_W^{B_s} \left[e^{-\int_0^{t-s} V(B_r+x)dr} e^{-\phi_E(\int_0^{t-s} j_{r-s} \tilde{\varphi}(\cdot-x-B_{r-s})dr)} J_{t-s} \Phi(B_{t-s}+x) \right] \\ &= J_s J_0^* \mathbb{E}_W^{B_s} \left[e^{-\int_0^{t-s} V(B_r+x)dr} e^{-\phi_E(\int_0^{t-s} j_r \tilde{\varphi}(\cdot-x-B_r)dr)} J_{t-s} \Phi(B_{t-s}+x) \right]. \end{aligned}$$

よって

$$\mathbb{E}_{\mu_E} \mathbb{E}_W^0 [X_t(x) | \mathcal{M}_s] = e^{sE} e^{-\int_0^s V(B_r+x)dr} e^{-\phi_E(\int_0^s j_r \tilde{\varphi}(\cdot-x-B_r)dr)} e^{-(t-s)(H-E)} \Phi(B_s+x) = X_s(x)$$

となり Martingale 性が示せた. □

さて, τ を \mathcal{M}_t に関する停止時刻とする. このとき $X_{t \wedge \tau}(x)$ も Martingale になり, 特に

$$\mathbb{E}_{\mu_E} \mathbb{E}_W^0[X_t(x)] = \mathbb{E}_{\mu_E} \mathbb{E}_W^0[X_{t \wedge \tau}(x)]$$

となる.

補題 11.2 $H\Phi = E\Phi$ とする. このとき $\|\Phi(\cdot)\|_{L^2(\mathcal{Q})} \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

証明: $\Phi(x) = \mathbb{E}_W^0[J_0^* X_t(x)]$ が任意の $t > 0$ で成り立つ. また $J_0^* e^{-\phi_E(\int_0^t \int_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s) ds)} J_t$ は有界作用素で

$$\|J_0^* e^{-\phi_E(\int_0^t \int_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s) ds)} J_t\| \leq e^{(t/2)\|\hat{\varphi}/\omega\|^2} \quad (11.1)$$

なので

$$\|\Phi(x)\| \leq e^{tE} \left(\mathbb{E}_W^x[e^{-2\int_0^t V(B_r) dr}] \right)^{1/2} \left(\mathbb{E}_W^x[\|\Phi(B_t)\|^2] \right)^{1/2} e^{(t/2)\|\hat{\varphi}/\omega\|^2}.$$

V が Kato 分解可能なので $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_W^x[e^{-2\int_0^t V(B_r) dr}] < \infty$. また $\mathbb{E}_W^x[\|\Phi(B_t)\|^2] \leq C\|\Phi\|$ なので補題が示せた. □

定理 11.3 (固有ベクトルの空間的減衰性) $H\Phi = E\Phi$ とする. 次の (1) または (2) を仮定する.

$$(1) \lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = \infty,$$

$$(2) \lim_{|x| \rightarrow \infty} V_-(x) + E + \frac{1}{2}\|\hat{\varphi}/\omega\|^2 = a < 0.$$

このとき

$$\|\Phi(x)\|_{L^2(\mathcal{Q})} \leq C e^{-c|x|} \quad (11.2)$$

となる定数 $C > 0, c > 0$ が存在する.

証明: (1) の場合. $\tau_R = \inf\{t | |B_t| > R\}$ とする. これは Brown 運動の自然なフィルトレーションで停止時刻になる. x を中心とした半径 R の球内での V の下限を

$$W_R(x) = \inf\{V(y) | |x - y| < R\}$$

とする. もちろん $W_R(x) \leq V(x + y)$ が任意の $|y| < R$ で成り立つ. また

$$W_R(x) - E - \frac{1}{2}\|\hat{\varphi}/\omega\|^2 \rightarrow \infty \quad (|x| \rightarrow \infty).$$

$\Psi \in L^2(Q)$ とすれば $J_0\Psi \cdot X_t(x)$ も Martingale になる. 実際

$$\mathbb{E}_{\mu_E} \mathbb{E}_W^0[J_0\Psi \cdot X_t(x)|\mathcal{M}_s] = J_0\Psi \cdot \mathbb{E}_{\mu_E} \mathbb{E}_W^0[X_t(x)|\mathcal{M}_s] = J_0\Psi \cdot X_s(x).$$

よって,

$$(J_0\Psi, \Phi(x)) = \mathbb{E}_{\mu_E} \mathbb{E}_W^0[J_0\Psi \cdot X_0(x)] = \mathbb{E}_{\mu_E} \mathbb{E}_W^0[J_0\Psi \cdot X_{t \wedge \tau_R}(x)]$$

が成り立つ. (11.1) から

$$\begin{aligned} \|\Phi(x)\| &= \sup_{\Psi \in L^2(Q), \|\Psi\|=1} |(J_0\Psi, \Phi(x))| = |\mathbb{E}_{\mu_E} \mathbb{E}_W^0[J_0\Psi \cdot X_{t \wedge \tau_R}(x)]| \leq \|\mathbb{E}_W^0[J_0^* X_{t \wedge \tau_R}(x)]\| \\ &\leq e^{(t \wedge \tau_R)\xi} \mathbb{E}_W^x[e^{-\int_0^{t \wedge \tau_R} (V(B_r) - E) dr}] \sup_x \|\Psi_g(x)\| = \mathbb{E}_W^x[e^{-\int_0^{t \wedge \tau_R} (V(B_r) - E - \xi) dr}] \sup_x \|\Psi_g(x)\| \end{aligned}$$

となる. ここで $\xi = \frac{1}{2}\|\hat{\varphi}/\omega\|^2$. よって $\mathbb{E}_W^x[e^{-\int_0^{t \wedge \tau_R} (V(B_r) - E - \xi) dr}]$ を評価すればいい.

$$\mathbb{E}_W^x[e^{-\int_0^{t \wedge \tau_R} (V(B_r) - E - \xi) dr}] \leq \mathbb{E}_W^0[e^{-(t \wedge \tau_R)(W_R(x) - E - \xi)}] = \mathbb{E}_W^0[\mathbb{1}_{\{\tau_R < t\}} \cdots] + \mathbb{E}_W^0[\mathbb{1}_{\{\tau_R \geq t\}} \cdots]$$

と分ける. $\mathbb{E}_W^0[\mathbb{1}_{\{\tau_R \geq t\}} \cdots] \leq e^{-t(W_R(x) - E - \xi)}$ は自明. また

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_W^0[\mathbb{1}_{\{\tau_R < t\}}] &= \mathbb{E}_W^0[\mathbb{1}_{\{|B_t| \geq R\}}] \\ &= \int_{|y| \geq R} \Pi_t(y) dy = (2\pi)^{-d/2} S_{d-1} \int_{R/\sqrt{t}}^{\infty} e^{-r^2/2} r^{d-1} dr \leq c_1 e^{-c_2 R^2/t} \end{aligned}$$

となる. $R = p|x|$ ($0 < p < 1$), $t = \delta|x|$ で δ は十分小さいとすれば, $W_{p|x|}(x) - E - \xi \rightarrow \infty$ ($|x| \rightarrow \infty$) なので指数減衰性が従う.

(2) の場合. $\tau_R(x) = \inf\{t \geq 0 \mid |B_t + x| \leq R\}$ とする. 同様に $\mathbb{E}_W^0[e^{\int_0^{t \wedge \tau_R(x)} (V_-(B_r + x) + E + \xi) dr}]$ を評価すればいいことがわかる. R を十分大きくとれば, 仮定から $|x| > R$ のとき

$$V_-(x) + E + \xi < -\epsilon < 0$$

となる. よって

$$\mathbb{E}_W^0[e^{\int_0^{t \wedge \tau_R(x)} (V_-(B_r + x) + E + \xi) dr}] \leq e^{-t\epsilon} + \mathbb{E}_W^x[\mathbb{1}_{t \geq \tau_R(0)}].$$

(1) と同様に

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_W^x[\mathbb{1}_{t \geq \tau_R(0)}] &= \mathbb{E}_W^0[\mathbb{1}_{|B_t + x| \leq R}] = (2\pi t)^{-d/2} \int_{|z| \leq R} e^{-|z-x|^2/2t} dz \\ &= (2\pi)^{-d/2} \int_{|u| \leq R/t} e^{-|u - \frac{x}{\sqrt{t}}|^2/2} du = (2\pi)^{-d/2} \int_{|u| \leq R/t} e^{-\frac{1}{2}(|u|^2 - 2\frac{u \cdot x}{\sqrt{t}} + \frac{|x|^2}{t})} du. \end{aligned}$$

ここで $t = R = |x|$ とすれば

$$\mathbb{E}_W^x[\mathbb{1}_{t \geq \tau_R(0)}] \leq (2\pi)^{-d/2} e^{\sqrt{|x|} - \frac{1}{2}|x|} \int_{|u| \leq 1} e^{-\frac{1}{2}|u|^2} du \leq c_1 e^{-c_2|x|}.$$

よって, 証明できた. □

注意 11.4 (11.2) の右辺 $Ce^{-c|x|}$ の定数 C, c は $I_{\mathbb{R}}$ に依っていない. 特に $C \leq C' \|\Psi_g\|$ で C' は Ψ_g に依らない定数が存在する.

このことから次が示せる.

系 11.5 $\|\hat{\phi}/\omega\|$ だけに依った定数 C で $\|x\Psi_g\| \leq C\|\Psi_g\|$ となるものが存在する.

11.2 参考文献など

空間的減衰性を求めるためには Carmona 評価 [Car78] を場の量子論の模型に直接応用する方法がある. 例えば Hidaka-Hiroshima [HH10]. ただし, Carmona 評価は Brown 運動の性質を使うので, 一般的な確率過程 (パスが連続でないような確率過程) の場合には使いづらい. ここで紹介した Martingale 性と停止時刻を使う方法は少し応用範囲が広く, 相対論的 Schrödinger 作用素の固有ベクトルの空間的減衰性を調べるために Carmona-Master-Simon [CMS90] が導入した.

12 Gibbs 測度

この章では赤外正則条件 $I_{\mathbb{R}} < \infty$ を仮定し, H の基底状態 Ψ_g が存在しているとする, i.e., $H\Psi_g = E\Psi_g$.

12.1 Gibbs 測度の定義

$(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, Q)$ を確率測度空間とし $(Y_t)_{t \in \mathbb{R}}$ は確率過程とする. $\mathcal{B}_T = \sigma(Y_r, -T \leq r \leq T)$, $\mathcal{T}_T = \sigma(Y_r, r \in [-T, T]^c)$ としよう. $\mathcal{V} : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{W} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ はボレル可測関数で外場ポテンシャルとペアポテンシャルとよばれている. \mathcal{V} が任意の有界区間 I に対して

$$0 < \mathbb{E}_Q[e^{-\int_I \mathcal{V}(Y_s) ds}] < \infty$$

のとき admissible 外場ポテンシャルといわれる. さらに \mathscr{W} は

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{x, y \in \mathbb{R}^d} |\mathscr{W}(x, y, s)| ds < \infty$$

のとき admissible ペアポテンシャルといわれる. Admissible ポテンシャル $\mathscr{V}, \mathscr{W}, 0 < S \leq T$ に対して関数

$$\mathcal{E}_T = \int_{-T}^T \mathscr{V}(Y_t) dt + \left(\int_{\mathbb{R}} ds \int_{-T}^T dt + \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}} dt \right) \mathscr{W}(Y_t, Y_s, |t-s|), \quad (12.1)$$

$$\mathcal{E}_{S,T} = \int_{-T}^T \mathscr{V}(Y_t) dt + \left(\int_{-S}^S ds \int_{-T}^T dt + \int_{-T}^T ds \int_{-S}^S dt \right) \mathscr{W}(Y_t, Y_s, |t-s|) \quad (12.2)$$

を定義し, さらに $Y \in \mathcal{Y}$ に対して $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ 上の測度 Q_T^Y を

$$\mathbb{E}_{Q_T^Y}[fg] = \mathbb{E}_Q[f|\mathcal{T}_T](Y)g(Y)$$

で定める. ここで f は有界 \mathcal{B}_T -可測関数, g は有界 \mathcal{T}_T -可測関数である. つまり

$$Q_T^Y[A] = \mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_A|\mathcal{T}_T](Y).$$

定義 12.1 (Gibbs 測度) \mathscr{V} と \mathscr{W} は admissible ポテンシャルとする.

(1) $(\mathcal{Y}, \mathcal{B})$ 上の確率測度 P_T は次を満たすとき, 区間 $[-T, T]$ に対する, reference 測度 Q とポテンシャル \mathscr{V}, \mathscr{W} をもつ有限体積 Gibbs 測度といわれる.

(i) $P_T \ll Q|_{\mathcal{B}_T}$

(ii) 有界 \mathcal{B} -可測関数 f に対して $\mathbb{E}_{P_T}[f|\mathcal{T}_S](Y) = \frac{\mathbb{E}_{Q_S^Y}[f e^{-\mathcal{E}_{S,T}}]}{\mathbb{E}_{Q_S^Y}[e^{-\mathcal{E}_{S,T}}]}$, P_T -a.s.

(2) $(\mathcal{Y}, \mathcal{F})$ 上の確率測度 P は次を満たすとき, reference 測度 Q とポテンシャル \mathscr{V}, \mathscr{W} をもつ Gibbs 測度といわれる.

(i) $P \ll Q|_{\mathcal{B}_T} (\forall T > 0)$

(ii) 有界 \mathcal{F} -可測関数 f に対して $\mathbb{E}_W^0[f|\mathcal{T}_T](Y) = \frac{\mathbb{E}_{Q_T^Y}[f e^{-\mathcal{E}_T}]}{\mathbb{E}_{Q_T^Y}[e^{-\mathcal{E}_T}]}$, P -a.s.

命題 12.2 \mathscr{V} と \mathscr{W} を admissible なポテンシャルとする.

(1) $T > 0$ に対して $dP_T = \frac{1}{\mathbb{E}_Q[e^{-\mathcal{E}_{T,T}}]} e^{-\mathcal{E}_{T,T}} dQ$ は有限体積 Gibbs 測度になる.

(2) 確率測度 P_∞ で $P_T(A) \rightarrow P_\infty(A)$ ($T \rightarrow \infty$) が任意の $A \in \mathcal{B}_t$ で成り立ち⁴¹, かつ

⁴¹局所弱収束という.

$P_\infty[\mathcal{B}_T] \ll Q[\mathcal{B}_T]$ が全ての T で成立するとき P_∞ は Gibbs 測度になる.

証明: (1) は [LHB11] の Proposition 4.1, (2) は [LHB11] の Proposition 4.2 を参照せよ. \square

12.2 局所弱収束と Nelson 模型に付随した Gibbs 測度の存在

正の $L^2(\mathbb{R}^d)$ 関数 ϕ を一つ固定する.

$$Q_{[-t,t]} = J_{-t}^* e^{-\phi \mathbb{E}(\int_{-t}^t \dot{J}_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s) ds)} J_t e^{-\int_{-t}^t V(B_s) ds} \quad (12.3)$$

とすれば $Q_{[-t,t]} : L^2(\mathcal{Q}) \rightarrow L^2(\mathcal{Q})$ は有界作用素になる. 実際

$$\|Q_{[-t,t]}\| \leq e^{t\|\hat{\varphi}/\omega\|^2} e^{-\int_{-t}^t V(B_s) ds}$$

となる.

$$\mathcal{L}_T = \phi(B_{-T}) Q_{[-T,T]} \phi(B_T)$$

とおく. 可測空間 $(\tilde{\Omega}, \tilde{\mathcal{F}})$ 上の測度

$$\mu_T : A \mapsto \mu_T(A) = \frac{1}{Z_T} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x [\mathbb{E}_{\mu_E}[\mathbb{1}_A \mathcal{L}_T]] \quad (12.4)$$

の $T \rightarrow \infty$ の収束について考える. 右辺は具体的には

$$\mu_T(A) = \frac{1}{Z_T} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x [\mathbb{E}_{\mu_E}[\mathbb{1}_A \mathcal{L}_T]] = \frac{1}{Z_T} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\mathbb{1}_A e^{\frac{1}{2} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds W(t-s, B_t - B_s)} \right]. \quad (12.5)$$

さて,

$$\mathcal{F}_{[-t,t]} = \sigma(B_s; s \in [-t, t])$$

とする. このとき

$$\mathcal{G}_T = \bigcup_{0 \leq t \leq T} \mathcal{F}_{[-t,t]}, \quad \mathcal{G} = \mathcal{G}_\infty = \bigcup_{0 \leq t} \mathcal{F}_{[-t,t]}$$

は有限加法的集合族である. 確率空間の族 $(\tilde{\Omega}, \sigma(\mathcal{G}), \mu_T), T > 0$, を定義する. μ_T が $(\tilde{\Omega}, \sigma(\mathcal{G}))$ 上の確率測度 μ_∞ に局所弱収束することを示す.

定義 12.3 (局所弱収束⁴²) 任意の t を固定する. このとき任意の $A \in \mathcal{F}_{[-t,t]}$ に対して $\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(A) = \mu_\infty(A)$ となるとき, 確率測度 μ_T は 確率測度 μ_∞ に局所弱収束するという.

⁴²local weak convergence

証明の概略を述べる.

- (1) 有限加法的集合関数 ρ_T を $(\tilde{\Omega}, \mathcal{G}_T)$, $T > 0$, の上に基底状態 Ψ_g を用いて定義する. それの $(\tilde{\Omega}, \sigma(\mathcal{G}_T))$ 上の確率測度 ρ_T への拡張を $\bar{\rho}_T$ とする.
- (2) 汎関数積分をもちいて $\bar{\rho}_T(A) = \rho_T(A) = \mu_T(A)$ を $A \in \mathcal{G}_t$ ($t \leq T$) に対して示す.
- (3) 有限加法的集合関数 μ を基底状態 Ψ_g を使って $(\tilde{\Omega}, \mathcal{G})$ 上に定義し, $(\tilde{\Omega}, \sigma(\mathcal{G}))$ 上の確率測度への拡張を μ_∞ とかく.
- (4) Ψ_g^T が Ψ_g へ強収束するという事実から $\rho_T(A) \rightarrow \mu(A)$ ($T \rightarrow \infty$) を $A \in \mathcal{G}$ に対して示す. これは $\mu_T(A) \rightarrow \mu(A)$ を意味する.
- (5) $\mu(A) = \mu_\infty(A)$ ($A \in \mathcal{G}$) なので, μ_T は μ_∞ へ局所弱収束することがわかる.

μ_∞ の構成法から $\mu_\infty(A)$ ($A \in \mathcal{G}$) の厳密な形を知ることができる. (1)-(5) のステップを以下で実行する. 加法的集合関数 $\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$\mu(A) = e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x [\mathbb{1}_A \cdot (\Psi_g(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \Psi_g(B_t))], \quad A \in \mathcal{F}_{[-t,t]}$$

で定義する.

補題 12.4 集合関数 μ は well-defined, i.e., $A \in \mathcal{F}_{[-t,t]} \subset \mathcal{F}_{[-s,s]}$ に対して

$$\begin{aligned} \mu(A) &= e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x [\mathbb{1}_A (\Psi_g(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \Psi_g(B_t))_{L^2(\mathcal{Q}_E)}] \\ &= e^{2Es} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x [\mathbb{1}_A (\Psi_g(B_{-s}), Q_{[-s,s]} \Psi_g(B_s))_{L^2(\mathcal{Q}_E)}]. \end{aligned}$$

証明: $\mu_{(t)} = \mu|_{\mathcal{F}_{[-t,t]}}$ としよう. このとき $\mu_{(t)}$ は $(\tilde{\Omega}, \mathcal{F}_{[-t,t]})$ 上の確率測度になる. $-s < -t = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t < s$ とする. 有限次元分布は

$$\begin{aligned} \mu_{(t)}^{t_0, \dots, t_n}(A_0 \times \dots \times A_n) &= \mu(B_{t_0} \in A_0, \dots, B_{t_n} \in A_n) \\ &= e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\left(\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(B_{t_j}) \right) (\Psi_g(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \Psi_g(B_t)) \right] \\ &= (\Psi_g, \mathbb{1}_{A_0} e^{-(t_1-t_0)(H-E)} \dots e^{(t_n-t_{n-1})(H-E)} \mathbb{1}_{A_n} \Psi_g). \end{aligned}$$

$e^{-(t_0+s)(H-E)}\Psi_g = \Psi_g$ だから

$$\begin{aligned} &= (\Psi_g, e^{-(t_0+s)(H-E)} \mathbb{1}_{A_0} e^{-(t_1-t_0)H} \dots e^{(t_n-t_{n-1})H} \mathbb{1}_{A_n} e^{-(s-t_n)(H-E)} \Psi_g) \\ &= e^{2Es} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\left(\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(B_{t_j}) \right) (\Psi_g(B_{-s}), Q_{[-s,s]} \Psi_g(B_s)) \right] \\ &= \mu_{(s)}^{t_0, \dots, t_n}(A_0 \times \dots \times A_n). \end{aligned}$$

また $\mu_{(t)}^\Lambda$, $\Lambda \subset [-t, t]$, $\#\Lambda < \infty$, の有限次元分布は consistency 条件

$$\mu_{(t)}^{t_0, \dots, t_n}(A_0 \times \dots \times A_n) = \mu_{(t)}^{t_0, \dots, t_n, t_{n+1}, \dots, t_{n+l}}(A_0 \times \dots \times A_n \times \prod_{j=n+1}^l \mathbb{R}^d)$$

を満たすことがわかる. Kolmogorov の拡張定理により一意な⁴³ 確率空間 $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, Q)$ と確率過程 $(Y_s)_{s \in [-t, t]}$ (e.g., [Sim79, Theorem 2.1]) で $\mathcal{B} = \sigma(Y_s, s \in [-t, t])$,

$$\mu_t^{t_0, \dots, t_n}(A_0 \times \dots \times A_n) = Q(Y_{t_0} \in A_0, \dots, Y_{t_n} \in A_n)$$

となるものが存在する. 一意性により $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, Q)$ と $(\tilde{\Omega}, \mathcal{F}_{[-t, t]}, \mu_{(t)})$ は同型になり, また $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, Q)$ と $(\tilde{\Omega}, \mathcal{F}_{[-t, t]}, \mu_{(s)} \upharpoonright_{\mathcal{F}_{[-t, t]}})$ も同型になる. 故に $Q(A) = \mu_{(s)}(A) = \mu_{(t)}(A)$ が $A \in \mathcal{F}_{[-t, t]}$ に対して成り立つ. \square

μ は \mathcal{G} 上の完全加法的集合関数⁴⁴ なので Hopf の拡張定理より $(\tilde{\Omega}, \sigma(\mathcal{G}))$ 上の確率測度 μ_∞ で $\mu_\infty(A) = \mu(A)$ ($A \in \mathcal{G}$) となるものが存在する.

定理 12.5 (Gibbs 測度の存在) 確率測度 μ_T は μ_∞ へ局所弱収束する. i.e., $\mu_T(A) \rightarrow \mu_\infty(A)$ ($T \rightarrow \infty$) が $A \in \mathcal{G}$ に対して成立する. また μ_∞ は ϕ の選び方によらない.

証明の前に補題をいくつか示す. $\mathcal{G}_T = \cup_{t \leq T} \mathcal{F}_{[-t, t]}$ とし加法的集合関数 $\rho_T : \mathcal{G}_T \rightarrow \mathbb{R}$ を $A \in \mathcal{F}_{[-t, t]}$ ($t < T$) に対して,

$$\rho_T(A) = e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\mathbb{1}_A \cdot \left(\frac{\phi_{T-t}(B_{-t})}{\|\phi_T\|}, Q_{[-t, t]} \frac{\phi_{T-t}(B_t)}{\|\phi_T\|} \right) \right]$$

で定義する.

⁴³同型なものを同じとみなす.

⁴⁴ $A = \cup_n A_n \in \mathcal{G}$, $A_n \cap A_m = \emptyset$ ならば $\mu(A) = \sum_n \mu(A_n)$ となること.

補題 12.6 ρ_T は well defined, i.e., $A \in \mathcal{F}_{[-t,t]} \subset \mathcal{F}_{[-s,s]}$ に対して

$$\begin{aligned} & e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\mathbb{1}_A \left(\frac{\phi_{T-t}(B_{-t})}{\|\phi_T\|}, Q_{[-t,t]} \frac{\phi_{T-t}(B_t)}{\|\phi_T\|} \right) \right] \\ &= e^{2Es} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\mathbb{1}_A \left(\frac{\phi_{T-s}(B_{-s})}{\|\phi_T\|}, Q_{[-s,s]} \frac{\phi_{T-s}(B_s)}{\|\phi_T\|} \right) \right]. \end{aligned}$$

証明: 左辺を $\rho_{(t)}$ とかき, 右辺を $\rho_{(s)}$ とかく. $\rho_{(t)}$ の有限次元分布は

$$\begin{aligned} & \rho_{(t)}^{t_0, \dots, t_n}(A_0 \times \dots \times A_n) = \rho_{(t)}(B_{t_0} \in A_0, \dots, B_{t_n} \in A_n) \\ &= \frac{e^{2Et}}{\|\phi_T\|^2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\left(\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(B_{t_j}) \right) (\phi_{T-t}(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \phi_{T-t}(B_t)) \right]. \end{aligned}$$

右辺は

$$\begin{aligned} & \frac{(\phi_{T-t}, e^{-(t_0+t)(H-E)} \mathbb{1}_{A_0} e^{-(t_1-t_0)(H-E)} \dots e^{(t_n-t_{n-1})(H-E)} \mathbb{1}_{A_n} e^{-(t-t_n)(H-E)} \phi_{T-t})}{\|\phi_T\|^2} \\ &= \frac{(\phi_{T-s}, e^{-(t_0+s)(H-E)} \mathbb{1}_{A_0} e^{-(t_1-t_0)(H-E)} \dots e^{(t_n-t_{n-1})(H-E)} \mathbb{1}_{A_n} e^{-(s-t_n)(H-E)} \phi_{T-s})}{\|\phi_T\|^2} \\ &= \frac{e^{2Es}}{\|\phi_T\|^2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\left(\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(B_{t_j}) \right) (\phi_{T-s}(B_{-s}), Q_{[-s,s]} \phi_{T-s}(B_s)) \right] \\ &= \rho_{(s)}^{t_0, \dots, t_n}(A_0 \times \dots \times A_n). \end{aligned}$$

さらに $\rho_{(t)}^\Lambda$ と $\rho_{(s)}^\Lambda$, $\Lambda \subset [-T, T]$, $\#\Lambda < \infty$, は consistency 条件をみたし, $\rho_{(t)} \upharpoonright_{\mathcal{F}_{[-t,t]}}$ と $\rho_{(s)} \upharpoonright_{\mathcal{F}_{[-t,t]}}$ は $(\tilde{\Omega}, \mathcal{F}_{[-t,t]})$ 上の確率測度である. Kolmogorov の拡張定理から $\rho_{(t)}(A) = \rho_{(s)}(A)$ が $A \in \mathcal{F}_{[-t,t]} \subset \mathcal{F}_{[-s,s]}$ に対して成り立つ. よって補題が成立する. \square

Hopf の拡張定理から $(\tilde{\Omega}, \sigma(\mathcal{G}_T))$ 上の確率測度 $\bar{\rho}_T$ で $\rho_T = \bar{\rho}_T \upharpoonright_{\mathcal{G}_T}$ となるものが存在する.

補題 12.7 $t \leq T$, $A \in \mathcal{G}_t$ とする. このとき $\bar{\rho}_T(A) = \mu_T(A)$.

証明: $\Lambda = \{t_0, t_1, \dots, t_n\} \subset [-T, T]$ と $A_0 \times \dots \times A_n \in \times_{j=0}^n \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ に対して⁴⁵,

$$\begin{aligned} \rho_T^\Lambda(A_0 \times \dots \times A_n) &= \rho_T(B_{t_0} \in A_0, \dots, B_{t_n} \in A_n) \\ &= \frac{e^{2Et}}{\|\phi_T\|^2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\left(\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(B_j) \right) (\phi_{T-t}(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \phi_{T-t}(B_t)) \right], \\ \mu_T^\Lambda(A_0 \times \dots \times A_n) &= \mu_T(B_{t_0} \in A_0, \dots, B_{t_n} \in A_n) \\ &= \frac{1}{Z_T} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\left(\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(B_j) \right) \mathcal{L}_T \right] \end{aligned}$$

を定義する. ρ_T^Λ と μ_T^Λ は $(\mathbb{R}^d)^\Lambda, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)^\Lambda$ 上の確率測度である.

$$\begin{aligned} \mu_T^\Lambda(A_0 \times \dots \times A_n) &= \frac{(\phi \otimes \mathbb{1}, e^{-(t_0+T)H} \mathbb{1}_{A_0} e^{-(t_1-t_0)H} \mathbb{1}_{A_1} \dots \mathbb{1}_{A_n} e^{-(T-t_n)H} \phi \otimes \mathbb{1})}{\|\phi_T\|^2} \\ &= \frac{e^{2Et} (\phi_{T-t}, e^{-(t_0+t)H} \mathbb{1}_{A_0} e^{-(t_1-t_0)H} \mathbb{1}_{A_1} \dots \mathbb{1}_{A_n} e^{-(t-t_n)H} \phi_{T-t})}{\|\phi_T\|^2} \\ &= \frac{e^{2Et}}{\|\phi_T\|^2} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\left(\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(B_j) \right) (\phi_{T-t}(B_0), Q_{[-t,t]} \phi_{T-t}(B_t)) \right] \\ &= \rho_T^\Lambda(A_0 \times \dots \times A_n) \end{aligned}$$

と表せる. よって $\rho_T^\Lambda(A_0 \times \dots \times A_n) = \mu_T^\Lambda(A_0 \times \dots \times A_n)$ となる. 確率測度 μ_T^Λ と ρ_T^Λ は共に consistency 条件を満たすから Kolmogorov の拡張定理から一意的な確率空間 $(\mathcal{Y}, \mathcal{B}, Q)$ と確率変数 Y_s で $\mathcal{B} = \sigma(Y_s, s \in [-T, T])$ かつ

$$Q(Y_{t_0} \in A_0, \dots, Y_{t_n} \in A_n) = \mu_T^{t_0, \dots, t_n}(A_0 \times \dots \times A_n) = \rho_T^{t_0, \dots, t_n}(A_0 \times \dots \times A_n)$$

となるものが存在する. 一方

$$\mu_T^{t_0, \dots, t_n}(A_0 \times \dots \times A_n) = \rho_T^{t_0, \dots, t_n}(A_0 \times \dots \times A_n) = \bar{\rho}_T(A_0 \times \dots \times A_n) = \mu_T[\mathcal{G}_T(A_0 \times \dots \times A_n)].$$

故に $\bar{\rho}_T = Q = \mu_T[\mathcal{G}_T]$ が一意性から従う. □

定理 12.5 の証明: 補題 12.7 から

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(A) = \lim_{T \rightarrow \infty} \bar{\rho}_T(A) = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\mathbb{1}_A \left(\frac{\phi_{T-t}(B_{-t})}{\|\phi_T\|}, Q_{[-t,t]} \frac{\phi_{T-t}(B_t)}{\|\phi_T\|} \right) \right].$$

⁴⁵ $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ は \mathbb{R}^d のボレルシグマ代数を表す.

$\phi_T \rightarrow \Psi_g(T \rightarrow \infty)$ なので

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mu_T(A) = e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x [\mathbb{1}_A (\Psi_g(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \Psi_g(B_t))] = \mu_\infty(A).$$

次に μ_∞ が ϕ に依らないことを示す. μ'_∞ が μ_T の局所弱極限とする. μ_∞ の構成の仕方から, $\mu_\infty(A) = \mu'_\infty(A)$ が $A \in \mathcal{G}$ に対していえる. Hopf の拡張定理の一意性から $\mu_\infty = \mu'_\infty$. よって μ_∞ は ϕ によらない. \square

μ_∞ は具体的に $A \in \mathcal{F}_{[-t,t]}$ に対して

$$\mu_\infty(A) = e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x [\mathbb{1}_A (\Psi_g(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \Psi_g(B_t))]$$

で与えられる.

12.3 参考文献など

ここで紹介した Gibbs 測度の存在は Betz-Hiroshima-Lőrinczi-Minlos-Sphon [BHLMS02] にある. スピンボゾン模型の Gibbs 測度の存在は Hirokawa-Hiroshima-Lőrinczi, [HHL12] にあり, 準相対論的 Pauli-Fierz 模型のそれは, Hiroshima[Hir14] で与えられた. また, Betz-Hiroshima-Lőrinczi [LHB11] の 4 章も参照せよ. Osada-Spohn[OS99] には基底状態の存在を仮定しない理論が展開されている.

13 基底状態に関する期待値

オブザーバブル O の期待値 $(\Psi_g, O \Psi_g)$ を Gibbs 測度 μ_∞ をもちいて表すことができる. ここでは重要な例として $O = e^{+\beta N}$, $O = e^{\phi(f)^2}$ の期待値を Gibbs 測度で表す.

13.1 $F(\phi(f))$ の期待値

補題 13.1 f は $\tilde{\Omega}$ 上の $\mathcal{F}_{[-t,t]}$ 可測関数とする. このとき

$$\mathbb{E}_{\mu_\infty}[f] = e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x [(\Psi_g(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \Psi_g(B_t)) f]. \quad (13.1)$$

証明: $A \in \mathcal{F}_{[-t,t]}$ に対して $\mu_\infty(A) = e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x [(\Psi_g(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \Psi_g(B_t)) \mathbb{1}_A]$ なので (13.1) が従う. \square

補題 13.1 からすぐに次が従う.

系 13.2 $f_j : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{C}$, $j = 0, \dots, n$, は有界関数とする. このとき

$$\mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[\prod_{j=0}^n f_j(B_{t_j}) \right] = (\Psi_g, f_0 e^{-(t_1-t_0)(H-E)} f_1 \dots e^{-(t_n-t_{n-1})(H-E)} f_n \Psi_g). \quad (13.2)$$

特に任意の有界関数 f, g に対して

$$\mathbb{E}_{\mu_\infty} [f(B_t)g(B_s)] = (f \Psi_g, e^{-|t-s|(H-E)} g \Psi_g). \quad (13.3)$$

証明: $A_j \in \mathcal{B}$, $j = 0, 1, \dots, n$, に対して, 次が従う:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(B_{t_j}) \right] &= e^{2Et} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[(\Psi_g(B_{-t}), Q_{[-t,t]} \Psi_g(B_t)) \prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(B_{t_j}) \right] \\ &= (\Psi_g, \mathbb{1}_{A_0} e^{-(t_1-t_0)(H-E)} \mathbb{1}_{A_1} \dots e^{-(t_n-t_{n-1})(H-E)} \mathbb{1}_{A_n} \Psi_g). \end{aligned}$$

よって (13.2) が得られる. \square

補題 13.3 $I_{\mathbb{R}} < \infty$ とする. $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, $\beta \in \mathbb{R}$ としよう. このとき

$$(\Psi_g, e^{i\beta\phi(f)} \Psi_g) = e^{-\frac{\beta^2}{4} \|f\|^2} \mathbb{E}_{\mu_\infty} [e^{i\beta K(f)}]. \quad (13.4)$$

ここで

$$K(f) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{-|r|\omega} e^{-ikBr} \hat{\phi} / \sqrt{\omega}, \hat{f}) dr \quad (13.5)$$

は $(\tilde{\Omega}, \sigma(\mathcal{F}))$ 上の確率変数である.

証明:

$$(\Psi_g, e^{i\beta\phi(f)} \Psi_g) = \lim_{T \rightarrow \infty} (\Psi_g^T, e^{i\beta\phi(f)} \Psi_g^T)$$

に注意せよ. また

$$(\Psi_g^T, e^{i\beta\phi(f)} \Psi_g^T) = \frac{1}{Z_T} \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \mathbb{E}_{\mu_E} \left[\phi(B_{-T}) \phi(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{-\phi_E(\int_{-T}^T j_s \tilde{\phi}(\cdot - B_s) ds)} e^{i\beta\phi_E(j_0 f)} \right].$$

ここで μ_E に関する期待値は以下のように厳密に計算できる.

$$(\Psi_g, e^{i\beta\phi(f)}\Psi_g) = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2} \mathbb{E}_{\mu_T} \left[e^{-i\frac{1}{2}\beta \int_{-T}^T ds (e^{-|s|\omega} e^{-ikB_s} \hat{\phi}/\sqrt{\omega}, \hat{f})} \right].$$

また

$$\left| \int_{-T}^T ds (e^{-|s|\omega} e^{-ikB_s} \hat{\phi}/\sqrt{\omega}, \hat{f}) \right| \leq 2I_{\text{IR}} \|\hat{f}\| < \infty$$

に注意せよ. μ_T は局所弱収束するので, 後ほど述べる定理 13.10 の telescoping と同じようにすれば補題が従う. \square

F が多項式またはシュワルツテスト関数としよう. 補題 13.3 から $(\Psi_g, F(\phi(f))\Psi_g)$ はパス測度 μ_∞ の平均で表せる. $\Psi_g \in D(e^{+\beta N})$ が任意の $\beta > 0$ で成立することを後ほど系 15.2 で示す. 特に $\Psi_g \in D(\phi(f)^n)$ が全ての $n \in \mathbb{N}$ で成り立つ.

系 13.4 $I_{\text{IR}} < \infty$ とする. $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ としよう. また $h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$ は n 次のエルミート多項式とする. このとき

$$(\Psi_g, \phi(f)^n \Psi_g) = i^n \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[h_n \left(\frac{-iK(f)}{\|f\|/\sqrt{2}} \right) \right] (\|f\|/\sqrt{2})^n, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (13.6)$$

証明: はじめに

$$e^{-\beta^2\|f\|^2/4} e^{i\beta K(f)} = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \left(\frac{-iK(f)}{\|f\|/\sqrt{2}} \right) \frac{(-\beta\|f\|/\sqrt{2})^n}{n!}$$

なので

$$\frac{1}{i^n} \frac{d^n}{d\beta^n} e^{-\beta^2\|f\|^2/4} e^{i\beta K(f)} \Bigg|_{\beta=0} = i^n h_n \left(\frac{-iK(f)}{\|f\|/\sqrt{2}} \right) (\|f\|/\sqrt{2})^n$$

が従う. さらに

$$(\Psi_g, \phi(f)^n \Psi_g) = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{d\beta^n} e^{-\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2} \mathbb{E}_{\mu_\infty} [e^{i\beta K(f)}] \Bigg|_{\beta=0}$$

から (13.6) が従う. \square

系 13.5 $I_{\text{IR}} < \infty$ とする. $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$, $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ とする. このとき

$$(\Psi_g, F(\phi(f))\Psi_g) = \mathbb{E}_{\mu_\infty} [G_f(K(f))].$$

ここで $G_f = \check{F} * \check{g}$, $g(\beta) = e^{-\beta^2\|f\|^2/4}$.

証明: $F(\phi(f)) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \check{F}(\beta) e^{i\beta\phi(f)} d\beta$ なので,

$$(\Psi_g, F(\phi(f))\Psi_g) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \check{F}(\beta) e^{-\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2} \mathbb{E}_{\mu_\infty} [e^{i\beta K(f)}] d\beta.$$

よって系が従う. □

$e^{i\beta\phi(h)}$ の正規化を

$$[e^{i\beta\phi(h)}]_{\text{ren}} = \frac{e^{i\beta\phi(h)}}{(\mathbb{1}, e^{i\beta\phi(h)}\mathbb{1})} = e^{+\beta^2\|h\|^2/4} e^{i\beta\phi(h)}$$

によって定義する. また $F_{\text{ren}}(\phi(h))$ を

$$F_{\text{ren}}(\phi(h)) = (2\pi)^{-1/2} \int \check{F}(\beta) [e^{i\beta\phi(h)}]_{\text{ren}} d\beta$$

によって定義する. 補題 13.3 と系 13.5 によって次が従う.

系 13.6 $I_{\text{IR}} < \infty$ とする. $f \in L_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{R}^d)$, $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ としよう. このとき

$$(\Psi_g, F_{\text{ren}}(\phi(f))\Psi_g) = \mathbb{E}_{\mu_\infty} [F(K(f))].$$

13.2 ガウス domination

調和振動子の任意の固有ベクトル ϕ は $e^{-|x|^2/2}$ のオーダーで減衰することは, 固有ベクトルがエルミート多項式 $\times e^{-|x|^2/2}$ で与えられることから分かる. さらに,

$$\lim_{\beta \uparrow 1} \|e^{(\beta/2)|x|^2} \phi\| = \infty \tag{13.7}$$

になる. Nelson Hamiltonian の固有ベクトルも同様にガウス型に減衰すること, また, (13.7) に対応する性質が予想される.

補題 13.7 $I_{\text{IR}} < \infty$ とする. $f \in L_{\mathbb{R}}^2(\mathbb{R}^d)$ としよう. このとき全ての $\beta > 0$ に対して,

$$(\Psi_g, e^{-\beta\phi(f)^2}\Psi_g) = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta\|f\|^2}} \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[e^{-\frac{\beta K^2(f)}{1 + \beta\|f\|^2}} \right]. \tag{13.8}$$

証明: 補題 13.3 によって

$$\begin{aligned}
(\Psi_g, e^{-(\beta^2/2)\phi(f)^2}\Psi_g) &= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-k^2/2} (\Psi_g, e^{ik\beta\phi(f)}\Psi_g) dk \\
&= (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-k^2/2} e^{-k^2\beta^2\|f\|^2/4} \mathbb{E}_{\mu_\infty} [e^{ik\beta K(f)}] dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2\|f\|^2/2}} \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[e^{-\frac{\beta^2 K^2(f)/2}{1 + \beta^2\|f\|^2/2}} \right]
\end{aligned}$$

がわかる. $\beta^2/2$ を β に置き換えれば補題が示せる. \square

定理 13.8 (ガウス domination) $I_{\mathbb{R}} < \infty$ とする. $f \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d)$ とし, $|\beta| < 1/\|f\|^2$ とする. このとき $\Psi_g \in D(e^{(\beta/2)\phi(f)^2})$ かつ

$$\|e^{(\beta/2)\phi(f)^2}\Psi_g\|^2 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta\|f\|^2}} \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[e^{\frac{\beta K^2(f)}{1 - \beta\|f\|^2}} \right]. \quad (13.9)$$

特に

$$\lim_{\beta \uparrow 1/\|f\|^2} \|e^{(\beta/2)\phi(f)^2}\Psi_g\| = \infty.$$

証明: $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1/\|f\|^2\}$, $\mathbb{C}_+ = \{z \mid \Re z > 0\}$ そして $\mathbb{C}_- = \{z \mid \Re z < 0\}$ としよう.

$$\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{1 + z\|f\|^2}} \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[e^{-\frac{zK^2(f)}{1 + z\|f\|^2}} \right], (z > 0). \quad (13.10)$$

とおく. このとき $|K(f)| \leq 2I_{\mathbb{R}}\|f\|$ がパスに一樣に成り立つので, $\rho(z)$ は $\mathbb{C}_+ \cup B$ へ解析接続できる. この解析接続された関数を $\bar{\rho}(z)$ で表す. $w \in \mathbb{R} \cap B$ とし $B_\delta(w)$ は半径 δ , 中心 w の \mathbb{C} 上の円板とする. $\delta < 1/\|f\|^2$ となるものを取り, w が $B_\delta(w) \cap \mathbb{C}_- \cap B \neq \emptyset$ をみたすとする. $\bar{\rho}(z)$ を次のように級数展開する

$$\bar{\rho}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n b_n(w), \quad z \in B_\delta(w) \cap B. \quad (13.11)$$

一方 $\Psi_g \in D(\phi(f)^2)$ なので $\mathbb{C}_+ \ni z \mapsto (\Psi_g, e^{-z\phi(f)^2}\Psi_g) \in \mathbb{C}$ は \mathbb{C}_+ 上で微分可能. よって \mathbb{C}_+ 上で解析的であるから次を得る.

$$(\Psi_g, e^{-z\phi(f)^2}\Psi_g) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - w)^n \frac{1}{n!} \int_0^\infty (-\lambda)^n e^{-w\lambda} dE_\lambda, \quad z \in \mathbb{C}_+. \quad (13.12)$$

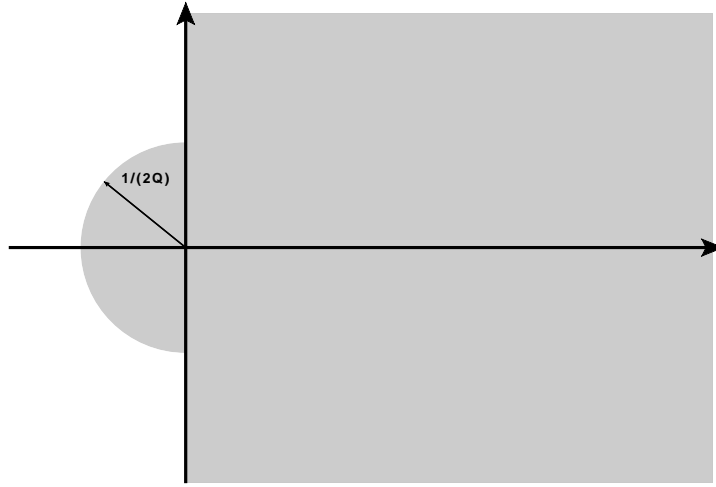


図 7: $\mathbb{C}_+ \cup B$ へ解析接続

ここで E_λ は Ψ_g に関する $\phi(f)^2$ のスペクトル測度. (13.11), (13.12) と $\bar{\rho}(z) = (\Psi_g, e^{-z\phi(f)^2}\Psi_g)$ ($z \in \mathbb{C}_+$) を比べれば,

$$b_n(w) = \frac{1}{n!} \int_0^\infty (-\lambda)^n e^{-w\lambda} dE_\lambda \quad (13.13)$$

がわかる. (13.13) を (13.11) へ代入すれば,

$$\bar{\rho}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z-w)^n \frac{1}{n!} \int_0^\infty (-\lambda)^n e^{-w\lambda} dE_\lambda, \quad z \in B_\delta(w) \cap B, \quad (13.14)$$

がわかり, さらに右辺が絶対収束することもわかる. つまり

$$\sum_{n=0}^{\infty} |z-w|^n \frac{1}{n!} \left| \int_0^\infty (-\lambda)^n e^{-w\lambda} dE_\lambda \right| < \infty \quad (13.15)$$

($z \in B_\delta(w) \cap B$). よって $z \in B_\delta(w) \cap B \cap \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned} \int_0^M e^{-z\lambda} dE_\lambda &\leq \sum_{n=0}^{\infty} |z-w|^n \frac{1}{n!} \left| \int_0^M (-\lambda)^n e^{-w\lambda} dE_\lambda \right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |z-w|^n \frac{1}{n!} \left| \int_0^M \lambda^n e^{-w\lambda} dE_\lambda \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |z-w|^n \frac{1}{n!} \left| \int_0^\infty \lambda^n e^{-w\lambda} dE_\lambda \right| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |z-w|^n \frac{1}{n!} \left| \int_0^\infty (-\lambda)^n e^{-w\lambda} dE_\lambda \right| < \infty \end{aligned}$$

が (13.15) から従う. これは $\lim_{M \rightarrow \infty} \int_0^M e^{-z\lambda} dE_\lambda < \infty$ ($z \in B_\delta(w) \cap B \cap \mathbb{R}$) を意味する. 単調収束定理から $\int_0^\infty e^{-z\lambda} dE_\lambda < \infty$. よって $\Psi_g \in D(e^{-(z/2)\phi(f)^2})$. そして

$$\|e^{-(z/2)\phi(f)^2} \Psi_g\|^2 = \bar{\rho}(z), \quad z \in B_\delta(w) \cap B \cap \mathbb{R}, \quad (13.16)$$

となる. いま, 任意の $\delta < 1/\|f\|^2$ に対して, $w \in \mathbb{R} \cap B$ で $\mathbb{C}_- \cap B \cap B_\delta(w) \neq \emptyset$ となるものが存在するので, 定理が示せた. \square

13.3 第2量子化作用素の期待値

次の補題から始める.

補題 13.9 正の可測関数 $\rho \geq 0$ をかけ算作用素とみなす. このとき

$$\frac{(\Phi_T, e^{-\beta d\Gamma(\rho)} \Phi_T)}{\|\Phi_T\|^2} = \mathbb{E}_{\mu_T} \left[e^{-\int_{-T}^0 dt \int_0^T W^{\rho, \beta}(B_t - B_s, t-s) ds} \right]. \quad (13.17)$$

ここで, ペア相互作用は

$$W^{\rho, \beta}(x-y, T) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} e^{-|T|\omega(k)} e^{-ik(x-y)} (1 - e^{-\beta\rho(k)}) dk \quad (13.18)$$

で与えられる.

証明: 命題 8.11 の記号 $J_{d+1, \rho^{\text{ex}}}(t)$, $j_{d+1, \rho^{\text{ex}}}(t)$ を Ξ_t , ξ_t で表すことにする. 命題 8.11 から

$$(\Phi_T, e^{-\beta d\Gamma(\rho)} \Phi_T) = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x \left[\phi(B_{-T}) \phi(B_T) (\Xi_0 J_{-T} \mathbb{1}, e^{\Phi_{d+2}(A_0 + A_\beta)} \Xi_\beta J_T \mathbb{1}) e^{-\int_{-T}^T V(B_r) dr} \right]$$

が従う. ここで $A_0 = \int_{-T}^0 \xi_0 j_r \hat{\varphi}(\cdot - B_r) dr$ と $A_\beta = \int_0^T \xi_\beta j_r \hat{\varphi}(\cdot - B_r) dr$. 計算すると

$$(\Xi_0 J_{-T} \mathbb{1}, e^{\Phi_{d+2}(A_0 + A_\beta)} \Xi_\beta J_T \mathbb{1}) = e^{\frac{1}{4}\|A_0 + A_\beta\|^2} = e^{\frac{1}{4}(\|A_0\|^2 + \|A_\beta\|^2 + 2\Re(A_0, A_\beta))}.$$

さらに, $\xi_0^* \xi_\beta = e^{-\beta\rho}$ なので $\|A_0\|^2 + \|A_\beta\|^2 + 2\Re(A_0, A_\beta)$ が計算できて, 結果は以下のようになる.

$$\begin{aligned} & \|A_0\|^2 + \|A_\beta\|^2 + 2\Re(A_0, A_\beta) \\ &= \int_{-T}^0 dt \int_{-T}^0 ds \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} e^{-ik(B_t - B_s)} e^{-|t-s|\omega(k)} dk \\ &+ \int_0^T dt \int_0^T ds \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} e^{-ik(B_t - B_s)} e^{-|t-s|\omega(k)} dk \\ &+ 2 \int_{-T}^0 dt \int_0^T ds \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\beta\rho(k)} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} e^{-ik(B_t - B_s)} e^{-|t-s|\omega(k)} dk. \end{aligned}$$

まとめると

$$\begin{aligned}
&= \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} e^{-ik(B_t - B_s)} e^{-|t-s|\omega(k)} dk \\
&\quad - 2 \int_{-T}^0 dt \int_0^T ds \int_{\mathbb{R}^d} (1 - e^{-\beta\rho(k)}) \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} e^{-ik(B_t - B_s)} e^{-|t-s|\omega(k)} dk.
\end{aligned}$$

よって補題が従う. □

$T \rightarrow \infty$ の極限として

$$W_\infty^{\rho, \beta} = \int_{-\infty}^0 dt \int_0^\infty W^{\rho, \beta}(B_t - B_s, t - s) ds$$

とおく. このとき $|W_\infty^{\rho, \beta}| \leq I_{\text{IR}}/2 < \infty$ がパスに一樣に成立することに注意しよう.

定理 13.10 (第 2 量子化作用素の期待値) 任意の $\beta > 0$ に対して

$$(\Psi_g, e^{-\beta d\Gamma(\rho)} \Psi_g) = \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[e^{-W_\infty^{\rho, \beta}} \right]$$

が成り立つ.

証明: 簡単のために $W_T^{\rho, \beta} = \int_{-T}^0 ds \int_0^T W^{\rho, \beta}(B_t - B_s, t - s) dt$ とおく. $\delta > 0$ に対して, ある S_δ で $|W_T^{\rho, \beta} - W_\infty^{\rho, \beta}| \leq \delta$ ($\forall T > S_\delta$) がパスに一樣に成立する.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mu_T} \left[e^{-W_T^{\rho, \beta}} \right] - \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[e^{-W_\infty^{\rho, \beta}} \right] &= \mathbb{E}_{\mu_T} \left[e^{-W_T^{\rho, \beta}} \right] - \mathbb{E}_{\mu_T} \left[e^{-W_\infty^{\rho, \beta}} \right] \\
&\quad + \mathbb{E}_{\mu_T} \left[e^{-W_\infty^{\rho, \beta}} \right] - \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[e^{-W_\infty^{\rho, \beta}} \right]
\end{aligned}$$

と分解する. まず $\left| \mathbb{E}_{\mu_T} \left[e^{-W_T^{\rho, \beta}} \right] - \mathbb{E}_{\mu_T} \left[e^{-W_\infty^{\rho, \beta}} \right] \right| \leq C\delta$ となる定数 C がある. 第 2 項は次のように評価できる

$$\left| \mathbb{E}_{\mu_T} \left[e^{-W_\infty^{\rho, \beta}} \right] - \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[e^{-W_\infty^{\rho, \beta}} \right] \right| \leq \left| \mathbb{E}_{\mu_T} \left[e^{-W_\infty^{\rho, \beta}} \right] - \mathbb{E}_{\mu_T} \left[e^{-W_{S_\delta}^{\rho, \beta}} \right] \right| \quad (13.19)$$

$$+ \left| \mathbb{E}_{\mu_T} \left[e^{-W_{S_\delta}^{\rho, \beta}} \right] - \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[e^{-W_{S_\delta}^{\rho, \beta}} \right] \right| \quad (13.20)$$

$$+ \left| \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[e^{-W_{S_\delta}^{\rho, \beta}} \right] - \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[e^{-W_\infty^{\rho, \beta}} \right] \right|. \quad (13.21)$$

(13.19) と (13.21) に対して上限をえる. 定理 12.5 によって (13.20) は $T \rightarrow \infty$ のときゼロに収束する. □

13.4 個数作用素の期待値

これから $\rho = \mathbb{1}$ として, 個数作用素 $N = d\Gamma(\mathbb{1})$ について考察する.

$$W_\infty^{\rho, \beta} = (1 - e^{-\beta})W_\infty$$

になる. ここで,

$$W_\infty = \int_{-\infty}^0 dt \int_0^\infty W(B_t - B_s, t - s) ds.$$

系 13.11 (基底状態ボゾン数の指数減衰性) 全ての $\beta \in \mathbb{C}$

$$(\Psi_g, e^{\beta N} \Psi_g) = \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[e^{-(1-e^{-\beta})W_\infty} \right] \quad (13.22)$$

が成立する. 特に $\Psi_g \in D(e^{\beta N})$ が全ての $\beta > 0$ で成り立つ.

証明: 定理 13.10 で ρ を $\mathbb{1}$ におきかえれば, $(\Psi_g, e^{-\beta N} \Psi_g) = \mathbb{E}_{\mu_\infty} \left[e^{-(1-e^{-\beta})W_\infty} \right]$ が任意の $\beta > 0$ で成り立つ. あとは定理 13.8 の証明と同じ, 解析接続による. \square

この系の主張は, $H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f$ の基底状態 $\varphi_p \otimes \mathbb{1}$ のボゾン数はゼロであるが, 相互作用 H_I を加えても H の基底状態のボゾン数が期待値の意味で非常に少ないということをしている.

系 13.12 (Pull through 公式)

$$(\Psi_g, N \Psi_g) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 dt \int_0^\infty ds \int_{\mathbb{R}^d} dk \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} e^{-|t-s|\omega(k)} \mathbb{E}_{\mu_E} [e^{-ik \cdot (B_t - B_s)}] \quad (13.23)$$

証明: (13.22) を $\beta = 0$ で微分すればいい. \square

(13.23) の $\mathbb{E}_{\mu_E} [e^{-ik \cdot (B_t - B_s)}]$ は

$$\mathbb{E}_{\mu_E} [e^{-ik \cdot (B_t - B_s)}] = (\Psi_g, e^{ikx} e^{-|t-s|(H-E)} e^{-ikx} \Psi_g)$$

なので

$$(\Psi_g, N \Psi_g) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^0 dt \int_0^\infty ds \int_{\mathbb{R}^d} dk \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} (\Psi_g, e^{ikx} e^{-|t-s|(H-E+\omega(k))} e^{-ikx} \Psi_g)$$

となり, pull through 公式

$$(\Psi_g, N \Psi_g) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} \|(H - E + \omega(k))^{-1} e^{-ikx} \Psi_g\|^2 dk \quad (13.24)$$

を導くことができる.

系 13.13 (個数期待値の評価) I_{IR} に依らない定数 C が存在して次の不等式が成立する.

$$\frac{1}{2}I_{\text{IR}} - C\|\Psi_g\| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} |k|^2 dk \leq (\Psi_g, N\Psi_g) \leq \frac{1}{2}I_{\text{IR}} \quad (13.25)$$

証明: 第2の不等式はすぐに分かるので, 第1の不等式を示す.

$$\Re \mathbb{E}_{\mu_E}[e^{-ik \cdot (B_t - B_s)}] = \mathbb{E}_{\mu_E}[\cos(B_t - B_s)] \geq \mathbb{E}_{\mu_E}[1 - \frac{|k|^2}{2}|B_t - B_s|^2],$$

また

$$\mathbb{E}_{\mu_E}[|B_t - B_s|^2] = 2(|x|\Psi_g, |x|\Psi_g) - 2 \sum_{\mu=1}^d (x_\mu \Psi_g, e^{-|t-s|(H-E)} x_\mu \Psi_g) \leq 2\|x|\Psi_g\|^2$$

なので

$$\Re \mathbb{E}_{\mu_E}[e^{-ik \cdot (B_t - B_s)}] \geq 1 - \|x|\Psi_g\|^2 |k|^2 > -\infty$$

となる. $\|x|\Psi_g\| \leq C\|\Psi_g\|$ で C は $\int |\hat{\varphi}(k)|^2 / \omega(k)^2 dk$ のみに依っていて I_{IR} に依らない定数で抑えられることは系 11.5 で示されるので, 第1の不等式が示された. \square

系 13.14 (赤外発散と軟ボゾン数の発散) $d = 3$ とし

$$I_{\text{IR}} = \int_{\lambda < |k| < \Lambda} \frac{1}{\omega(k)^3} dk \quad (13.26)$$

とする. このとき

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} (\Psi_g, N\Psi_g) = \infty. \quad (13.27)$$

証明: $\lim_{\lambda \rightarrow 0} I_{\text{IR}} = \infty$ に注意すれば (13.25) から従う. \square

系 13.15 (実数次数の個数作用素の期待値) $m + \alpha \geq 1$ とする. ここで $m \geq 1$ は整数, $0 < \alpha < 1$ である. このとき

$$(\Psi_g, N^{m+\alpha} \Psi_g) = (-1)^m \int_0^\infty (\rho^{(m)}(0) - \rho^{(m)}(\beta)) d\lambda(\beta)$$

となる. ここで, $\rho(\beta) = (\Psi_g, e^{-\beta N} \Psi_g)$ で, $\lambda(d\beta)$ は Bernstein 関数 u^α に対応する Lévy 測度で $\lambda(d\beta) = c/\beta^{1+\alpha} d\beta$ という形をしている.

証明: $u^m u^\alpha = u^m \int_0^\infty (1 - e^{-\beta u}) \lambda(d\beta)$ と $u^m (1 - e^{-\beta u}) = -(-1)^m (\frac{d^m}{d\beta^m} \rho(\beta) - \frac{d^m}{d\beta^m} \rho(0))$ から従う. \square

系 13.16 $k \geq 1$ なる実数とする. このとき

$$(I_{\text{IR}}/2 - a)^k \leq (\Psi_g, N^k \Psi_g) = (I_{\text{IR}}/2)^k, \quad (13.28)$$

ここで $a = C \|\Psi_g\| \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)^3} |k|^2 dk$ で定数 C は (13.25) の定数. 特に (13.26) の I_{IR} に対して

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\Psi_g, N^k \Psi_g)}{(I_{\text{IR}}/2)^k} = 1. \quad (13.29)$$

証明: 系 13.13 と系 13.15 から従う. (13.29) は a が Λ に依っていないので (13.28) から従う. \square

13.5 参考文献など

この章で紹介した議論のオリジナルは Betz-Hiroshima-Lórinzi-Minlos-Spohn [BHLMS02] による. Gross [Gro73], Spohn [Spo89] で基底状態のボゾン数の指数減衰性を示している. ただし, Gibbs 測度の議論はない. スピン-ボゾン模型 [HHL12], Pauli-Fierz 模型 [BH09], 準相対論的 Pauli-Fierz 模型 [Hir14] で Gibbs 測度の存在が示されている. この章では測度の局所弱収束性を示したが, 実は Brown 運動のパスの連続性を使えば, μ_T の部分列で弱収束するものが存在することを示せる. [BH09] ではその方法で示されている. ただし, この手法は一般の場合には適応させづらい.

14 紫外切断のくりこみ理論

14.1 正則化された Hamiltonian の汎関数積分表示

この章では $\hat{\varphi} \rightarrow \mathbb{1}$ の極限を考える. $d = 3$ として, N -粒子 Nelson 模型を考える. Fock 表現で, その Hamiltonian は

$$H = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + g \int_{\mathbb{R}^{3N}}^{\oplus} \overline{H_I(x)} dx \quad (14.1)$$

で与えられる, Hilbert 空間 $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N}) \otimes \mathcal{F}$ 上の自己共役作用素である. ここで結合定数 g を導入した. N -粒子 Schrödinger 作用素は

$$H_p = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Delta_j + V$$

で与えられる. 相互作用項は

$$H_I(x) = \sum_{j=1}^N \int \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} (\hat{\varphi}(k) e^{-ik \cdot x_j} a(k) + \hat{\varphi}(-k) e^{ik \cdot x_j} a^*(k)) dk$$

と定義される. H の荷電分布の 1 点極限を考える. つまり

$$\varphi(x) \rightarrow (2\pi)^{3/2} \delta(x)$$

または

$$\hat{\varphi}(k) \rightarrow \mathbb{1}$$

を考える.

さてこの極限をとるために紫外切断関数として $\hat{\varphi}_\varepsilon$ とする. この関数によって Hamiltonian H_ε を定義し $\varepsilon > 0$ を UV パラメーターとみなす. そして $H_\varepsilon - E_\varepsilon$ の $\varepsilon \downarrow 0$ 極限を考える. ここで E_ε はエネルギーくりこみ項である. これは具体的に後で与える. 主定理は以下である.

- (1) 汎関数積分をつかって E_ε をペア相互作用の対角成分として導きだす.
- (2) $H_{\text{ren}} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (H_\varepsilon - E_\varepsilon)$ を熱半群の意味で示す.
- (3) H_{ren} のペアポテンシャルを導く.

(4) H_{ren} の弱結合極限⁴⁶を求める.

$\omega(k) = |k|$ とし,

$$\mathbb{1}_\lambda(k) = \begin{cases} 1, & \omega(k) < \lambda \\ 0, & \omega(k) \geq \lambda. \end{cases}$$

$\mathbb{1}_\lambda^\perp(k) = \mathbb{1} - \mathbb{1}_\lambda(k)$ とおく. 赤外切断パラメーター $\lambda > 0$ を仮定する. この章では簡単のために次の仮定をする.

条件 14.1 ポテンシャル V は有界かつ連続関数. 特に Kato クラスである.

紫外切断のくりこみで, V は全く本質的ではなく, $V \equiv 0$ としても構わない. 切断関数

$$\hat{\varphi}_\varepsilon(k) = e^{-\varepsilon|k|^2/2} \mathbb{1}_\lambda^\perp, \quad \varepsilon \geq 0, \quad (14.2)$$

を考えよう. 正則化された Hamiltonian を

$$H_\varepsilon = H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + g \int_{\mathbb{R}^{3N}}^\oplus \overline{H_1^\varepsilon(x)} dx, \quad \varepsilon > 0,$$

で定義する.

$$H_1^\varepsilon(x) = g \sum_{j=1}^N \int \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} (\hat{\varphi}_\varepsilon(k) e^{-ik \cdot x_j} a(k) + \hat{\varphi}_\varepsilon(-k) e^{ik \cdot x_j} a^*(k)) dk$$

である.

$$E_\varepsilon = -\frac{g^2}{2} N \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{\omega(k)} \beta(k) \mathbb{1}_\lambda^\perp dk$$

としよう. ここで

$$\beta(k) = \frac{1}{\omega(k) + |k|^2/2}.$$

$E_\varepsilon \rightarrow -\infty$ ($\varepsilon \downarrow 0$) に注意せよ.

定理 14.2 (UV くりこみ) 次を満たす下から有界な自己共役作用素 H_{ren} が存在する.

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{-t(H_\varepsilon - E_\varepsilon)} = e^{-tH_{\text{ren}}}, \quad t \geq 0.$$

この定理を汎関数積分をつかって証明する. ここから $(B_t)_{t \in \mathbb{R}}$ は \mathbb{R} 上の $3N$ 次元の Brown 運動を表すとする.

⁴⁶weak coupling limit

命題 14.3 $f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ としよう. このとき

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH_\varepsilon} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon} \right].$$

ここで

$$S_\varepsilon = \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{-T}^T dt W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)$$

はペア相互作用でペアポテンシャルは

$$W_\varepsilon(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\omega(k)} e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-ik \cdot x} e^{-\omega(k)|t|} \mathbb{1}_\lambda^\perp dk \quad (14.3)$$

で与えられる.

$W_\varepsilon(x, t)$ は滑らかで, $W_\varepsilon(x, t) \rightarrow W_0(x, t)$ ($\varepsilon \downarrow 0$) が $(x, t) \neq (0, 0)$ で成り立つ. ここで

$$W_0(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2\omega(k)} e^{-ik \cdot x} e^{-\omega(k)|t|} \mathbb{1}_\lambda^\perp dk.$$

しかし $W_\varepsilon(0, 0) \rightarrow \infty$ ($\varepsilon \downarrow 0$) で, $W_0(x, t)$ は $(0, 0)$ で特異性をもつ. つまり S_ε は $\varepsilon = 0$ のとき対角成分に特異性が現れる. これを取り除きたいのだが, もちろん \mathbb{R}^2 において, 対角成分の測度はゼロなので, ここにジレンマが生まれる. アイデアは Itô の公式をつかって, 対角成分を引き出すことである.

14.2 くりこまれた作用

次の関数を考えよう.

$$\varrho_\varepsilon(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-ik \cdot x - \omega(k)|t|}}{2\omega(k)} \beta(k) \mathbb{1}_\lambda^\perp dk, \quad \varepsilon \geq 0.$$

そうすると $\varrho_\varepsilon(0, 0) \rightarrow -\infty$ ($\varepsilon \downarrow 0$) がわかる. この章では, いくつか補題を準備して

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} (S_\varepsilon + 4NT\varrho_\varepsilon(0,0))} \right] \\ &= \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}} \right]. \end{aligned} \quad (14.4)$$

となる S_0^{ren} が存在することを補題 14.12 で示す. $T > 0$ を固定する. $\varepsilon \downarrow 0$ のとき相互作用の

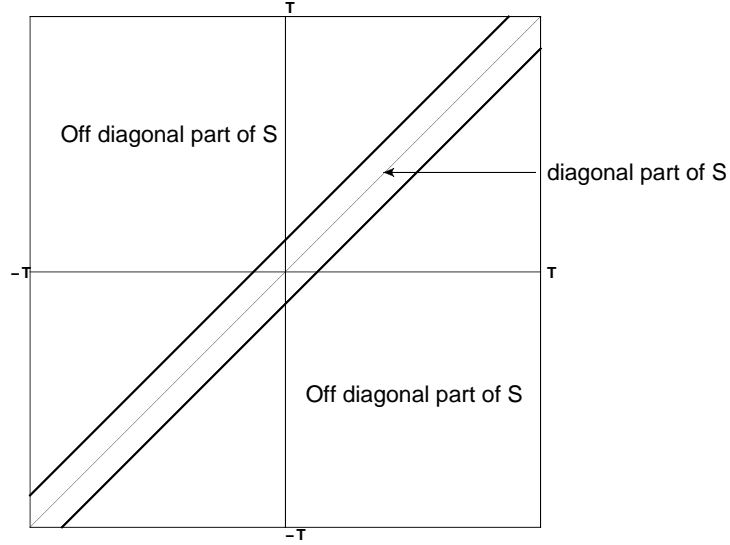


図 8: S_ε の対角成分と非対角成分

対角成分だけが特異な項である. また $0 < \tau \leq T$ を固定し, $[t]_T = -T \vee t \wedge T$ としよう. 正則化された相互作用を対角成分と非対角成分にわけると: $S_\varepsilon = S_\varepsilon^D + S_\varepsilon^{\text{OD}}$. ここで

$$S_\varepsilon^D = 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} dt W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t - s),$$

$$S_\varepsilon^{\text{OD}} = 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{[s+\tau]_T}^T dt W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t - s).$$

S_ε^D は S_ε を対角成分の近傍 $\{(t, t) \in \mathbb{R}^2 \mid |t| \leq T\}$ で積分したもので, $S_\varepsilon^{\text{OD}}$ はそれ以外の部分を表す. $\tau = T$ のときは $S_\varepsilon^{\text{OD}} = 0$ となる. 次の補題はすぐわかる.

補題 14.4 パスごとに $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} S_\varepsilon^{\text{OD}} = S_0^{\text{OD}}$. ここで S_0^{OD} は $S_\varepsilon^{\text{OD}}|_{\varepsilon=0}$ である.

確率積分をつかえば解析が困難な項 S_ε^D を評価できる.

補題 14.5 ε によらない定数 $c > 0$ で次をみたすものが存在する.

$$|\nabla \varrho_\varepsilon(x, t)| \leq c|t|^{-1} (t \neq 0), \quad (14.5)$$

$$|\nabla \varrho_\varepsilon(x, t)| \leq c|x|^{-1} (|x| \neq 0). \quad (14.6)$$

さらに $\varrho_0 - \varrho_\varepsilon$ に対しても, 定数 $c_\varepsilon > 0$ で次を満たすものが存在する.

$$\begin{aligned} |\nabla \varrho_\varepsilon(x, t) - \nabla \varrho_0(x, t)| &\leq c_\varepsilon |t|^{-1}, \quad t \neq 0, \\ |\nabla \varrho_\varepsilon(x, t) - \nabla \varrho_0(x, t)| &\leq c_\varepsilon |x|^{-1}, \quad |x| \neq 0 \\ \lim_{\varepsilon \downarrow 0} c_\varepsilon &= 0. \end{aligned}$$

証明: (14.5) の不等式は

$$|\nabla \varrho_\varepsilon(x, t)| \leq \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2(\omega(k) + |k|^2/2)} e^{-\varepsilon|k|^2} e^{-\omega(k)|t|} \mathbb{1}_\lambda^\perp dk \leq c \int_\Lambda e^{-rt} dr$$

よりわかる. (14.6) の不等式を証明しよう. 角変数で積分すると

$$\varrho_\varepsilon(x, t) = 2\pi \int_\Lambda \frac{e^{-\varepsilon r^2 - r|t|} \sin(r|x|)}{r(2+r)} \frac{1}{|x|} dr.$$

その微分は

$$\nabla \varrho_\varepsilon(x, t) = \frac{2\pi x}{|x|^2} \int_\Lambda \frac{e^{-\varepsilon r^2/|x|^2 - |t|r/|x|}}{r(2|x|+r)} (r \cos r - \sin r) dr$$

となり, 右辺を評価すると

$$|\nabla \varrho_\varepsilon(x, t)| \leq \int_0^1 \frac{Cr^3}{r^2} dr + \left| \int_1^\infty \frac{e^{-\varepsilon r^2/|x|^2 - |t|r/|x|}}{2|x|+r} \cos r dr \right| + \int_1^\infty \frac{1}{r^2} dr.$$

ここで全ての $r \in [0, 1]$ で $|r \cos r - \sin r| \leq Cr^3$ をつけた. 真ん中の項の積分は有界なので補題が示せた. \square

補題 14.6 $\varepsilon > 0$ ならば

$$\begin{aligned} S_\varepsilon^D &= 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varrho_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0) ds - 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varrho_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_{[s+\tau]_T}^j, [s+\tau]_T - s) ds \\ &\quad + 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla \varrho_\varepsilon(B_t^i - B_t^j, t-s) \cdot dB_t^i. \end{aligned} \quad (14.7)$$

証明: $\varrho_\varepsilon(x, t)$ は次の方程式の解である.

$$\left(\partial_t + \frac{1}{2} \Delta \right) \varrho_\varepsilon(x, t) = -W_\varepsilon(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad t \geq 0.$$

i と j を固定する. このとき Itô の公式から

$$\begin{aligned} & \varrho_\varepsilon(B_{[s+\tau]T}^i - B_s^j, [s+\tau]T - s) - \varrho_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0) \\ &= \int_s^{[s+\tau]T} \nabla \varrho_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t - s) \cdot dB_t^i + \int_s^{[s+\tau]T} \left(\partial_t + \frac{1}{2} \Delta \right) \varrho_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t - s) dt. \end{aligned}$$

よって

$$\begin{aligned} & \int_s^{[s+\tau]T} W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t - s) dt \\ &= \varrho_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0) - \varrho_\varepsilon(B_{[s+\tau]T}^i - B_s^j, [s+\tau]T - s) + \int_s^{[s+\tau]T} \nabla \varrho_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t - s) \cdot dB_t^i \end{aligned}$$

が従う. これを S_ε^D に代入すれば主張が示せる. \square

(14.7) の右辺第一項の $i = j$ の部分 $= 4NT \varrho_\varepsilon(0, 0)$ がまさに発散項になっているので, くりこまれた作用を次のように定義することが示唆される.

$$S_\varepsilon^{\text{ren}} = S_\varepsilon - 4NT \varrho_\varepsilon(0, 0), \quad \varepsilon > 0.$$

これは

$$S_\varepsilon^{\text{ren}} = S_\varepsilon^{\text{OD}} + X_\varepsilon + Y_\varepsilon + Z_\varepsilon \tag{14.8}$$

のように表せる. ここで

$$\begin{aligned} X_\varepsilon &= 2 \sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T \varrho_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0) ds, \\ Y_\varepsilon &= 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]T} \nabla \varrho_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t - s) \cdot dB_t^i, \\ Z_\varepsilon &= -2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varrho_\varepsilon(B_{[s+\tau]T}^i - B_s^j, [s+\tau]T - s) ds. \end{aligned}$$

一番やっかいなのは Y_ε の評価である.

補題 14.7 ある定数 c_z と c_s が存在して $|Z_\varepsilon| \leq c_z T$ と $|S_\varepsilon^{\text{OD}}| \leq c_s(T+1)$ がパスと $\varepsilon \geq 0$ に一様に成立する.

証明:

$$|Z_\varepsilon| \leq 4\pi N^2 \left(\int_{-T}^{T-\tau} ds \int_\Lambda \frac{e^{-r\tau}}{1+r/2} dr + \int_{T-\tau}^T ds \int_\Lambda \frac{e^{-r(T-s)}}{1+r/2} dr \right) \leq c_z T$$

が適当な $c_z > 0$ で成り立つ. 不等式 $|S_\varepsilon^{\text{OD}}| \leq c_s(T+1)$ も同じようにして得られる. \square

補題 14.8 全ての $\alpha > 0, \varepsilon \geq 0, T > 0$ に対して

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_W^x [e^{\alpha |X_\varepsilon^T|}] \leq e^{c_X \alpha T}$$

を満たす定数 c_X が存在する.

証明:

$$X_\varepsilon^T = \sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T ds \frac{2\pi}{|B_s^i - B_s^j|} \int_\lambda^\infty \frac{\sin \sqrt{r|B_s^i - B_s^j|}}{r + r^2/2} e^{-\varepsilon r^2} dr, \quad \varepsilon \geq 0$$

である. 仮定 $\lambda > 0$ から $a = 2\pi \int_\lambda^\infty \frac{1}{r+r^2/2} dr < \infty$. となり, 故に

$$|X_\varepsilon^T| \leq a \sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T \frac{ds}{|B_s^i - B_s^j|}.$$

$\sum_{i \neq j}^N |x^i - x^j|^{-1}$ が Kato クラスなので補題が従う. \square

$\varepsilon > 0$ のときは Fubini の定理より確率積分とルベーク積分を交換してもいい. よって

$$Y_\varepsilon^T = \sum_{i=1}^N \int_{-T}^T \Phi_{\varepsilon,t}^i dB_t^i. \quad (14.9)$$

ここで $\Phi_{\varepsilon,t} = (\Phi_{\varepsilon,t}^1, \dots, \Phi_{\varepsilon,t}^N)$ は \mathbb{R}^{3N} に値をとる確率過程で次で与えられる.

$$\Phi_{\varepsilon,t}^i = 2 \sum_{j=1}^N \int_{[t-\tau]_T}^t \nabla_{\varrho_\varepsilon}(B_t^i - B_s^j, t-s) ds.$$

さて Y_0^T を

$$Y_0^T = \sum_{i=1}^N \int_{-T}^T \Phi_{0,t}^i \cdot dB_t^i \quad (14.10)$$

で定義する.

補題 14.9 ある定数 c_Y が存在して, 任意の $\alpha > 0$ に対して

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_W^x [e^{\alpha Y_\varepsilon^T}] \leq e^{c_Y \alpha^2 T}, \quad \varepsilon \geq 0. \quad (14.11)$$

また $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_W^x [|Y_\varepsilon^T - Y_0^T|^2] = 0$ ($x \in \mathbb{R}^{3N}$).

証明: $\Phi_{\varepsilon,t}^i$ はフィルトレーション $(\mathcal{F}_t)_{t \geq -T}$ に adapted な Martingale である.

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt &\leq 4 \sum_{i=1}^N \int_{-T}^T \left[\sum_{j=1}^N \int_{[t-\tau]_T}^t |\nabla \varrho_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)| ds \right]^2 dt \\ &\leq 4c^2 N \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j|^{-\theta} |t-s|^{-(1-\theta)} ds \right]^2 dt \end{aligned}$$

となる. ここで補題 14.5 と補間

$$|\nabla \varrho_\varepsilon(x, t)| \leq c|x|^{-\theta}|t|^{-(1-\theta)}, \quad \theta \in [0, 1]$$

を使った. この評価は $\varepsilon \in [0, 1]$ に一様である. 適当な $\frac{1}{2} < \theta < 1$ に対して, Schwarz の不等式を使えば

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt &\leq 4c^2 N \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} ds \right] \left(\int_{[t-\tau]_T}^t |t-s|^{-2(1-\theta)} ds \right) dt \\ &\leq 4c^2 \tau^{2\theta-1} N \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} ds \right] dt \leq 4c^2 \tau^{2\theta-1} N Q. \end{aligned}$$

ここで c は補題 14.5 の定数で ε に依らない. また

$$Q = \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} dt.$$

$e^{Y_\varepsilon^T}$ を評価する困難は, Y_ε^T が確率積分であることである. そこで, なんとかリーマン積分の評価に持ち込む. そこで Girsanov の定理から

$$e^{2\alpha \int_{-T}^T \Phi_{\varepsilon,t} \cdot dB_t - \frac{1}{2}(2\alpha)^2 \int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt}, \quad T \geq 0$$

が Martingale になることを利用する. つまり

$$\mathbb{E}_W^x \left[e^{2\alpha \int_{-T}^T \Phi_{\varepsilon,t} \cdot dB_t - \frac{1}{2}(2\alpha)^2 \int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt} \right] = 1$$

なので

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{E}_W^x \left[e^{\alpha Y_\varepsilon^T} \right] \right)^2 &\leq \mathbb{E}_W^x \left[e^{2\alpha \int_{-T}^T \Phi_{\varepsilon,t} dB_t - \frac{1}{2} (2\alpha)^2 \int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt} \right] \mathbb{E}_W^x \left[e^{2\alpha^2 \int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt} \right] \\ &= \mathbb{E}_W^x \left[e^{2\alpha^2 \int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t}|^2 dt} \right] \leq \mathbb{E}_W^x \left[e^{\gamma Q} \right]. \end{aligned}$$

ここで $\gamma = 8c^2 N \tau^{2\theta-1}$. Jensen の不等式をつかって

$$\mathbb{E}_W^x \left[e^{\gamma Q} \right] \leq \int_{-T}^T \frac{ds}{2T} \mathbb{E}_W^x \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_s^{[s+\tau]T} |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} dt} \right].$$

$[s + \tau]_T \leq s + \tau$ なので

$$\mathbb{E}_W^x \left[e^{\gamma Q} \right] \leq \int_{-T}^T \frac{ds}{2T} \mathbb{E}_W^x \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_s^{s+\tau} |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} dt} \right].$$

ここで $\mathbb{E}_W^x \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_s^{s+\tau} |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} dt} \right]$ を s に関して一様に評価する. 条件付き期待値をとって Markov 性を使えば

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_W^x \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_0^\tau |B_{s+t}^i - B_s^j|^{-2\theta} dt} \right] &= \mathbb{E}_W^x \left[\mathbb{E}_W^x \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_0^\tau |B_{s+t}^i - B_s^j|^{-2\theta} dt} \middle| \mathcal{F}_s \right] \right] \\ &= \mathbb{E}_W^x \left[\mathbb{E}^{B_s} \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_0^\tau |B_t^i - B_0^j|^{-2\theta} dt} \right] \right] = \int_{\mathbb{R}^3} \Pi_s(y) \mathbb{E}_W^y \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_0^\tau |B_t^i - B_0^j|^{-2\theta} dt} \right] dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \Pi_s(y) \mathbb{E}_W^y \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_0^\tau |B_t^i - y^j|^{-2\theta} dt} \right] dy. \end{aligned}$$

さて

$$|x|^{-2\theta} \in L^p(\mathbb{R}^3) + L^\infty(\mathbb{R}^3), \quad p > 3/2$$

となる p が存在するので, $|x|^{-2\theta}$ は Kato クラス. よって

$$\sup_{x,z \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_W^x \left[e^{\beta \int_0^\tau |B_s^i + z|^{-2\theta} ds} \right] = \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_W^x \left[e^{\beta \int_0^\tau |B_s^i|^{-2\theta} ds} \right] \leq e^{a\tau\beta}$$

が適当な $a > 0$ と全ての $\beta > 0$ で成り立つ. $\int_{\mathbb{R}^3} \Pi_s(y) dy = 1$ なのでこれから, 定数 c' がとれて

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_W^x \left[e^{\gamma Q} \right] \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \int_{-T}^T \frac{ds}{2T} \mathbb{E}_W^x \left[e^{2T\gamma \sum_{i,j=1}^N \int_0^\tau |B_{s+t}^i - B_s^j|^{-2\theta} dt} \right] \leq e^{c^2 \alpha^2 \tau^{2\theta} c' T}.$$

よって

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \mathbb{E}_W^x \left[e^{2\alpha Y_\varepsilon^T} \right] \leq e^{c_Y \alpha^2 T}$$

が全ての $\alpha \in \mathbb{R}$ と $\varepsilon \geq 0$ で成り立つ. 同様に全ての $0 \leq \varepsilon$ に対して

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_W^x [|Y_\varepsilon^T - Y_0^T|^2] &= \int_{-T}^T |\Phi_{\varepsilon,t} - \Phi_{0,t}|^2 dt \\ &\leq 4c_\varepsilon^2 N \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \mathbb{E}_W^x \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} ds \right] \left(\int_{[t-\tau]_T}^t |t-s|^{-2(1-\theta)} ds \right) dt \\ &\leq 4c_\varepsilon^2 \tau^{2\theta-1} N \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \mathbb{E}_W \left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j|^{-2\theta} ds \right] dt \leq 4c_\varepsilon^2 \tau^{2\theta-1} N \mathbb{E}_W^0 [Q]. \end{aligned}$$

ここで補間

$$|\nabla \varrho_\varepsilon(x, t) - \nabla \varphi_0(x, t)| \leq c_\varepsilon |x|^{-\theta} |t|^{-(1-\theta)}, \quad \theta \in [0, 1]$$

をつかった. $c_\varepsilon \rightarrow 0$ ($\varepsilon \downarrow 0$) に注意せよ. $\mathbb{E}_W^0 [Q] \leq \mathbb{E}[e^Q] < \infty$ だから,

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_W^x [|Y_\varepsilon^T - Y_0^T|^2] = 0$$

が示せた. □

補題 14.10 全ての $\alpha \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$, と $f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ に対して

$$\int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x [f(B_{-T}) h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\alpha S_\varepsilon^{\text{ren}}}] \leq \|f\| \|h\| e^{c_{\text{ren}}(T+\alpha T+\alpha)}$$

を満たす定数 c_{ren} が存在する.

証明: 分解 $S_\varepsilon^{\text{ren}} = S_\varepsilon^{\text{OD}} + X_\varepsilon + Y_\varepsilon + Z_\varepsilon$ と Schwarz の不等式から

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x [|f(B_{-T}) h(B_T)| e^{\alpha S_\varepsilon^{\text{ren}}}] \\ &\leq \|f\| \|h\| \sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \left(\mathbb{E}_W^x \left[e^{-2 \int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{2\alpha(S_\varepsilon^{\text{OD},T} + X_\varepsilon^T + Y_\varepsilon^T + Z_\varepsilon^T)} \right] \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

補題 14.7, 14.8, 14.9 と V が Kato クラスという事実から定数 c_{ren} で

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_W^x \left[e^{-2 \int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{2\alpha(S_\varepsilon^{\text{OD},T} + X_\varepsilon^T + Y_\varepsilon^T + Z_\varepsilon^T)} \right] \leq e^{2c_{\text{ren}}(T+\alpha T+\alpha)},$$

となるものが存在する. □

補題 14.11 $\alpha \in \mathbb{R}$ ならば

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_W^0 \left[|e^{\alpha U_\varepsilon^T(x)} - e^{\alpha U_0^T(x)}| \right] = 0, \quad x \in \mathbb{R}^{3N}, \quad U = OD, X, Y, Z. \quad (14.12)$$

証明: $U = X$ としよう. $V_C(x) = C \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{|x^i - x^j|}$ とする. このとき

$$|X_\varepsilon^T(x)| \leq \int_{-T}^T V_C(B_s^1 + x^1, \dots, B_s^N + x^N) ds$$

と

$$\mathbb{E}_W^0 \left[|e^{\alpha X_\varepsilon^T(x)} - e^{\alpha X_0^T(x)}| \right] \leq 2 \mathbb{E}_W^0 \left[|e^{\alpha \int_{-T}^T V_C(B_s^1 + x^1, \dots, B_s^N + x^N) ds}| \right] < \infty$$

がわかる. x ごとに $X_\varepsilon^T(x) \rightarrow X_0^T(x)$ a.s. なのでルベグの優収束定理より (14.12) がわかる.

$U = Y$ としよう. $\mathbb{E}_W^x \left[|e^{\alpha(Y_\varepsilon^T - Y_0^T)} - 1| \right] \rightarrow 0$ を示せば十分.

$$\mathbb{E}_W^x \left[\left(e^{\alpha(Y_\varepsilon^T - Y_0^T)} - 1 \right)^2 \right] = \mathbb{E}_W^x \left[e^{2\alpha(Y_\varepsilon^T - Y_0^T)} \right] + 1 - 2 \mathbb{E}_W^x \left[e^{\alpha(Y_\varepsilon^T - Y_0^T)} \right]$$

だから $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \mathbb{E}_W^x \left[e^{\alpha(Y_\varepsilon^T - Y_0^T)} \right] = 1$ を示す. 確率変数 $\delta\Phi_t = \Phi_{\varepsilon,t} - \Phi_{0,t}$ を

$$Y_\varepsilon^T - Y_0^T = \int_{-T}^T \delta\Phi_t \cdot dB_t$$

となるように定義する. Girsanov の定理から

$$1 = \mathbb{E}_W^x \left[e^{\alpha \int_{-T}^T \delta\Phi_t \cdot dB_t - \frac{\alpha^2}{2} \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt} \right]. \quad (14.13)$$

故に

$$\left(\mathbb{E}_W^x \left[e^{\alpha(Y_\varepsilon^T - Y_0^T)} \right] - 1 \right)^2 \leq \mathbb{E}_W^x \left[e^{2\alpha \int_{-T}^T \delta\Phi_t \cdot dB_t} \right] \mathbb{E}_W^x \left[\left(1 - e^{-\frac{1}{2} \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt} \right)^2 \right]. \quad (14.14)$$

(14.13) から

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \mathbb{E}_W^x \left[e^{2\alpha \int_{-T}^T \delta\Phi_t \cdot dB_t} \right] \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} \left(\mathbb{E}_W^x \left[e^{4 \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt} \right] \right)^{1/2} \quad (14.15)$$

また

$$\mathbb{E}_W^x \left[\left(1 - e^{-\frac{1}{2} \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt} \right)^2 \right] \leq \mathbb{E}_W^x \left[1 - e^{-\frac{1}{2} \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt} \right] \leq \mathbb{E}_W^x \left[\frac{1}{2} \int_{-T}^T |\delta\Phi_t|^2 dt \right] \rightarrow 0 \quad (14.16)$$

($\varepsilon \downarrow 0$). (14.16) は補題 14.9 で示されている。(14.15) の右辺は ε に一様に有界. 故に (14.14) の右辺はゼロに収束することがわかる.

$U = Z$ としよう. $\sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}_W^x [|e^{\alpha(Z_\varepsilon - Z_0)} - 1|] \rightarrow 0$ を示せばいい.

$$\begin{aligned} & Z_\varepsilon(x) - Z_0(x) \\ &= 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} \left(e^{-ik \cdot (B_{[s+\tau]_{T-s}}^i + x^i - B_{[s+\tau]_{T-s}}^j - x^j)} e^{-([s+\tau]_{T-s})\omega(k)} \right) \frac{\beta(k)}{\omega(k)} \mathbb{1}_\lambda^\perp(1 - e^{-\varepsilon|k|^2}) dk \end{aligned}$$

がわかる. $\eta_\varepsilon(x) = \alpha(Z_\varepsilon(x) - Z_0(x))$ としよう. 直接 $|\eta_\varepsilon(x)|^n \leq c^n \alpha^n T^n \varepsilon^n$ が x に依らない適当な定数 c で成り立つことがわかる. よって $\mathbb{E}_W^0[e^{\eta_\varepsilon(x)}] = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \mathbb{E}_W^0[\eta_\varepsilon(x)^n]$. そして

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} \mathbb{E}_W^0[|\eta_\varepsilon(x)|^n] \leq \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} c^n T^n \varepsilon^n \rightarrow 0$$

($\varepsilon \downarrow 0$) が x に一様に成り立つ. よって $U = Z$ のとき成り立つ. $U = S^{\text{OD}}$ のときも同様にわかる. \square

補題 14.12 $\alpha \in \mathbb{R}, f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ としよう. このとき

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x [f(B_{-T})h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\alpha S_\varepsilon^{\text{ren}}}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x [f(B_{-T})h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\alpha S_0^{\text{ren}}}]. \end{aligned}$$

証明: $S_\varepsilon = S_\varepsilon^{\text{OD},T} + X_\varepsilon^T + Y_\varepsilon^T + Z_\varepsilon^T$ と telescoping によって

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[f(B_{-T})h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} (e^{\alpha S_\varepsilon^{\text{ren}}} - e^{\alpha S_0^{\text{ren}}}) \right] \right| \\ & \leq e^{2T\|V\|_\infty} \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx |f(x)| \left(\mathbb{E}_W^x [|h(B_T)|^2] \right)^{1/2} E_\varepsilon(x). \end{aligned}$$

ここで $E_\varepsilon(x) = \left(\mathbb{E}_W^x [(e^{\alpha S_\varepsilon} - e^{\alpha S_0})^2] \right)^{1/2}$. また $\sup_{x \in \mathbb{R}^{3N}} E_\varepsilon(x) < \infty$ かつ $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_\varepsilon(x) = 0$ ($x \in \mathbb{R}^{3N}$) なのでルベーグの収束定理より補題が従う. \square

補題 14.13 (真空期待値の収束) 次が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (f \otimes \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon(0,0)})} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}} \right]. \quad (14.17)$$

ここで

$$\begin{aligned} S_0^{\text{ren}} &= 2 \sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T \varrho_0(B_s^i - B_s^j, 0) ds + 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left(\int_{-T}^t \nabla \varrho_0(B_t^i - B_s^j, t-s) ds \right) \cdot dB_t \\ &\quad - 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varrho_0(B_T^i - B_s^j, T-s) ds. \end{aligned} \quad (14.18)$$

そして S_0^{ren} の被積分関数は

$$\begin{aligned} \varrho_0(X, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ikX} e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)} \beta(k) \mathbb{1}_\lambda^\perp dk, \\ \nabla \varrho_0(X, t) &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-ik e^{-ikX} e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)} \beta(k) \mathbb{1}_\lambda^\perp dk. \end{aligned}$$

証明: Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示より

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon(0,0)})} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon^{\text{ren}}} \right] dx$$

である. 右辺は $\int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}_W^x [\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}}] dx$ ($\varepsilon \downarrow 0$) に収束する. よって (14.17) がわかる. また

$$\begin{aligned} S_0^{\text{ren}} &= 2 \sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T \varrho_0(B_s^i - B_s^j, 0) ds + 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left(\int_{[t+\tau]_T}^t \nabla \varrho_0(B_t^i - B_s^j, t-s) ds \right) \cdot dB_t \\ &\quad - 2 \sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varrho_0(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s) ds \end{aligned}$$

なので $\tau = T$ とすれば (14.18) がわかる. □

14.3 一般的なベクトルへの拡張

$f \otimes \mathbb{1}$ からもっと一般的なベクトル $f \otimes F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n)) \mathbb{1}$ へ拡張する. ここで $F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

補題 14.14 $\rho_j \in L^2_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^d), j = 1, 2, f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N}), \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ としよう. このとき

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (f \otimes e^{\alpha\phi(\rho_1)} \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon}(0,0))} h \otimes e^{\beta\phi(\rho_2)} \mathbb{1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}} + \frac{1}{4} \xi} \right]. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \xi = \xi(g) &= \bar{\alpha}^2 \|\rho_1 / \sqrt{\omega}\|^2 + \beta^2 \|\rho_2 / \sqrt{\omega}\|^2 + 2\bar{\alpha}\beta(\rho_1 / \sqrt{\omega}, e^{-2T\omega} \rho_2 / \sqrt{\omega}) \\ &+ 2\bar{\alpha}g \sum_{j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{\widehat{\rho}_1(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \mathbb{1}_\lambda^\perp e^{-|s-T|\omega(k)} e^{-ikB_s^j} \\ &+ 2\beta g \sum_{j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{\widehat{\rho}_2(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \mathbb{1}_\lambda^\perp e^{-|s+T|\omega(k)} e^{-ikB_s^j}. \end{aligned}$$

証明: Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示から

$$\begin{aligned} & (f \otimes e^{\alpha\phi(\rho_1)} \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon}(0,0))} h \otimes e^{\beta\phi(\rho_2)} \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} \right. \\ & \left. \times \mathbb{E}_{\mu_E} \left[e^{\bar{\alpha}\phi_E(\tau_{-T}\rho_1)} e^{\beta\phi_E(\tau_T\rho_2)} e^{g\phi_E(-\sum_{j=1}^N \int_{-T}^T j_s \tilde{\varphi}_\varepsilon(\cdot - B_s^j) ds)} \right] \right] e^{-2Tg^2 N_{\varrho_\varepsilon}(0,0)}. \end{aligned}$$

すぐに

$$\mathbb{E}_{\mu_E} \left[e^{\bar{\alpha}\phi_E(\tau_{-T}\rho_1)} e^{\beta\phi_E(\tau_T\rho_2)} e^{g\phi_E(-\sum_{j=1}^N \int_{-T}^T j_s \tilde{\varphi}_\varepsilon(\cdot - B_s^j) ds)} \right] e^{-2Tg^2 N_{\varrho_\varepsilon}(0,0)} = e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon^{\text{ren}} + \frac{1}{4} \xi_\varepsilon}.$$

ここで ξ_ε は ξ で $\mathbb{1}_\lambda^\perp$ を $\mathbb{1}_\lambda^\perp e^{-\varepsilon|k|^2/2}$ に置換えたものである. よって

$$\begin{aligned} & (f \otimes e^{\alpha\phi(\rho_1)} \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon}(0,0))} h \otimes e^{\beta\phi(\rho_2)} \mathbb{1}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon^{\text{ren}} + \frac{1}{4} \xi_\varepsilon} \right]. \end{aligned}$$

適当な定数 C が存在して $\xi_\varepsilon \leq C$ がパスと $\varepsilon \geq 0$ に一様に成り立つ. その結果, 補題 14.13 と同様にしてこの補題も証明できる. \square

稠密な部分空間 $\mathcal{D} \subset \mathcal{H}$ を次で定義しよう.

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \text{L.H.} \{f \otimes \mathbb{1} \mid f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})\} \cup \\ & \{f \otimes F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n)) \mathbb{1} \mid F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), 1 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N}, f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})\}. \end{aligned}$$

補題 14.14 から次の結果が即座に従う.

補題 14.15 $\Phi = f \otimes F(\phi(u_1), \dots, \phi(u_n))\mathbb{1}$, $\Psi = h \otimes G(\phi(v_1), \dots, \phi(v_m))\mathbb{1} \in \mathcal{D}$ としよう. このとき

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\Phi, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon}(0,0)}) \Psi) &= (2\pi)^{-(n+m)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+m}} dK_1 dK_2 \overline{\widehat{F}(K_1)} \widehat{G}(K_2) \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}} + \frac{1}{4} \xi(K_1, K_2)} \right]. \end{aligned}$$

ここで $u = (u_1, \dots, u_n)$, $v = (v_1, \dots, v_m)$ として

$$\begin{aligned} \xi(K_1, K_2) &= -\|K_1 \cdot u / \sqrt{\omega}\|^2 - \|K_2 \cdot v / \sqrt{\omega}\|^2 - 2(K_1 \cdot u / \sqrt{\omega}, e^{-2T\omega} K_2 \cdot v / \sqrt{\omega}) \\ &\quad - 2ig \sum_{j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{K_1 \cdot \widehat{u}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \mathbb{1}_\lambda^\perp e^{-|s-T|\omega(k)} e^{-ikB_s^j} \\ &\quad + 2ig \sum_{j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{K_2 \cdot \widehat{v}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \mathbb{1}_\lambda^\perp e^{-|s+T|\omega(k)} e^{-ikB_s^j}. \end{aligned}$$

証明: $F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n))\mathbb{1} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{F}(K) e^{i\phi(K \cdot f)} \mathbb{1} dK$ に気をつければ

$$\begin{aligned} &(\Phi, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon}(0,0)}) \Psi) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{(n+m)/2}} \int_{\mathbb{R}^{m+n}} dK_1 dK_2 \overline{\widehat{F}(K_1)} \widehat{G}(K_2) (f \otimes e^{-i\phi(K_1 \cdot f)} \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon}(0,0))} h \otimes e^{-i\phi(K_2 \cdot h)} \mathbb{1}). \end{aligned}$$

よって主張は補題 14.14 から従う. □

14.4 下からの一様有界性

Nelson Hamiltonian の紫外切断のくりこみ理論で最も本質的な部分が $H_\varepsilon - g^2 N_{\varrho_\varepsilon}(0,0)$ の下からの一様有界性を示すことにある.

補題 14.16 (下からの一様有界性) 定数 $C \in \mathbb{R}$ があって

$$H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon}(0,0) > C \tag{14.19}$$

が $\varepsilon > 0$ に一様に成り立つ.

証明:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_W^0 \left[e^{2(S_\varepsilon^{\text{OD},T}(x) + X_\varepsilon^T(x) + Y_\varepsilon^T(x) + Z_\varepsilon^T(x))} \right] \\ & \leq \left(\mathbb{E}_W^0 \left[e^{4S_\varepsilon^{\text{OD},T}(x)} \right] \right)^{1/2} \left(\mathbb{E}_W^0 \left[e^{8X_\varepsilon^T(x)} \right] \right)^{1/4} \left(\mathbb{E}_W^0 \left[e^{16Y_\varepsilon^T(x)} \right] \right)^{1/8} \left(\mathbb{E}_W^0 \left[e^{32Z_\varepsilon^T(x)} \right] \right)^{1/16} \end{aligned}$$

がわかるので, 定数 a_5 と b_5 が存在して

$$\left(\mathbb{E}_W^0 \left[e^{2(S_\varepsilon^{\text{OD},T}(x) + X_\varepsilon^T(x) + Y_\varepsilon^T(x) + Z_\varepsilon^T(x))} \right] \right)^{1/2} \leq a_5 e^{b_5 T} \quad (14.20)$$

が全ての $T > 0$ で成立する. 関数 $W_{har}(x^1, \dots, x^N) = \sum_{j=1}^N |x^j|^2$ を考えよう. H_ε で V を δW_{har} に置換えたものを $H_\varepsilon(\delta)$ と表す. もちろん $\delta \geq 0$. そうすれば $H_\varepsilon(\delta)$ ($\delta > 0$) は一意な基底状態 $\Psi_g(\delta)$ をもつことは既に示した. $\Psi_g(\delta) > 0$ であり, 特に $(f \otimes \mathbb{1}, \Psi_g(\delta)) \neq 0$ が任意の $0 \leq f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ. ここで $f \neq 0$. その結果

$$\inf \sigma \left((H_\varepsilon(\delta) + g^2 N \varrho_\varepsilon(0,0)) \right) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log \left(f \otimes \mathbb{1}, e^{-T(H_\varepsilon(\delta) + g^2 N \varrho_\varepsilon(0,0))} f \otimes \mathbb{1} \right) \quad (14.21)$$

が $0 \leq f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ. (14.20) から

$$\begin{aligned} & (f \otimes \mathbb{1}, e^{-2T(H_\varepsilon(\delta) + g^2 N \varrho_\varepsilon(0,0))} f \otimes \mathbb{1}) \\ & = \int_{\mathbb{R}^d} dx \mathbb{E}_W^x [f(B_{-T}) f(B_T) e^{-\int_{-T}^T \delta W_{har}(B_s) ds} e^{S_\varepsilon^{\text{ren}}}] \\ & \leq \|f\|^2 \sup_{x \in \mathbb{R}^3} \mathbb{E}_W^0 \left(\left[e^{2(S_\varepsilon^{\text{OD},T}(x) + X_\varepsilon^T(x) + Y_\varepsilon^T(x) + Z_\varepsilon^T(x))} \right] \right)^{1/2} \\ & \leq \|f\|^2 a_5 e^{b_5 T}. \end{aligned}$$

これは (14.21) から

$$\inf \sigma \left(H_\varepsilon(\delta) + g^2 N \varrho_\varepsilon(0,0) \right) + \frac{b_5}{2} \geq 0, \quad \delta > 0, \quad (14.22)$$

を意味する. 大事なことは b_5 が δ に依っていないことである. よって

$$|(F, e^{-2T(H_\varepsilon(\delta) + g^2 N \varrho_\varepsilon(0,0))} G)| \leq \|F\| \|G\| e^{b_5 T}$$

が従う. $F, G \in \mathcal{H}$ としよう. Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示から

$$\begin{aligned} & (F, e^{-2TH_\varepsilon(\delta)} G) \\ & = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[e^{-\int_{-T}^T \delta W_{har}(B_s) ds} (J_{-T} F(B_{-T}), e^{-\phi_E(\int_{-T}^T \sum_{j=1}^N j_s \tilde{\varphi}(\cdot - B_s^j) ds)} J_T G(B_T)) \right]. \end{aligned}$$

ルベーク優収束定理から $\lim_{\delta \downarrow 0} (F, e^{-2T(H_\varepsilon(\delta) + g^2 N_{\varrho_\varepsilon(0,0)})} G) = (F, e^{-2T(H_\varepsilon(0) + g^2 N_{\varrho_\varepsilon(0,0)})} G)$ なので

$$|(F, e^{-2T(H_\varepsilon(0) + g^2 N_{\varrho_\varepsilon(0,0)})} G)| \leq \|F\| \|G\| e^{b_5 T}.$$

これは (14.22) が $\delta = 0$ でも従うことをいっている。 $H_\varepsilon = H_\varepsilon(0) + V$ かつ V は有界なので

$$\inf \sigma(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon(0,0)}) + \frac{b_5}{2} + \|V\|_\infty \geq 0.$$

$C = -\frac{b_5}{2} - \|V\|_\infty$ とおけば補題が従う。 □

定理 14.2 の証明:

$F, G \in \mathcal{H}, C_\varepsilon(F, G) = (F, e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon(0,0)})} G)$ としよう。補題 14.14 によって $F, G \in \mathcal{D}$ に対して $C_\varepsilon(F, G)$ が $\varepsilon \downarrow 0$ で収束することがわかる。一様な不等式

$$\|e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon(0,0)})}\| < e^{-tC}$$

と \mathcal{D} が \mathcal{H} で稠密ということから $\{C_\varepsilon(F, G)\}_\varepsilon$ がコーシー列となる。

$$C_0(F, G) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} C_\varepsilon(F, G)$$

とする。そうすれば $|C_0(F, G)| \leq e^{-tC} \|F\| \|G\|$ 。Riesz の定理より有界作用素 T_t で

$$C_0(F, G) = (F, T_t G), \quad F, G \in \mathcal{H}$$

となるものが存在する。よって $s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon(0,0)})} = T_t$ 。さらに

$$s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon(0,0)})} e^{-s(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon(0,0)})} = s\text{-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{-(t+s)(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon(0,0)})} = T_{t+s}.$$

左辺は $T_t T_s$ なので T_t の半群性が従う。 $e^{-t(H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon(0,0)})}$ は対称なので、 T_t も対称。また Feynman-Kac-Nelson 型汎関数積分表示から $(F, T_t G)$ は $t = 0$ で $F, G \in \mathcal{D}$ に対して連続になることもわかる。 \mathcal{D} は \mathcal{H} で稠密、 $\|T_t\|$ は $t = 0$ の近傍で一様に有界なので、 T_t は $t = 0$ で強連続になる。故に下から有界な自己共役作用素 H_{ren} で $T_t = e^{-tH_{\text{ren}}}$, $t \geq 0$, となるものが存在することがわかる。 $E_\varepsilon = -g^2 N_{\varrho_\varepsilon(0,0)}$ と置けば証明完了。 □

系 14.17 (くりこまれたペアポテンシャル) H_{ren} のペアポテンシャルは $\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}$ である。

証明: 補題 14.13 によって

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH_{\text{ren}}} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}} \right].$$

よって系が示される。 □

14.5 弱結合極限における実行ポテンシャル

ここではカットオフ関数を

$$\hat{\varphi}_\varepsilon(k) = (2\pi)^{-3/2} e^{-\varepsilon|k|^2/2}$$

とする. そして dispersion relation は

$$\omega_\nu(k) = \sqrt{|k|^2 + \nu^2}$$

とする. ここで $\nu > 0$ である. κ をスケーリングパラメーターとして H_ε をスケーリングする. 生成消滅作用素を κa^\sharp とする. このとき H_ε は

$$H_\varepsilon(\kappa) = H_p \otimes \mathbb{1} + \kappa^2 \mathbb{1} \otimes H_f + \kappa H_I$$

となる. このスケーリングは変換 $\omega \mapsto \kappa^2 \omega$, $\hat{\varphi} \mapsto \kappa^2 \hat{\varphi}$ と思ってもいいからエネルギーくりこみ項は

$$E_\varepsilon(\kappa) = -g^2 N \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{2(2\pi)^3 \omega_\nu(k)} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 \omega_\nu(k) + |k|^2/2} dk$$

のようにスケーリングされる. 定理 14.2 から自己共役作用素 $H_{\text{ren}}(\kappa)$ で

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (f \otimes \mathbb{1}, e^{-t(H_\varepsilon(\kappa) - E_\varepsilon(\kappa))} h \otimes \mathbb{1}) = (f \otimes \mathbb{1}, e^{-tH_{\text{ren}}(\kappa)} h \otimes \mathbb{1}) \quad (14.23)$$

となるものがある.

命題 14.18 (弱結合極限) 次が成り立つ.

$$\text{s-}\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \lim_{\kappa \rightarrow \infty} e^{-t(H_\varepsilon(\kappa) - E_\varepsilon(\kappa))} = e^{-th_{\text{eff}}} \otimes P_0.$$

ここで P_0 は $\{z\mathbb{1} \mid z \in \mathbb{C}\} \subset \mathcal{F}$ への射影で, 実行 Hamiltonian h_{eff} は

$$h_{\text{eff}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^N \Delta_j + V(x^1, \dots, x^N) - \frac{g^2}{4\pi} \sum_{i < j} \frac{e^{-\nu|x_i - x_j|}}{|x_i - x_j|}.$$

証明: [Ara90, Dav79, Hir99] をみよ. □

この命題では, はじめにスケーリング極限をとって, その後に $\varepsilon \downarrow 0$ の極限をとっている. スケーリング極限をとると, $\hat{\varphi}_\varepsilon$ で均されたポテンシャルが現れ, その $\varepsilon \downarrow 0$ の極限が $\frac{g^2}{4\pi} \sum_{i < j} \frac{e^{-\nu|x_i - x_j|}}{|x_i - x_j|}$ なるポテンシャルになるという仕組みになっている. ここでは, はじめに $\varepsilon \downarrow 0$ をとり, くりこまれた Hamiltonian $H_{\text{ren}}(\kappa)$ のスケーリング極限を考える. 定理 14.2 から次の補題が従う.

補題 14.19 $f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ のとき

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} (f \otimes \mathbb{1}, e^{-tH_{\text{ren}}(\kappa)} h \otimes \mathbb{1}) = (f, e^{-th_{\text{eff}}} h).$$

証明: 補題 14.14 から

$$(f \otimes \mathbb{1}, e^{-2TH_{\text{ren}}(\kappa)} h \otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}(\kappa)} \right].$$

ここで

$$\begin{aligned} S_0^{\text{ren}}(\kappa) &= 2 \sum_{i \neq j}^N \int_{-T}^T \varrho_0(B_s^i - B_s^j, 0, \kappa) ds + 2 \sum_{i, j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^T \nabla \varrho_0(B_t - B_s, t - s, \kappa) \cdot dB_t \\ &\quad - 2 \sum_{i, j=1}^N \int_{-T}^T \varrho_0(B_T - B_s, T - s, \kappa) ds. \end{aligned}$$

そして

$$\varrho_0(x, t, \kappa) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-ik \cdot x} e^{-\kappa^2 \omega(k)|t|}}{2\omega(k)} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 \omega(k) + |k|^2/2} dk.$$

特に $t = 0$ のとき

$$g^2 \sum_{i \neq j}^N \varrho_0(x^i - x^j, 0, \kappa) ds \rightarrow \frac{g^2}{4\pi} \sum_{i < j} \frac{e^{-\nu|x^i - x^j|}}{|x^i - x^j|}.$$

また $t \neq 0$ のとき,

$$|\nabla_X \varrho_0(X, t, \kappa)| \rightarrow 0, \quad |\varrho_0(X, t, \kappa)| \rightarrow 0 \quad (\kappa \rightarrow \infty)$$

が各点ごとに示せる. 補題 14.13 と同様にして

$$\begin{aligned} &\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{2} S_0^{\text{ren}}(\kappa)} \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^{3N}} dx \mathbb{E}_W^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) e^{-\int_{-T}^T V(B_s) ds} e^{\frac{g^2}{4\pi} \sum_{i < j} \int_{-T}^T \frac{e^{-\nu|B_s^i - B_s^j|}}{|B_s^i - B_s^j|} ds} \right] \end{aligned}$$

がわかる. □

系 14.20 (弱結合極限) $F, G \in \mathcal{D}$ のとき

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} (F, e^{-tH_{\text{ren}}(\kappa)} G) = (F, e^{-th_{\text{eff}}} \otimes P_0 G).$$

証明: これは補題 14.14 と補題 14.19 から従う. □

この系から $\lim_{\kappa \rightarrow \infty}$ と $\lim_{\varepsilon \downarrow 0}$ の極限操作は交換できることがわかる.

14.6 基底状態エネルギーと紫外切断のくりこみ項

$V = 0, N = 1$, とすると, H_ε は並行移動不変, i.e.,

$$[-i\nabla_j \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_{fj}, H_\varepsilon] = 0$$

となる. ここで

$$P_f = \int ka^*(k)a(k)dk$$

は場の運動量作用素である. H_ε を全運動量

$$-i\nabla_j \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes P_{fj}$$

のスペクトルで分解できる. その結果

$$H_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^d}^{\oplus} H_\varepsilon(P) dP$$

となる. ここで $H_\varepsilon(P)$ は Fock 空間 \mathcal{F} 上の自己共役作用素で, 次で与えられる:

$$H_\varepsilon(P) = \frac{1}{2m}(P - P_f)^2 + H_f + g\phi(0), \quad P \in \mathbb{R}^3.$$

ここで, g は結合定数, $\phi(0)$ は

$$\phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{e^{-\varepsilon|k|^2/2}}{\sqrt{\omega(k)}} \mathbb{1}_{|k|>\lambda} (a^*(k) + a(k)) dk$$

である. $P = 0$ として, $\lambda > 0$ のとき $H(g) = H_\varepsilon(0)$ の基底状態エネルギー $E(g) = \inf \sigma(H_\varepsilon(0))$ は十分小さな g に関して解析的であることが知られている.

$$E(g) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} g^n$$

として, a_n を求めてみよう. 形式的には $H(g)\Psi_g(g) = E(g)\Psi_g(g)$ の両辺を g で微分すると

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} H^{(k)}(g) \Psi_g^{(n-k)}(g) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E^{(k)}(g) \Psi_g^{(n-k)}(g)$$

で $H^{(2)} = 0$ とすれば

$$H(g)\Psi_g^{(n)} + n\phi(0)\Psi_g^{(n-1)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E^{(k)}(g)\Psi_g^{(n-k)}(g)$$

である. すぐにわかることは, $\Psi_g(0) = \mathbb{1}$, $E(0) = 0$ である. $H_0 = \frac{1}{2m}P_f^2 + H_f$ とおく. a_2 を形式的に計算する. $H'\Psi_g + H\Psi'_g = E'\Psi_g + E\Psi'_g$ に $g = 0$ を代入すれば

$$\phi(0)\mathbb{1} + H_0\Psi'_g(0) = E'(0)\mathbb{1}$$

となり, $\mathbb{1}$ と内積をとれば, $E'(0) = 0$ となる. よって,

$$\phi(0)\mathbb{1} + H_0\Psi'_g(0) = 0$$

となるから

$$\Psi'_g(0) = -H_0^{-1}\phi(0)\mathbb{1}$$

となる. さて, $H''\Psi_g + 2H'\Psi'_g + H\Psi''_g = E''\Psi_g + 2E'\Psi'_g + E\Psi''_g$ に $g = 0$ を代入すると, $E(0) = 0$, なので

$$E''(0) = 2(\mathbb{1}, \phi(0)\Psi'_g(0)) = -2(\phi(0)\mathbb{1}, H_0^{-1}\phi(0)\mathbb{1})$$

が導かれる. よって

$$a_2 = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{\phi}(k)|^2}{\omega(k)} \frac{1}{\omega(k) + |k|^2/2m} dk$$

となる. これはくりこみ項 $\times 2$ に一致する. つまり, くりこみ項の物理的な解釈は基底状態エネルギー $E(g)$ の g^2 次の係数 $a_2/2!$ ということになる.

14.7 ポーラロン模型

ポーラロン模型は $P \in \mathbb{R}^3$ をパラメーター (全運動量) として, \mathcal{F} 上の自己共役作用素

$$H(P) = \frac{1}{2}(P - P_f)^2 + \phi(0) + N, \quad P \in \mathbb{R}^d,$$

で定義される. 相互作用項は

$$\phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) \frac{\hat{\phi}(k)}{\omega(k)} + a(k) \frac{\hat{\phi}(-k)}{\omega(k)} \right) dk$$

である. ここで $\hat{\phi}(k)/\omega(k)$ に注意. 熱半群の真空期待値は

$$(\mathbb{1}, e^{-2TH(P)}\mathbb{1}) = \mathbb{E}_W^0 \left[e^{iP(B_{-T}-B_T)} \frac{1}{2} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds W(B_t - B_s, t-s) \right]$$

となる. ここで

$$W(X, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{\phi}(k)|^2}{2\omega(k)^2} e^{-|t|} e^{ik \cdot X} dk$$

である. $\hat{\varphi}$ として $\hat{\varphi}_\varepsilon = e^{-\varepsilon|k|^2} \mathbb{1}_\lambda^\perp$ をとり, $H_\varepsilon(P)$ を定義する. Nelson 模型と同様にくりこみ項 E_ε を計算すれば

$$E_\varepsilon = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{e^{-\varepsilon|k|^2}}{\omega(k)^2} \frac{1}{1 + |k|^2/2} \mathbb{1}_\lambda^\perp(k) dk$$

になり, これは

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} E_\varepsilon = - \int_\lambda^\infty \frac{4\pi}{1 + r^2/2} dr < \infty$$

に収束する. つまりポラロン模型ではくりこみ項は必要ない. 実際

$$\frac{1}{2} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds W(B_t - B_s, t - s) \rightarrow S_\infty = \frac{\pi^2}{2} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds \frac{e^{-|t-s|}}{|B_t - B_s|} = S_0$$

に収束する. つまり

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\mathbb{1}, e^{-2TH} \mathbb{1}) = \mathbb{E}^0 [e^{S_0}]$$

となる.

定理 14.21 (UV くりこみ) $P \in \mathbb{R}^3$ とする. このとき, 自己共役作用素 $H_0(P)$ で

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} e^{-TH_\varepsilon(P)} = e^{-TH_0(P)}$$

となるものが存在する. さらに

$$(\mathbb{1}, e^{-TH_0(P)} \mathbb{1}) = \mathbb{E}_W^0 [e^{S_0}]$$

となる.

証明: 証明の概略を述べる.

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (\mathbb{1}, e^{-TH_\varepsilon(P)} \mathbb{1}) = \mathbb{E}_W^0 [e^{S_0}]$$

は Nelson 模型と同様に証明できる. また, 稠密な部分空間 $\mathcal{D} \subset \mathcal{F}$ を次で定義しよう.

$$\mathcal{D} = \text{L.H.} \{ \mathbb{1}, F(\phi(f_1), \dots, \phi(f_n)) \mid F \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n), f_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3), 1 \leq j \leq n, n \in \mathbb{N} \}.$$

$F, G \in \mathcal{D}$ に対しても $\lim_{\varepsilon \downarrow 0} (F, e^{-TH_\varepsilon(P)} G)$ が存在することが示せる. あとは, $H_\varepsilon(P)$ の下からの一様有性を示せばいい. まず, $P = 0$ のときには基底状態 Ψ_g がいつも存在し $\Psi_g > 0$ となることが知られている. よって, Nelson 模型と同様に

$$\inf \sigma(H_\varepsilon(0)) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \log (\mathbb{1}, e^{-TH_\varepsilon(0)} \mathbb{1})$$

を下から一様に評価することができる. $P \neq 0$ の場合は双極不等式

$$\inf \sigma(H_\varepsilon(P)) \geq \inf \sigma(H_\varepsilon(0))$$

から下からの一様有界性がわかる. □

14.8 参考文献など

Nelson は [Nel64a] で作用素論的な手法で UV くりこみを示した。また, Nelson 自身も [Nel64b] で汎関数積分によるくりこみを考えていたようであるが, 残念ながらうまくいかなかった。

この章の証明は Gubinelli-Hiroshima-Lőrinczi [GHL13] による。[Nel64a] の証明は 15 章にで紹介する。この証明の最大の難関は $H_\varepsilon + g^2 N_{\varrho_\varepsilon}(0, 0)$ が一様な下からの有界性を示すことであった。この部分が証明できなくて 2 年以上, 論文を寝かせてしまった。Gérard-Hiroshima-Panati-Suzuki [GHPS12a] はローレンツ 多様体上に定義された Nelson Hamiltonian の UV くりこみを示した。ポーラロン模型の UV くりこみは [Hir15] による。

H_{ren} の基底状態の存在は [HHS05] にある。ここではさらに赤外正則条件も仮定しておらず, 非 Fock 表現をとっている。散乱理論は Z. Ammari [Amm00] で研究されている。

切断関数を $\mathbb{1}_{|k|<\Lambda}$ として Λ を UV パラメーターとみなす。「おまけ」の後半でも言及したが, くりこみ項は発散のオーダーが Nelson Hamiltonian の実行質量 $m_{\text{eff}} = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(\Lambda) g^{2j}$ の第 1 項 $a_1(\Lambda)$ と同じである。筆者は $a_j(\Lambda)$, $j \geq 2$, の項が $\Lambda \rightarrow \infty$ で有界であると予想している。そして, この事実が Nelson Hamiltonian の場合, くりこみ項を引去るだけで, UV くりこみ可能である理由と感じている。

Pauli-Fierz 模型の場合は実行質量 m_{eff} がもう少し複雑になっていて, $a_2(\Lambda)$ の予想は $(\log \Lambda)^2$ 発散であったが, 予想に反して $\sqrt{\Lambda}$ のオーダーでの発散だった。これは Hiroshima-Spohn [HS05], Hiroshima-Itô [HI07] による。筆者の知る限り未だに Pauli-Fierz 模型の UV はくりこまれていない。

第III部 応用編

15 紫外切断のない基底状態の存在

Nelson 模型の UV はくりこむことが出来た. しかし, 残念ながら, くりこまれた Nelson 模型の具体的な形はわからない. しかし, 基底状態の存在を示すことが出来る.

15.1 E. Nelson による作用素論的なくりこみ

はじめに, [Nel64a] で示されたくりこみ理論を紹介する. スカラー場を

$$\phi_{\hat{\varphi}}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx} \frac{\hat{\varphi}(-k)}{\sqrt{\omega(k)}} + a(k) e^{ikx} \frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \right) dk$$

とし, その運動量作用素を

$$\pi_{\hat{\varphi}}(x) = \frac{i}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx} \sqrt{\omega(k)} \hat{\varphi}(-k) - a(k) e^{ikx} \sqrt{\omega(k)} \hat{\varphi}(k) \right) dk$$

とする. このとき次の交換関係が従う.

$$[\phi_{\hat{\varphi}}(x), \pi_{\hat{\lambda}}(y)] = i \int e^{ik(y-x)} \hat{\varphi}(-k) \hat{\lambda}(k) dk,$$

$$[H_f, \phi_{\hat{\varphi}}(x)] = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx} \sqrt{\omega(k)} \hat{\varphi}(-k) - a(k) e^{ikx} \sqrt{\omega(k)} \hat{\varphi}(k) \right) dk = -i\pi_{\hat{\varphi}}(x),$$

$$\begin{aligned} [H_f, \pi_{\hat{\varphi}}(x)] &= \frac{i}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx} \sqrt{\omega(k)} \omega(k) \hat{\varphi}(-k) + a(k) e^{ikx} \sqrt{\omega(k)} \omega(k) \hat{\varphi}(k) \right) dk \\ &= i\phi_{\omega^2 \hat{\varphi}}(x). \end{aligned}$$

$V = 0$ として Nelson Hamiltonian

$$H = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N P_j^2 + H_f + \sum_{j=1}^N \phi(x_j)$$

の Gross 変換を考えよう.

$$\pi(x) = \sum_{j=1}^N \frac{i}{\sqrt{2}} \int \left(a^*(k) e^{-ikx_j} \beta(k) \hat{\varphi}(-k) - a(k) e^{ikx_j} \beta(k) \hat{\varphi}(k) \right) dk$$

とする。ここで⁴⁷,

$$\beta(k) = \frac{1}{\omega(k) + |k|^2/2} \frac{1}{\sqrt{\omega(k)}}.$$

このとき

$$e^{-i\pi} P_j e^{i\pi} = P_j + A_j + A_j^*.$$

ここで

$$A_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \int a^*(k) e^{-ikx_j} k \beta(k) \hat{\varphi}(-k) dk, \quad (15.1)$$

$$A_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \int a(k) e^{ikx_j} k \beta(k) \hat{\varphi}(k) dk. \quad (15.2)$$

さらに $(P_j + A_j + A_j^*)^2$ を展開すると

$$(P_j + A_j + A_j^*)^2 = P_j^2 + 2P_j A_j + 2A_j^* P_j + A_j^2 + 2A_j^* A_j + A_j^{*2} + [P_j, A_j^*] + [A_j, P_j] + [A_j, A_j^*].$$

ここに現れた交換子を計算すると

$$[P_j, A_j^*] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int a^*(k) e^{-ikx_j} k^2 \beta(k) \hat{\varphi}(-k) dk,$$

$$[A_j, P_j] = -\frac{1}{\sqrt{2}} \int a(k) e^{ikx_j} k^2 \beta(k) \hat{\varphi}(-k) dk,$$

$$[A_j, A_j^*] = \frac{1}{2} \int |k|^2 \beta^2(k) \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk$$

となる。次に

$$\begin{aligned} e^{-i\pi} \left(\sum_{j=1}^N \phi(x_j) \right) e^{i\pi} &= \sum_{j=1}^N \phi(x_j) + \sum_{i,j}^N [\phi(x_i), \pi(x_j)] \\ &= \sum_{j=1}^N \phi(x_j) - \sum_{i,j}^N \int e^{ik(x_j - x_i)} \frac{\beta(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk. \end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned} e^{-i\pi} H_f e^{i\pi} &= H_f + [H_f, i\pi] + \frac{1}{2} [[H_f, i\pi], i\pi] \\ &= H_f - \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}} \int (a^*(k) e^{-ikx_j} \omega(k) \beta(k) \hat{\varphi}(-k) + a(k) e^{ikx_j} \omega(k) \beta(k) \hat{\varphi}(k)) dk \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N \int \omega(k) \beta^2(k) e^{ik(x_j - x_i)} \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk. \end{aligned}$$

⁴⁷ ここでは [Nel64a] にならって β をこのように定義する.

$$H_G = e^{-i\pi} H e^{i\pi}$$

と定めて, 全て合わせると

$$H_G = P_j^2 + 2P_j A_j + 2A_j^* P_j + A_j^2 + 2A_j^* A_j + A_j^{*2} + \sum_j \phi(x_j) + H_f - \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}} \int (a^*(k) e^{-ikx_j} \hat{\varphi}(-k) + a(k) e^{ikx_j} \hat{\varphi}(k)) \omega(k) \beta(k) dk \quad (15.3)$$

$$- \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_j \int (a^*(k) e^{-ikx_j} k^2 \beta(k) \hat{\varphi}(-k) + a(k) e^{ikx_j} k^2 \beta(k) \hat{\varphi}(k)) dk \quad (15.4)$$

$$- \sum_{i,j}^N \int e^{ik(x_i - x_j)} \frac{\beta(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk \quad (15.5)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N \int e^{ik(x_i - x_j)} \omega(k) \beta^2(k) \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk \quad (15.6)$$

$$+ \frac{1}{4} N \int |k|^2 \beta^2(k) \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk \quad (15.7)$$

となる. β の定義より (15.3) + (15.4) + $\sum_j \phi(x_j) = 0$ がわかる. また (15.5) - (15.7) の対角成分を足し合わせると

$$\begin{aligned} & -N \int \frac{\beta(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk + \frac{N}{2} \int \omega(k) \beta^2(k) \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk + \frac{N}{4} \int |k|^2 \beta^2(k) \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk \\ & = -\frac{1}{2} N \int \frac{\beta(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk. \end{aligned}$$

よって

$$H_G = P_j^2 + 2P_j A_j + 2A_j^* P_j + A_j^2 + 2A_j^* A_j + A_j^{*2} + H_f \quad (15.8)$$

$$- \sum_{i \neq j} \int e^{ik(x_i - x_j)} \left(\frac{\beta(k)}{\sqrt{\omega(k)}} + \omega(k) \beta^2(k) \right) \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk \quad (15.9)$$

$$- \frac{1}{2} N \int \frac{\beta(k)}{\sqrt{\omega(k)}} \hat{\varphi}(-k) \hat{\varphi}(k) dk \quad (15.10)$$

をえる. (15.8) は 2 次形式の項, (15.9) は実行ポテンシャル項, そして (15.10) はくりこまれる項である. [Nel64a] では, $\hat{\varphi}(k) = \mathbb{1}_{\kappa < |k| < \Lambda}$ として, $\Lambda \rightarrow \infty$ の極限で, この右辺から (15.10) を引き去ったものが 2 次形式の意味で, 一様に収束すること, および $e^{i\pi}$ が $\Lambda \rightarrow \infty$ でユニタリー作用素に強収束することを示している.

15.2 実行質量

Gross 変換した Hamiltonian H_G の実行質量⁴⁸を求めてみよう. 粒子数を 1 とし, その裸の質量を m , 場と粒子の結合定数を $g \in \mathbb{R}$ とおく. $V = 0$ なので H_G は並行移動不変となり,

$$H_G = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_G(P) dP$$

となる. ここで $H_G(P)$ は Fock 空間上の自己共役作用素で, 次で与えられる:

$$H_G(P) = \frac{1}{2m}(P - P_f)^2 + H_f + \frac{g}{m}((P - P_f)A + A^*(P - P_f)) + \frac{g^2}{2} \frac{1}{m}(A^2 + 2A^*A + A^*A^*).$$

$H_G(P)$ の基底状態エネルギー $E(P)$ を

$$E(P) = E(0) + \frac{1}{2m_{\text{eff}}}|P|^2 + O(|P|^3)$$

と展開して $|P|^2$ の係数の逆数を実行質量 m_{eff} と定義する. これを形式的に結合定数 g で展開しよう. $H_G(P)\Phi(P) = E(P)\Phi(P)$ の両辺を形式的に $P = 0 \in \mathbb{R}^3$ で 2 回微分して, 公式

$$\frac{m}{m_{\text{eff}}} = 1 - \frac{2}{3m} \frac{((P_f - g(A + A^*))\Phi(0), (H_G(0) - E(0))^{-1}(P_f - g(A + A^*))\Phi(0))}{(\Phi(0), \Phi(0))}$$

をえる. 摂動理論から g が十分小さければ

$$\frac{m_{\text{eff}}}{m} = 1 + \frac{2}{3m}g^2(P_f A^* \Omega, \frac{1}{H_0} P_f A^* \Omega) + O(|g|^3)$$

となる. ここで $H_0 = \frac{1}{2m}P_f^2 + H_f$ である. よって

$$m_{\text{eff}} = m + g^2 \frac{2}{3} \int \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{2\omega(k)} \frac{|k|^2}{(|k|^2/2m + \omega(k))^3} dk + O(|g|^3)$$

となり, 紫外切断を外すとき, m_{eff} の g^2 の係数が収束することがわかる.

15.3 弱極限

紫外切断を $\hat{\varphi} = \mathbb{1}_{\kappa \leq |k| \leq \Lambda}$ として Nelson 模型 H を定義し, その Gross 変換は

$$H_G = H_p + H_f + \frac{1}{m}(p \cdot A_\Lambda + A_\Lambda^* \cdot p) + \frac{1}{2m}(A_\Lambda^2 + A_\Lambda^{*2} + 2A_\Lambda^* \cdot A_\Lambda) - g^2 \int_{\kappa \leq |k| \leq \Lambda} \frac{\beta(k)}{2\sqrt{\omega(k)}} dk$$

⁴⁸effective mass

だった. ここで

$$A_\Lambda = -g \int_{\kappa \leq |k| \leq \Lambda} \frac{k}{\sqrt{2\omega(k)}} \beta(k) a(k) e^{ikx} dk.$$

もちろん $\kappa > 0$ のときは H_G と H は同型であるが, $\kappa = 0$ のときは同型にならない. Nelson は $\kappa \geq 0$ のとき

$$E_\Lambda^{\text{ren}} = -g^2 \int_{\kappa \leq |k| \leq \Lambda} \frac{1}{2\omega(k)} \beta(k) dk$$

として

$$\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} (H_G - E_\Lambda^{\text{ren}}) = H_\infty$$

をノルムレゾルベントの意味で示した. その極限は, 形式的に

$$H_\infty = H_p + H_f + \frac{1}{m}(p \cdot A_\infty + A_\infty^* \cdot p) + \frac{1}{2m}(A_\infty^2 + A_\infty^{*2} + 2A_\infty^* A_\infty) \quad (15.11)$$

となる. 大事なことはこの右辺が 2 次形式の意味で定義されていることである. ここで

$$A_\infty = -g \int_{|k| \geq \kappa} k \frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}} \beta(k) a(k) e^{ikx} dk.$$

この H_∞ の基底状態の存在を示したい. $E_\Lambda = \inf \sigma(H_\Lambda)$ とする. $\Psi_g = \Psi_g(\Lambda)$ を H_Λ の規格化された基底状態とする. 基底状態 $\Psi_g(\Lambda)$ の部分列 Λ' をとれば $\Psi_g(\Lambda')$ の弱極限が存在する.

命題 15.1 $w - \lim_{\Lambda' \rightarrow \infty} \Psi_g(\Lambda') = \Psi_g$ が零ベクトルでないとする. このとき Ψ_g は H_∞ の基底状態.

証明: $\bar{H}_\Lambda = H_\Lambda - E_\Lambda$. $F \in \mathcal{H}$ とする. Λ' を改めて Λ とおく. このとき $z \in \mathbb{C}$ は $\Im z \neq 0$ とすれば

$$\begin{aligned} -\frac{1}{z}(F, \Psi_g) &= -\frac{1}{z} \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} (F, \Psi_g(\Lambda)) = \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} (F, (\bar{H}_\Lambda - z)^{-1} \Psi_g(\Lambda)) \\ &= \lim_{\Lambda \rightarrow \infty} ((\bar{H}_\Lambda - \bar{z})^{-1} F, \Psi_g(\Lambda)) = ((\bar{H}_\infty - \bar{z})^{-1} F, \Psi_g) = (F, (\bar{H}_\infty - z)^{-1} \Psi_g) \end{aligned}$$

となるので, $(\bar{H}_\infty - z)^{-1} \Psi_g = -\frac{1}{z} \Psi_g$ となるから, $\bar{H}_\infty \Psi_g = 0$ となり Ψ_g は H_∞ の基底状態である. \square

これから弱極限 Ψ_g が零ベクトルでないことを証明する.

$$h(k) = \frac{1}{m} k \beta(k) e^{-ikx} \frac{\hat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega(k)}}. \quad (15.12)$$

とする. Pull-through 公式から

$$a(k)H_\Lambda\Psi_g = -gh(k) \cdot (p + A_\Lambda + A_\Lambda^*)\Psi_g + \omega(k)a(k)\Psi_g + H_\Lambda a(k)\Psi_g.$$

よって

$$(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))a(k)\Psi_g = gh(k) \cdot (p + A_\Lambda + A_\Lambda^*)a(k)\Psi_g.$$

その結果

$$\begin{aligned} (\Psi_g, N\Psi_g) &= \int \|a(k)\Psi_g\|^2 dk \\ &= g^2 \int |h(k)|^2 \|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1}(p + A + A^*)\Psi_g\|^2 dk. \end{aligned} \quad (15.13)$$

$(\Psi_g, N\Psi_g)$ を赤外領域 $\int_{|k|<1} \|a(k)\Psi_g\|^2 dk$ と紫外領域 $\int_{|k|\geq 1} \|a(k)\Psi_g\|^2 dk$ にわけて評価する.
 $H_0 = H_p + H_f$ とする.

15.4 紫外領域

補題 15.2 次の評価が成り立つ.

- (1) $\|(H_0 + \mathbb{1})^{-1/2}a(f)\Psi\| \leq \|f/\sqrt{\omega}\|(\|\Psi\| + \|N^{1/2}\Psi\|),$
- (2) $\|(H_0 + \mathbb{1})^{-1/2}a^*(f)\| \leq \|f/\sqrt{\omega}\|,$
- (3) $\|(H_0 + \mathbb{1})^{-1/2}a^*(f)a^*(g)(N + \mathbb{1})^{-1/2}\| \leq \|f/\sqrt{\omega}\|\|g/\sqrt{\omega}\|,$
- (4) $\|(N + \mathbb{1})^{-1/2}a(f)a(g)(H_0 + \mathbb{1})^{-1/2}\| \leq \|f/\sqrt{\omega}\|\|g/\sqrt{\omega}\|,$
- (5) $\|(H_0 + \mathbb{1})^{-1/2}a^*(f)a(g)(H_0 + \mathbb{1})^{-1/2}\| \leq \|f/\sqrt{\omega}\|\|g/\sqrt{\omega}\|.$

証明: 簡単な演習問題である. □

補題 15.3 ある Λ_0 が存在して全ての $\Lambda > \Lambda_0$ に対して,

$$\|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1/2}(H_0 + \mathbb{1})^{1/2}\| \leq \frac{1}{\sqrt{\omega(k)}}(C_0 + |E_\Lambda| + 2\omega(k) + 1)^{1/2} \quad (15.14)$$

がなりたつ. ここで C_0 は正の定数.

証明: ある Λ_0 と $C_0 > 0$ (Λ に依ってない) が存在して全ての $\Lambda > \Lambda_0$ に対して, 2 次形式の意味で $H_0 \leq H_\Lambda + C_0$. よって

$$\|(H_\Lambda + C_0)^{-1/2}(H_0 + \mathbb{1})^{1/2}\| \leq 1. \quad (15.15)$$

さらに 2 次形式の意味で

$$H_\Lambda + C_0 \leq (H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k)) + C_0 + |E_\Lambda| + \omega(k).$$

よって

$$(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1/2}(H_\Lambda + C_0)^{1/2} \leq \frac{1}{\sqrt{\omega(k)}}(C_0 + |E_\Lambda| + 2\omega(k) + 1)^{1/2} \quad (15.16)$$

となる. (15.15) と (15.16) から (15.14) が従う. \square

補題 15.4 Λ に依らない定数 $c_1 > 0$ で, 次を満たすものが存在する.

$$\sup_{|k| \geq 1} \|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1/2}(p_\mu + A_\mu + A_\mu^*)\Psi_g\| \leq c_1 \|\Psi_g\| + \|\beta\| \|N^{1/2}\Psi_g\|.$$

証明: はじめに

$$\begin{aligned} & \sup_{|k| \geq 1} \|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1/2}p_\mu \Psi_g\| \\ & \leq \sup_{|k| \geq 1} \|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1/2}(H_0 + \mathbb{1})^{1/2}(H_0 + \mathbb{1})^{-1/2}p_\mu \Psi_g\| \leq ab \|\Psi_g\|. \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} a &= \sup_{|k| \geq 1} \|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1/2}(H_0 + \mathbb{1})^{1/2}\| \leq \sup_{|k| \geq 1} \frac{1}{\sqrt{\omega(k)}}(C_0 + |E_\Lambda| + 2\omega(k) + 1)^{1/2}, \\ b &= \|(H_0 + \mathbb{1})^{-1/2}p_\mu\|. \end{aligned}$$

次に

$$\begin{aligned} & \sup_{|k| \geq 1} \|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1/2}A_\mu \Psi_g\| \\ &= \sup_{|k| \geq 1} \|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1/2}(H_0 + \mathbb{1})^{1/2}(H_0 + \mathbb{1})^{-1/2}A_\mu \Psi_g\| \\ & \leq a \|(H_0 + \mathbb{1})^{-1/2}A_\mu \Psi_g\|. \end{aligned}$$

補題 15.2 から

$$\|(H_0 + \mathbb{1})^{-1/2} A_\mu \Psi_g\| \leq \|\beta\|(\|N^{1/2} \Psi_g\| + \|\Psi_g\|) \quad (15.17)$$

なので

$$\sup_{|k| \geq 1} \|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1/2} A_\mu \Psi_g\| \leq a \|\hat{\varphi}/\omega\|(\|N^{1/2} \Psi_g\| + \|\Psi_g\|)$$

となる. 同様に補題 15.2 から

$$\sup_{|k| \geq 1} \|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1/2} A_\mu^* \Psi_g\| \leq a \|\beta\| \|\Psi_g\|.$$

よって

$$\sup_{|k| \geq 1} \|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1/2} (p_\mu + A_\mu + A_\mu^*) \Psi_g\| \leq (2a + b) \|\beta\| \|\Psi_g\| + a \|\beta\| \|N^{1/2} \Psi_g\|.$$

これで証明終わり. □

補題 15.5 次の不等式が成立する.

$$\int_{|k| \geq 1} \|a(k) \Psi_g\|^2 dk \leq g^2 \int_{|k| \geq 1} \frac{|h(k)|^2}{\omega(k)} dk (2c_1^2 \|\Psi_g\|^2 + 2\|\beta\|^2 \|N^{1/2} \Psi_g\|^2)$$

証明: これは (15.13) と補題 15.4 から従う. □

15.5 赤外領域

赤外領域の評価はやさしくない. そこで, 基本的なアイデアを述べるにとどめる.

補題 15.6 ある定数 c_2 (Λ に依ってない) が存在して

$$\int_{|k| < 1} \|a(k) \Psi_g\|^2 dk \leq |g|^2 c_2 \|x\| \|\Psi_g\|^2. \quad (15.18)$$

証明: はじめに

$$[H_\Lambda, e^{-ikx} x] = [H_\Lambda, e^{-ikx}] x + e^{-ikx} [H_\Lambda, x].$$

簡単な計算で

$$\begin{aligned} i[H_\Lambda, x] &= \frac{1}{m}(p + A_\Lambda + A_\Lambda^*), \\ [H_\Lambda, e^{-ikx}] &= -\frac{1}{m}(p + A_\Lambda + A_\Lambda^*) \cdot k e^{-ikx} + \frac{1}{2m} |k|^2 e^{-ikx} \end{aligned}$$

がわかる. よって

$$\begin{aligned} h(k) \cdot (p + A_\Lambda + A_\Lambda^*) \Psi_g &= -ime^{ikx} h(k) \cdot [H_\Lambda, e^{-ikx}] \Psi_g + ime^{-ikx} h(k) \cdot [H_\Lambda, e^{-ikx}] x \Psi_g \\ &= -i(H_\Lambda - E_\Lambda) h(k) \cdot x \Psi_g - i(p + A_\Lambda + A_\Lambda^*) \cdot kh(k) \cdot x \Psi_g + i\frac{1}{2}|k|^2 h(k) \cdot x \Psi_g. \end{aligned}$$

Pull-through 公式から

$$\int_{|k|<1} \|a(k) \Psi_g\|^2 dk \leq a + b + c.$$

ここで

$$\begin{aligned} a &= g^2 \int_{|k|<1} \|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1} (H_\Lambda - E_\Lambda) h(k) \cdot x \Psi_g\|^2 dk, \\ b &= g^2 \frac{1}{4} \int_{|k|<1} \|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1} |k|^2 h(k) \cdot x \Psi_g\|^2 dk, \\ c &= g^2 \int_{|k|<1} \|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1} (p + A_\Lambda + A_\Lambda^*) \cdot kh(k) \cdot x \Psi_g\|^2 dk. \end{aligned}$$

まず

$$a \leq g^2 \int_{|k|<1} |h(k)|^2 dk \|x \Psi_g\|^2, \quad (15.19)$$

$$b \leq g^2 \frac{1}{4} \int_{|k|<1} \left| \frac{|k|^2 |h(k)|}{\omega(k)} \right|^2 dk \|x \Psi_g\|^2. \quad (15.20)$$

さらに

$$\|(H_0 + \mathbb{1})^{-1/2} (p + A + A^*)\| \leq b + 2\|\beta\| + \||k|\beta/\sqrt{\omega}\|,$$

そして, 補題 15.14 から

$$\|(H_\Lambda - E_\Lambda + \omega(k))^{-1} (H_0 + \mathbb{1})^{1/2}\| \leq \frac{1}{\omega(k)} (C_0 + E_\Lambda + 2\omega(k) + 1)^{1/2}.$$

よって

$$(3) \leq g^2 (b + \|\hat{\varphi}/\omega\| + \||k|\beta/\sqrt{\omega}\|) (3 + C_0 + E_\Lambda)^{1/2} \int_{|k|<1} \left| \frac{kh(k)}{\omega(k)} \right|^2 \|x \Psi_g\|^2 dk. \quad (15.21)$$

(15.19)-(15.21) を合わせると, 結果を得る. \square

$(\Psi_g, N\Psi_g)$ を評価するとき, もし, $\kappa > 0$ であれば, 紫外領域だけの評価で十分である. 実際

$$(\Psi_g, N\Psi_g) = \int_{|k|\geq\kappa} \|a(k) \Psi_g\|^2 dk$$

となるからである。さて、基底状態の存在証明で最もハードな部分は $\kappa = 0$ の場合で、それは次の補題である。 $\kappa = 0$ の場合、 $\int_{|k| \leq 1} \|a(k)\Psi_g\|^2 dk$ を評価したいのだが、上で見たように $\|x|\Psi_g\|$ を Λ に一様に上から評価しなくてはならない。以前の章で見たように

$$\|x|\Psi_g\| \leq \|x|e^{-|x|}\|_\infty \|e^{+|x|}\Psi_g\| \leq Ce^{\|\hat{\varphi}/\omega\|^2 c} \|\Psi_g\|$$

の評価があったが、 C は $\|\hat{\varphi}/\omega\|$ に依っていて、 $\|\hat{\varphi}/\omega\| \rightarrow \infty (\Lambda \rightarrow \infty)$ と発散するので、この評価では不十分である。しかし、[HHS05] では赤外領域の評価がされている。

15.6 赤外正則条件下での基底状態の存在

$\kappa > 0$ とする。

補題 15.7 ある定数 c_4 (Λ に依らない) があって次の不等式が成立する。

$$\|N^{1/2}\Psi_g\| \leq |g|^2 c_4 \|\Psi_g\|^2.$$

証明: これは補題 15.5 から従う。 □

補題 15.8 $0 \leq \Lambda \leq \infty$ に対して $E_\Lambda \leq E_p$ が成立する。

証明: φ_p を H_p の正規化された基底状態とすれば $(\varphi_p \otimes \mathbb{1}, H_\Lambda f \varphi_p \otimes \mathbb{1}) = E_p$. よって補題が従う。 □

P_p を H_p の基底状態の張る一次元空間への射影作用素、 P_0 を Fock 真空への射影作用素とする。 $P = P_p \otimes P_0$ and $Q = P_p^\perp \otimes P_0$ とおく。このとき

$$P + Q = \mathbb{1} + P_0$$

になる。

補題 15.9 ある定数 c_5 (Λ に依らない) が存在して、次が成り立つ。

$$(\Psi_g, Q\Psi_g) \leq |g| \frac{D_3}{(\Sigma_p - E_p)} \|\Psi_g\|^2. \quad (15.22)$$

証明: 補題 15.8 から $\Sigma_p - E_\infty \geq \Sigma_p - E_p > 0$ が従う. そうすると

$$(\Sigma_p - E_p)(\Psi_g, Q\Psi_g) \leq (\Sigma_p - E_\Lambda)(\Psi_g, Q\Psi_g) \leq (Q\Psi_g, (H_0 - E_\Lambda)\Psi_g) = -(Q\Psi_g, H_I\Psi_g).$$

右辺を評価する. 閉グラフ定理からある定数 C_p が存在して

$$\| -\Delta f \| \leq C_p(\|H_p f\| + \|f\|)$$

となる. 補題 15.2 によって

$$\begin{aligned} |(Q\Psi_g, A^\# \cdot A^\# \Psi_g)| &\leq \|(H_0 + \mathbb{1})^{1/2} Q\Psi_g\| \|(N + \mathbb{1})^{1/2} \Psi_g\| \|\hat{\varphi}/\omega\|^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \|\hat{\varphi}/\omega\|^2 \{ (E_p + 2) \|\Psi_g\|^2 + \|N^{1/2} \Psi_g\|^2 \}. \end{aligned}$$

ここで $[(H_0 + \mathbb{1})^{1/2}, Q] = 0$ をつかった. 同様に

$$|(Q\Psi_g, A^* A\Psi_g)| \leq \|(H_0 + \mathbb{1})^{1/2} \Psi_g\|^2 \leq (E_p + 1) \|\Psi_g\|^2.$$

さらに

$$\begin{aligned} |(p\Psi_g, A\Psi_g)| &\leq \|p\Psi_g\| \|(H_0 + \mathbb{1})^{1/2} \Psi_g\| \|\hat{\varphi}/\omega\| \\ &\leq \frac{1}{2} \|\hat{\varphi}/\omega\| \{ \|p\Psi_g\|^2 + \|(H_0 + \mathbb{1})^{1/2} \Psi_g\|^2 \} \\ &\leq \frac{1}{2} \|\hat{\varphi}/\omega\| (C_p + 1) (\Psi_g, (H_0 + \mathbb{1})\Psi_g) \\ &\leq \frac{1}{2} \|\hat{\varphi}/\omega\| (C_p + 1) (E_p + C_0 + 1) \|\Psi_g\|^2. \end{aligned}$$

よって証明終了. □

定理 15.10 (基底状態の存在) $\kappa > 0$ とする. $|g|^2 c_4 + |g| c_5 (\Sigma_p - E_p)^{-1} < 1$ と仮定する. このとき H_∞ の基底状態が存在する.

証明: $P \geq \mathbb{1} - Q - (\mathbb{1} \otimes N)$ なので

$$(\Psi_g(\Lambda'), P\Psi_g(\Lambda')) \geq 1 - |g|^2 c_4 - c_5 (\Sigma_p - E_p)^{-1} > 0.$$

P は有限階数作用素なので $P\Psi_g(\Lambda')$ は $P\Psi_g$ に強収束する. よって

$$\|P\Psi_g\| \geq 1 - |g|^2 c_4 - c_5 (\Sigma_p - E_p)^{-1} > 0$$

から $\Psi_g \neq 0$ となり, H_∞ の基底状態が存在する. □

15.7 参考文献など

UV くりこみがされた Nelson 模型の基底状態の存在は [HHS05] にある. ここでは, 2 体の Nelson 模型で赤外発散しているものを考え, 一つの粒子の質量が重くて, 止まっているという条件下で基底状態の存在が考察された. さらに, [HHS05] では赤外発散が起きている場合, つまり $\kappa = 0$ の場合も考察している. この場合は非 Fock 表現に移って Nelson 模型を再定義して, 基底状態の存在が調べられている.

16 Enhanced binding

16.1 概略

有限自由度系の Schrödinger 作用素に摂動を加えたとき, そのスペクトルが劇的に変化することは稀ではない. 例えば 3 次元ラプラス作用素 $-(1/2)\Delta$ に摂動を加えることを考えてみる. もちろん $-(1/2)\Delta$ は固有値を持たずそのスペクトルは $\sigma(-(1/2)\Delta) = [0, \infty)$ である. これにクーロンポテンシャル $-1/|x|$ を加えれば $-(1/2)\Delta - 1/|x|$ のスペクトルは

$$\sigma\left(-\frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{|x|}\right) = \left\{-\frac{1}{2n^2}\right\}_{n=1}^{\infty} \cup [0, \infty)$$

のようになり, ゼロに集積する固有値 $\{-\frac{1}{2n^2}\}_{n=1}^{\infty}$ が無限個現れる (図 9).

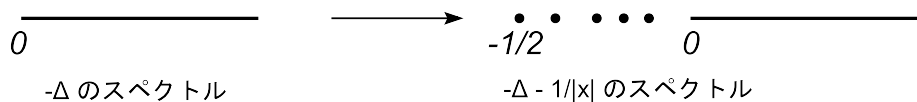


図 9: スペクトルの変化 1

これはクーロンポテンシャルに任意の正の係数 ϵ をつけて $-\epsilon/|x|$ という摂動を加えても, 同様に無限個の離散固有値が現れる. 一方, $(1/2)|x|^2$ の摂動を加えればスペクトルは劇的に変化して

$$\sigma\left(-\frac{1}{2}\Delta + \frac{1}{2}|x|^2\right) = \left\{n + \frac{1}{2}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

となり, もはや連続スペクトルは消えてしまい純粋離散スペクトルになってしまう (図 10).

つまり純粋連続スペクトルが摂動により離散スペクトルを含む形になることはよく起こることである. ここで話を場の量子論にうつそう. 場の量子論の模型では, 上述の Schrödinger 作用素のように摂動を加えて離散スペクトルがポツポツと現れる現象を見つけることは容易

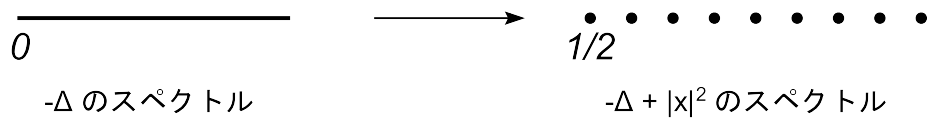


図 10: スペクトルの変化 2

ではない. 我々が考察する質量ゼロのスカラー場のモデルでは多くの場合 Hamiltonian H のスペクトルは $\sigma(H) = [E, \infty)$ となり E は離散スペクトルに属さない.

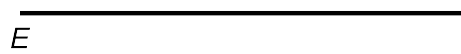


図 11: 質量ゼロの場の量子論のモデルのスペクトル

Enhanced binding とは粒子系が量子場と結合することにより相互作用系に基底状態が現れることをいう. スペクトルでいえば結合定数が大きくなれば $\inf\sigma(H)$ が固有値になることをいう. 現在までに様々な重要なモデルで enhanced binding の存在が示されている. 特にミニマル結合の場合粒子の個数は 1 つでも enhanced binding が起きる (図 12).

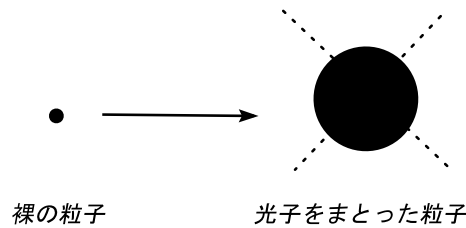


図 12: ミニマル結合のモデル

一方, 我々が考察するスカラー場のモデルの相互作用は線形なものであるから, あからさまに有効質量は現れない. しかし結合定数が十分大きくなれば有効ポテンシャル (引力) を仲立ちにして N 個の粒子が集まり巨大な質量をもった 1 粒子に見える (図 13). そしてこの相互作用系は基底状態をもつことになる. ミニマル結合と異なり, この場合, 原理的には 2 粒子以上でなければ enhanced binding を示すことが出来ない.

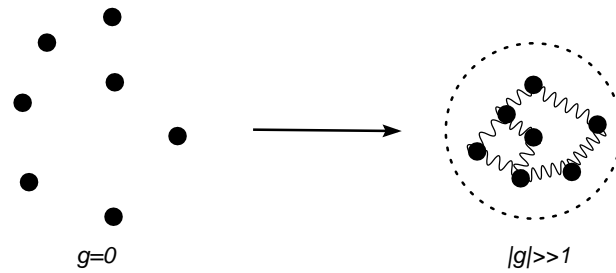


図 13: 相互作用により巨大な 1 粒子が出来る

16.2 基底状態の Enhanced binding による存在

$L^2(\mathbb{R}^{dN})$ 上に Schrödinger 作用素

$$H_p = \sum_{j=1}^N \left(-\frac{1}{2m} \Delta_j + V(x_j) \right)$$

を定義する. 簡単のために N 個の粒子の質量は全て m とし, j 番目の粒子の外場ポテンシャルは j に依らず全て V で与えられるとする. さらに 2 粒子間に働くポテンシャルはないと仮定する. つまり独立な N 個の粒子が外場ポテンシャル V でそれぞれ束縛されているわけである. V の条件を導入する.

条件 16.1 (1) V は有界. (2) $\exists N_c > 0$ st $\forall N > N_c$ に対して $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上の Schrödinger 作用素 $-(1/2m)\Delta + N^2V$ のスペクトルの下限は離散スペクトルに含まれる.

例えば 3 次元の Lieb-Thirring 不等式

$$\#\{-(1/2m)\Delta + V \text{ の } 0 \text{ 以下の固有値の個数}\} \leq a \int_{\mathbb{R}^d} |mV_-(x)|^{3/2} dx$$

から V が負で十分に薄ければ $-(1/2m)\Delta + V$ の基底状態は存在しない. しかし, さらに V が連続で $\lim_{|x| \rightarrow \infty} V(x) = 0$ であれば, V はラプラス作用素に相対コンパクトになるから, 摂動 N^2V は $-(1/2m)\Delta$ の本質的スペクトルを不変にし $-(1/2m)\Delta + N^2V$ の本質的スペクトルの下限はゼロのままである. ゆえに N を十分に大きくとれば $-(1/2m)\Delta + N^2V$ は基底状態を持つことになる. 条件 16.1(2) はこのような状況を心の中で描いている.

粒子の Hamiltonian H_p のスペクトルの下限が離散スペクトルに属するとする. このとき, $I_{\mathbb{R}} < \infty$ であれば任意の $g \in \mathbb{R}$ に対して H の基底状態が存在する. 歴史的には十分小さな $|g|$ に対して基底状態の存在が示され, その後, 任意結合定数へ拡張された. もちろん $|g|$ が小

さすれば基底状態の存在証明は技術的には容易である。これらの結果は H_p の基底状態の存在を仮定しているのだから、結果的に「基底状態は消えない！」ということを示したともいえる。さて我々の enhanced binding であるが H_p の基底状態の存在を仮定していないのであるから、標語的には「基底状態が現れる！」という現象を示していることになる。

$\kappa > 0$ をスケーリングパラメーターとして

$$H(\kappa) = H_p + \kappa H_I + \kappa^2 H_f$$

とおこう。このとき強レゾルベントの意味で

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} (H(\kappa) + z)^{-1} = (H_{\text{eff}} + z)^{-1} \otimes P_\Omega \quad (16.1)$$

となることを示した。ここで P_0 はフォック真空の張る 1 次元部分空間への射影作用素である。さらに

$$H_{\text{eff}} = \sum_{j=1}^M -\frac{1}{2m} \Delta_j + g^2 \sum_{i \neq j} W_{ij} + \sum_{j=1}^N V(x_j) - \frac{g^2}{4} N \|\hat{\phi}/\omega\|^2$$

であり、

$$W_{ij} = W(x_i - x_j) = -\frac{1}{4} \int \frac{e^{-ik(x_i - x_j)} |\hat{\phi}(k)|^2}{\omega(k)^2} dk \quad (16.2)$$

は smeared クーロンポテンシャルであり $|x_i - x_j|$ が十分小さいとき負となるから引力として働く。つまり、 $|g|$ が十分大きければ H_{eff} は基底状態を持つことになる。この章の目標は「 κ が十分大きいときに $|g|$ を大きくとれば $H(\kappa)$ に基底状態が現れる」という主張を示すことにある。

定理 16.2 (Enhanced binding) 十分大きい $\kappa > 0$ と、 $N > N_c$ に対して $\exists \alpha_c, \exists \alpha_c(\kappa) > 0$ で次を満たすものが存在する。 $\alpha_c < |g| < \alpha_c(\kappa)$ ならば $H(\kappa)$ の基底状態が一意的に存在する。

スケーリングパラメーター κ に関して注意を与える。

$$H(\kappa) = \kappa^2 \left\{ \frac{1}{\kappa^2} \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{2m} \Delta_j + V(x_j) \right) \otimes \mathbb{1} + \frac{1}{\kappa} g \sum_{j=1}^N \phi(x_j) + \mathbb{1} \otimes H_f \right\}$$

であるから $\bar{m} = m\kappa^2$, $\bar{V} = V/\kappa^2$, $\bar{\phi}(x) = \phi(x)/\kappa$ と其々定義すれば

$$\bar{H} = \sum_{j=1}^N \left(\frac{1}{2\bar{m}} \Delta_j + \bar{V}(x_j) \right) \otimes \mathbb{1} + g \sum_{j=1}^N \bar{\phi}(x_j) + \mathbb{1} \otimes H_f$$

は $\alpha_c < |g| < \alpha_c(\kappa)$ で基底状態を持つことになる. よって κ はダミーであり本質的なものではない.

一意性は既に証明されているので, 存在についてその証明の概略を述べる. 方針は κ を十分大きくとり, 双極 不等式, 変分原理, [GLL01] の binding 条件を用いることにより場の量子論の問題を Schrödinger 作用素の問題へ還元することにある.

はじめに Bogoliubov 変換

$$T = \exp \left(\sum_{j=1}^N \frac{g}{\sqrt{2}\kappa} (a^*(e^{-ikx_j} \hat{\varphi}/\omega^{3/2}) - a(e^{ikx_j} \hat{\varphi}/\omega^{3/2})) \right),$$

で $H(\kappa)$ を

$$T^{-1}H(\kappa)T = \sum_{j=1}^N T_j + \kappa^2 \mathbb{1} \otimes H_f + \left(\sum_{j=1}^N V(x_j) + g^2 \sum_{i \neq j} W_{ij} - \frac{g^2}{4} N \|\hat{\varphi}/\omega\|^2 \right) \otimes \mathbb{1} \quad (16.3)$$

のようにユニタリー変換する. ここで

$$T_j = \frac{1}{2m} \left(-i\nabla_j \otimes \mathbb{1} - \frac{g}{\kappa^2} \phi(x_j) \right)^2, \quad (16.4)$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} (a^*(k\hat{\varphi}e^{-ikx}/\omega^{3/2}) + a(k\hat{\varphi}e^{+ikx}/\omega^{3/2})) \quad (16.5)$$

である. (16.3) の右辺から分かるように, $\kappa \rightarrow \infty$ のとき $g/\kappa^2 \rightarrow 0$ なのでミニマル結合の部分が消滅し形式的に (16.1) となるのが分かるだろう. また結合定数 g^2 をもった粒子間ポテンシャル $g^2 \sum_{i \neq j} W_{ij}$ が現れているので直感的に $|g| \gg 1$ であれば粒子が強く引かれ合うことも理解できよう. さらに Bogoliubov 変換すれば H はミニマル結合した形になるので双極 不等式が応用できる利点もある.

定数 $(g^2/4)N\|\hat{\varphi}/\omega\|^2$ は以下の議論に無関係なのでそれを除き, テンソル積 \otimes の記号も省略することにし, その Hamiltonian を改めて $H = H(\kappa)$ と書くことにする.

$$H = \sum_{j=1}^N T_j + \kappa^2 H_f + g^2 \sum_{i \neq j} W_{ij} + \sum_{j=1}^N V(x_j). \quad (16.6)$$

(16.2) の W の性質を述べる. (1) W は連続, (2) $\lim_{|x| \rightarrow \infty} W(|x|) = 0$, (3) W は 3 次元ラプラス作用素に対して相対コンパクト, (4) W は実数値で $W(0) \leq W(x)$ が成り立つ. いま $C = \{1, 2, \dots, N\}$ とし $\beta \subset C$, $\beta \neq C$, $\beta^c = C \setminus \beta$ とおく. ここで β に対して H のクラスター

を次のように定義する.

$$H^0(\beta) = \sum_{j \in \beta} T_j + \kappa^2 H_f + g^2 \sum_{i,j \in \beta} W_{ij},$$

$$H^V(\beta) = H^0(\beta) + \sum_{j \in \beta} V(x_j).$$

そして $E^V(\beta) = \inf \sigma(H^V(\beta))$ とおこう. また特に

$$\sigma(H) = E^V(C) = E$$

とおく. 最小2重クラスターエネルギー Σ を次で定義する.

$$\Sigma = \inf_{\beta \subset C, \beta \neq C} (E^V(\beta) + E^0(\beta^c)).$$

Σ は定義のごとく β に含まれる粒子が V で束縛され, 残りの β^c の粒子が束縛から離れている系の全エネルギーを表している. 粒子を電子と思い, ϕ を電磁場と思えば, 陽イオン化した後の系のエネルギーを表しているといえる (図 14). そのため物理的な直感を使えば, H の基底状態が存在するためにはイオン化せずに系が存在していればよい. つまり相互作用系のエネルギー E が Σ より小さければよいと予想される.

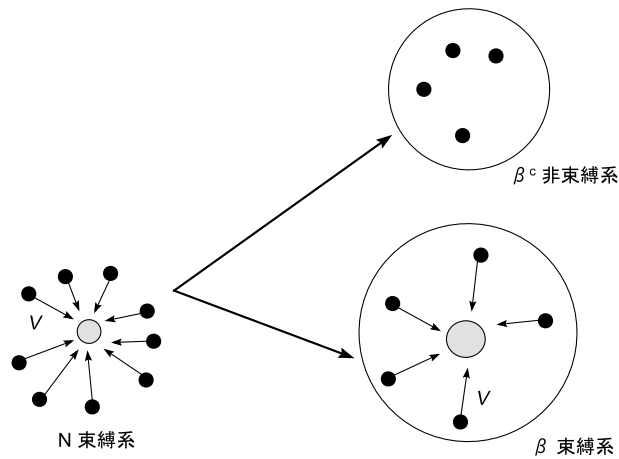


図 14: クラスター分解

実際これは厳密に証明されている.

命題 16.3 [GLL01] $\Sigma - E > 0$ ならば H の基底状態は存在する.

$\Sigma - E > 0$ は binding 条件とよばれている. 以下でこの不等式が成立することを証明する. 粒子の部分

$$h = \sum_{j=1}^N -\frac{1}{2m}\Delta_j + g^2 \sum_{i \neq j} W_{ij} + \sum_{j=1}^N V(x_j)$$

のクラスターを H と全く同様に定義する.

$$h^0(\beta) = \sum_{j \in \beta} -\frac{1}{2m}\Delta_j + g^2 \sum_{i, j \in \beta} W_{ij},$$

$$h^V(\beta) = h^0(\beta) + \sum_{j \in \beta} V(x_j),$$

$$\mathcal{E}^V(\beta) = \inf \sigma(h^V(\beta)),$$

$$\Xi = \inf_{\beta \subset C, \beta \neq C} (\mathcal{E}^V(\beta) + \mathcal{E}^0(\beta^c)).$$

さらに

$$\inf \sigma(h) = \mathcal{E}^V(C) = \mathcal{E}$$

とおく. 2つの最小2重クラスターエネルギー Σ と Ξ の大小関係は次の双極不等式から従う.

補題 16.4 (双極不等式) 次が成り立つ.

$$|(F, e^{-tH^V(\beta)}G)| \leq (|F|, e^{-t(h^V(\beta) \otimes \mathbf{1} + \kappa^2 \mathbf{1} \otimes H_f)}|G|).$$

特に

$$\Sigma \geq \Xi \tag{16.7}$$

この不等式は場と結合した方がエネルギーが上がるといっている. また変分原理

$$E \leq (f \otimes \mathbf{1}, Hf \otimes \mathbf{1}) / \|f \otimes \mathbf{1}\|^2$$

より

$$E \leq \mathcal{E} + \frac{g^2}{\kappa^2} \frac{N}{4m} \|\hat{\varphi} / \sqrt{\omega}\|^2 \tag{16.8}$$

もわかる. (16.7), (16.8) から

$$\Sigma - E \geq \Xi - \mathcal{E} - \frac{g^2}{\kappa^2} \left(\frac{N}{4m} \|\hat{\varphi} / \sqrt{\omega}\|^2 \right) \tag{16.9}$$

となり, 十分大きな $\kappa > 0$ に対して (16.9) の右辺が正になること, つまり

$$\Xi - \mathcal{E} > 0 \quad (16.10)$$

を示せば十分である. スケーリングパラメータ κ を導入することにより, 双極不等式と簡単な変分原理から場の量子論の問題が Schrödinger 作用素の問題へ還元されたことになる.

(16.9) について少し注意しておく. $\Xi - \mathcal{E}$ は g にのみ依存し κ には依存しない量である. 以下で $|g| > \exists \alpha_c > 0$ のとき (16.10) が成立することを示す. そこでこの α_c に対して (16.9) の右辺が正になるように十分大きな κ をとる. その κ に対してさらに (16.9) の右辺が正になるような $|g|$ の上限 $\alpha_c(\kappa) > \alpha_c$ が決められる. つまり $\alpha_c < |g| < \alpha_c(\kappa)$ に対して H の基底状態が存在することが分かる.

さて, ここからは Schrödinger 作用素 h の解析になる. まずはじめに, 各クラスター

$$h^V(\beta) = \sum_{j \in \beta} (-(1/2m)\Delta_j + V(x_j)) + g^2 \sum_{i, j \in \beta} W_{ij}$$

は粒子間ポテンシャルの係数が g^2 であり, $W(0) < W(x)$, であるから

$$\begin{aligned} \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}^0(C)}{g^2} &= N(N-1)W(0), \\ \lim_{g \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}^V(\beta) + \mathcal{E}^0(\beta^c)}{g^2} &= (N(N-1) + 2|\beta|(|\beta| - N))W(0) \end{aligned}$$

がわかる. ここで $|\beta| = \#\beta$ である. さらに $W(0) < 0$ なのだから

$$\mathcal{E}^V(\beta) + \mathcal{E}^0(\beta^c) > \mathcal{E}^0(C) \quad (16.11)$$

が $|g| > \exists g'$ で成立する. 故に

$$\Xi > \mathcal{E}^0(C), \quad |g| > g'. \quad (16.12)$$

これより, (16.10) を示すには

$$\mathcal{E}^0(C) - \mathcal{E} > 0 \quad (16.13)$$

を示せばいいことがわかる. h を重心系に移して

$$UhU^{-1} = -\frac{1}{2Nm}\Delta_{x_c} \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes K + \sum_{j=1}^N V(x_j).$$

ここで

$$K = \sum_{j=1}^{N-1} -\frac{1}{2\mu_j} \Delta_{y_j} + g^2 \sum_{i \neq j} W_{ij},$$

μ_j は reduced mass, $(x_1, \dots, x_N) \rightarrow (x_c, y_1, \dots, y_{N-1})$ で

$$x_c = \sum_{j=1}^N x_j/N, \quad y_j = x_{j+1} - \sum_{i=1}^j x_i/j$$

であり,

$$L^2(\mathbb{R}^{3N}) \cong L^2(\mathbb{R}^d_{x_c}) \otimes L^2(\mathbb{R}^{3(N-1)}_{y_1, \dots, y_{N-1}}) \quad (16.14)$$

と同一視した. IMS 局所化の議論からすぐに次の補題が示せる.

補題 16.5 $L^2(\mathbb{R}^{3(N-1)}_{y_1, \dots, y_{N-1}})$ 上の作用素 K は $|g| > g''$ のとき基底状態 $u_g \in L^2(\mathbb{R}^{3(N-1)}_{y_1, \dots, y_{N-1}})$ をもつ.

さらに $g^2 \rightarrow \infty$ のとき K の形から $|u_g(y_1, \dots, y_{N-1})|^2$ は原点近傍に集中してくることが分かるだろう. 実際に

$$\lim_{g^2 \rightarrow \infty} |u_g(y_1, \dots, y_{N-1})|^2 \rightarrow \delta(y_1) \cdots \delta(y_{N-1}) \quad (16.15)$$

が超関数の意味で成立することが分かる.

次に重心の方をみてみよう. 仮定より $L^2(\mathbb{R}^d_{x_c})$ 上の作用素

$$-\frac{1}{2mN} \Delta_{x_c} + NV(x_c)$$

は $N > N_c$ で基底状態をもった. それを $v \in L^2(\mathbb{R}^d_{x_c})$ とおこう. さらに

$$\Phi_g = v \otimes u_g$$

とおく. この \otimes は (16.14) の \otimes である. 変分原理, (16.15) そして極限操作より次が示せる

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\leq \lim_{g \rightarrow \infty} (\Phi_g, U_h U^{-1} \Phi_g) = \mathcal{E}^0(C) + \lim_{g \rightarrow \infty} (\Phi_g, (\frac{1}{2Nm} \Delta_{x_c} + \sum_{j=1}^N V(x_j)) \Phi_g) \\ &= \mathcal{E}^0(C) + (v, (\frac{1}{2Nm} \Delta_{x_c} + NV(x_c)) v) < \mathcal{E}^0(C). \end{aligned}$$

ここで $-\frac{1}{2mN} \Delta_{x_c} + NV$ の基底状態エネルギーが負であることを使った. よって $|g| > \exists g'''$ のとき $\mathcal{E} < \mathcal{E}^0(C)$ が示された. 以上まとめて $\alpha_c = \max\{g', g'', g'''\}$ とおけば (16.10) が示されたことになり定理 16.2 が示されたことになる.

16.3 参考文献など

Enhanced binding ははじめに Hiroshima-Spohn [HS01a] でなされた. ここで説明した Nelson 模型の enhanced binding は Hiroshima-Sasaki [HS08] による. ここでの議論では V の regularity について何もいわなかったが, 厳密に上述の概略を正当化するためには与えられた V を C_0^∞ 関数で近似した極限操作が必要である. 詳しくは [HS08, Appendix] を参照せよ. また, [HS15] では準相対論的な多体の Nelson 模型の enhanced binding が示されている. それは,

$$\sum_{j=1}^N (\sqrt{-\Delta_j + m_j^2} - m_j + V) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + \sum_{j=1}^N H_1^j \quad (16.16)$$

という形をしている. 議論は [HS08] と同じであるが, より技術的である. 他にも様々な模型で enhanced binding が示されている [AK03, CH04, CVV03, HVV03, HHS05]. しかし

$$\begin{cases} |g| < g_c \rightarrow \text{基底状態が非存在} \\ |g| > g_c \rightarrow \text{基底状態が存在} \end{cases} .$$

となるような $g_c > 0$ をみつけた例はないようである. Enhanced binding が現れない結合定数の領域の解析は [HSS11] にある.

17 多様体上の Nelson 模型

17.1 概観

時間的に不変なローレンツ 多様体上に Nelson Hamiltonian が定義できる. 粒子部分 H_p は

$$-\sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{c(x)} \partial_i A^{ij}(x) \partial_j \frac{1}{c(x)} + V$$

に置換えられ, dispersion relation は位置表示で

$$\omega = \sqrt{-\Delta} \rightarrow \left(-\sum_{i,j=1}^3 \partial_i a^{ij}(x) \partial_j + m^2(x) \right)^{1/2} \quad (17.1)$$

に置換えて定義される. 重要なことは変数質量 $m(x)$ が (17.1) に自然に現れることである. $v_m = m^2$ の減衰性の速さで基底状態の存在・非存在を特徴づけることが出来る. 実際, これ

から見るように $m(x) \geq C \langle x \rangle^{-1}$ のとき基底状態が存在し, $m(x) \leq C \langle x \rangle^{-a}$, $a > 1$, のとき基底状態は存在しないことが示せる. つまり, ゆっくり減衰すれば基底状態が存在し, 十分速く減衰すれば基底状態が存在しないことになる. その境界のオーダーが $|x|^{-1}$ である. 一般の正質量を定数関数と見なす (図 15). このとき, 定数正質量はゆっくり減衰する変数質量

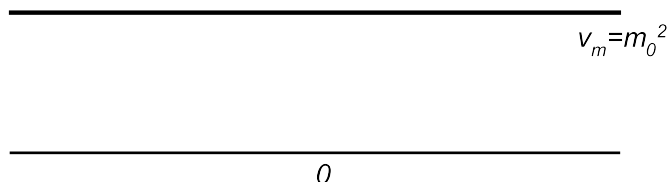


図 15: 定数正質量

(図 16) の特別な場合と見なすことができる. また, 急激に減衰する変数質量 (図 17) は図 15 で

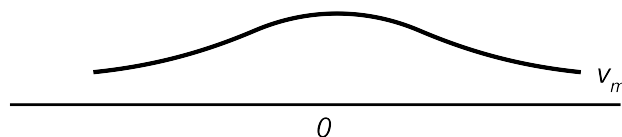


図 16: ゆっくり減衰する質量

$v_m = 0$ (massless) の特別なものと見なせる.

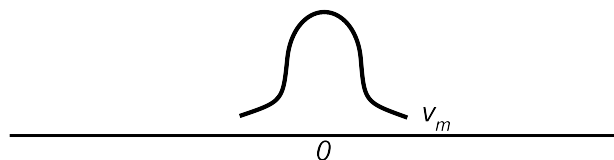


図 17: 急激に減衰する質量

17.2 ローレンツ多様体上のクライン・ゴールドン 方程式

場の量子論では分散関係 $\omega = \sqrt{-\Delta + m^2}$ はクライン・ゴールドン方程式

$$(\square + m^2)\phi(t, x) = 0 \quad (17.2)$$

から導かれる. 今まで議論してきた Nelson 模型は形式的に

$$e^{-itH}\phi(f)e^{itH} = \int_{\mathbb{R}^3} \phi(t, x)f(x)dx, \quad e^{-itH}xe^{itH} = x_t$$

として

$$\begin{aligned} (\square + m^2)\phi(t, y) &= \rho(y - x_t), \\ \partial_t^2 x_t &= -\nabla V(x_t) - \int \phi(t, y)\nabla_x \rho(y - x_t)dy \end{aligned}$$

を満たす. これをローレンツ多様体上のクライン・ゴールドン 方程式へ拡張する. $\underline{x} = (t, x) = (x^0, x) = (x^0, x^1, x^2, x^3) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ とする. $g = (g_{\mu\nu})$, $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, は \mathbb{R}^4 上の計量で次を満たす.

- (1) $g_{\mu\nu}(\underline{x}) = g_{\mu\nu}(x)$, i.e., 時間 t によらない,
- (2) $g_{0j}(\underline{x}) = g_{j0}(\underline{x}) = 0$, $j = 1, 2, 3$,
- (3) $g_{ij}(\underline{x}) = -\gamma_{ij}(x)$. ここで $\gamma = (\gamma_{ij})$ は 3次元リーマン計量.

つまり

$$g = \begin{pmatrix} g_{00} & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}. \quad (17.3)$$

$\mathcal{M} = (\mathbb{R}^4, g)$ を計量 テンソル g のローレンツ多様体とする. このとき \mathcal{M} の線素は

$$ds^2 = g_{00}(x)dt \otimes dt - \sum_{i,j=1}^3 \gamma_{ij}(x)dx^i \otimes dx^j. \quad (17.4)$$

$g^{-1} = (g^{\mu\nu})$ を g の逆とする. 特に $1/g_{00} = g^{00}$. また γ の逆を $\gamma^{-1} = (\gamma^{ij})$ で表す. そうするとローレンツ多様体 \mathcal{M} 上のクライン・ゴールドン方程式は

$$\square_g \phi + (m^2 + \eta \mathcal{R})\phi = 0 \quad (17.5)$$

となる. ここで, η は定数, \mathcal{R} は \mathcal{M} のスカラー曲率, そして \square_g は, g から決まるダランベルシアンで次で与えられる.

$$\square_g = \sum_{\mu,\nu=0}^3 \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \partial_\mu g^{\mu\nu} \sqrt{|\det g|} \partial_\nu. \quad (17.6)$$

$g_{00}(x) > 0$ と仮定する. このとき (17.5) は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = K\phi \quad (17.7)$$

と表すことが出来る. ここで

$$K = g_{00} \left(\frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{i,j=1}^3 \partial_j \sqrt{|\det g|} \gamma^{ji} \partial_i - m^2 - \eta \mathcal{R} \right). \quad (17.8)$$

作用素 K は重み付き L^2 空間 $L^2(\mathbb{R}^3, \rho(x)dx)$ 上で対称である. ここで

$$\rho = \frac{\sqrt{|\det g|}}{g_{00}} = g_{00}^{-1/2} \sqrt{|\det \gamma|}. \quad (17.9)$$

K を $L^2(\mathbb{R}^3; \rho(x)dx)$ 上の作用素から $L^2(\mathbb{R}^3; dx)$ 上の作用素へユニタリ変換しよう. ユニタリ $U : L^2(\mathbb{R}^3; \rho(x)dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3; dx)$ を

$$Uf = \rho^{1/2} f \quad (17.10)$$

で定める. $\rho_i = \partial_i \rho$, $\partial_i \partial_j \rho = \rho_{ij}$ とおく. さらに $\alpha^{ij} = g_{00} \gamma^{ij}$, $\partial_k \alpha^{ij} = \alpha_k^{ij}$.

$$U^{-1} \partial_j U = \partial_j + \frac{\rho_j}{2\rho}$$

なので,

$$U^{-1} \left(\sum_{i,j=1}^3 \partial_i g_{00} \gamma^{ij} \partial_j \right) U = g_{00} \sum_{i,j=1}^3 \gamma^{ij} \partial_i \partial_j + V_1 + V_2, \quad (17.11)$$

が作用素の等式として従う. ここで

$$V_1 = \sum_{i,j=1}^3 \left(\alpha_i^{ij} + \alpha^{ij} \frac{\rho_i}{\rho} \right) \partial_j,$$

$$V_2 = \frac{1}{4} \sum_{i,j=1}^3 \left(2\alpha_i^{ij} \frac{\rho_j}{\rho} + 2\alpha^{ij} \frac{\rho_{ij}}{\rho} - \alpha^{ij} \frac{\rho_i \rho_j}{\rho \rho} \right).$$

直接

$$g_{00} \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{i,j=1}^3 \partial_i \sqrt{|\det g|} \gamma^{ij} \partial_j = V_1 + g_{00} \sum_{i,j=1}^3 \gamma^{ij} \partial_i \partial_j \quad (17.12)$$

がわかる. (17.11) と (17.12) を比べると次を得る.

$$U^{-1} \left(\sum_{i,j=1}^3 \partial_i g_{00} \gamma^{ij} \partial_j - V_2 \right) U = g_{00} \frac{1}{\sqrt{|\det g|}} \sum_{i,j=1}^3 \partial_i \sqrt{|\det g|} \gamma^{ij} \partial_j. \quad (17.13)$$

次の補題を示したことになる.

補題 17.1 $v = g_{00}(m^2 + \eta \mathcal{R}) + V_2$ とする. このとき

$$UKU^{-1} = \sum_{i,j=1}^3 \partial_i g_{00} \gamma^{ij} \partial_j - v. \quad (17.14)$$

この補題により (17.7) は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上の次の方程式に変換される.

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \left(\sum_{i,j=1}^3 \partial_i g_{00} \gamma^{ij} \partial_j - v \right) \phi. \quad (17.15)$$

よって時間的に安定なローレンツ多様体上の分散関係は

$$\omega = \left(- \sum_{i,j=1}^3 \partial_i g_{00} \gamma^{ij} \partial_j + v \right)^{1/2} \quad (17.16)$$

となる.

17.3 短距離ポテンシャルを与える計量

短距離ポテンシャル $v(x) = \mathcal{O}(\langle x \rangle^{-\beta-2})$ が現れる時間的に安定なローレンツ多様体の例を考える.

$$g(\underline{x}) = g(x) = (g_{ij}(x)) = \begin{pmatrix} e^{-\theta(x)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-\theta(x)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^{-\theta(x)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^{-\theta(x)} \end{pmatrix} \quad (17.17)$$

としよう. この計量から決まるローレンツ多様体のスカラー曲率 \mathcal{R} を計算しよう.

補題 17.2 $\theta \in C^2(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき

$$\mathcal{R} = e^\theta (-6\Delta\theta + \frac{11}{4}|\nabla\theta|^2).$$

証明: $-\theta(x) = \Theta$, $\Theta_j = \frac{\partial \Theta}{\partial x^j}$ とおく. その結果, クリストッフエル記号は

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_l g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right) = \begin{cases} \Gamma_{kk}^k & = \frac{3}{2} \Theta_k, \\ \Gamma_{kk}^j (j \neq k) & = \begin{cases} -\frac{1}{2} \Theta_j, & k \neq 0, \\ \frac{1}{2} \Theta_j, & k = 0, \end{cases} \\ \Gamma_{jk}^k = \Gamma_{kj}^k (j \neq k) & = \Theta_j, \\ \text{その他} & = 0. \end{cases}$$

リーマン曲率テンソル \mathcal{R}_{kij}^l の定義は

$$\mathcal{R}_{kij}^l = \frac{\partial \Gamma_{kj}^l}{\partial x^i} - \frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial x^j} + \sum_a (\Gamma_{kj}^a \Gamma_{ai}^l - \Gamma_{ki}^a \Gamma_{aj}^l)$$

でリッチテンソルの定義は \mathcal{R}_{kij}^l を縮約して

$$\mathcal{R}_{ji} = \sum_l \mathcal{R}_{ilj}^l.$$

よってスカラー曲率は

$$\mathcal{R} = \sum_{ij} g^{ij} \mathcal{R}_{ji} = \sum_{ijl} g^{ij} \mathcal{R}_{jli}^l = e^{-\Theta} \sum_l \left(\mathcal{R}_{0l0}^l - \sum_{j=1}^3 \mathcal{R}_{jli}^l \right)$$

のように表される. 計量 g が時間に依存してないので $\Theta_0 = 0$ であることに注意する. そうすると

$$\mathcal{R}_{0l0}^l = \frac{\partial \Gamma_{00}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{0l}^l}{\partial x^0} + \sum_a (\Gamma_{00}^a \Gamma_{al}^l - \Gamma_{0l}^a \Gamma_{a0}^l) = \frac{1}{2} \Theta_{ll} + \sum_a \left(\frac{1}{2} \Theta_a^2 \right) - \Theta_l^2, \quad l \neq 0,$$

$$\mathcal{R}_{000}^0 = 0.$$

また $l \neq j$ のとき,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{jli}^l &= \frac{\partial \Gamma_{jj}^l}{\partial x^l} - \frac{\partial \Gamma_{jl}^l}{\partial x^j} + \sum_a \{ \Gamma_{jj}^a \Gamma_{al}^l - \Gamma_{jl}^a \Gamma_{aj}^l \} \\ &= -\frac{1}{2} \Theta_{ll} - \Theta_{jj} + \frac{3}{4} \Theta_j^2 - \frac{3}{4} \Theta_l^2 + \frac{1}{2} \Theta_l^2 - \Theta_j^2 \\ &= -\frac{1}{2} \Theta_{ll} - \Theta_{jj} - \frac{1}{4} \Theta_j^2 - \frac{1}{4} \Theta_l^2. \end{aligned}$$

そして $\mathcal{R}_{ll}^l = 0$. その結果

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= e^{-\theta} \sum_l \left(\frac{1}{2} \Theta_{ll} + \frac{1}{2} \sum_a \Theta_a^2 - \Theta_l^2 \right) - e^{-\theta} \sum_l \sum_{j=1}^3 \left(-\frac{1}{2} \Theta_{ll} - \Theta_{jj} - \frac{1}{4} \Theta_j^2 - \frac{1}{4} \Theta_l^2 \right) \\ &= e^{-\theta} \left(6\Delta\theta + \frac{11}{4} |\nabla\theta|^2 \right) \\ &= e^\theta \left(-6\Delta\theta + \frac{11}{4} |\nabla\theta|^2 \right).\end{aligned}$$

となる. □

クライン・ゴールドン方程式は

$$\square_g \phi + (m^2 + \eta \mathcal{R}) \phi = 0. \quad (17.18)$$

ここで

$$\square_g = e^{\theta(x)} \partial_t^2 - e^{2\theta(x)} \sum_j \partial_j e^{-\theta(x)} \partial_j. \quad (17.19)$$

(17.18) は

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = K_0 \phi, \quad (17.20)$$

と表せる. ここで

$$K_0 = e^{\theta(x)} \sum_j \partial_j e^{-\theta(x)} \partial_j - e^{-\theta(x)} (m^2 + \eta \mathcal{R}). \quad (17.21)$$

K_0 は重み付き L^2 空間 $L^2(\mathbb{R}^3; e^{-\theta(x)} dx)$ で対称になる. この作用素を $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上に変換する. ユニタリー作用素 $U_0 : L^2(\mathbb{R}^3; e^{-\theta(x)} dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$, $f \mapsto e^{-(1/2)\theta} f$ によって方程式

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \Delta \phi + v \phi = 0 \quad (17.22)$$

へ変換される. Dispersion relation は $\sqrt{-\Delta + v}$ で, v は

$$\begin{aligned}v &= e^{-\theta} (m^2 + \eta \mathcal{R}) - \frac{\Delta\theta}{2} + \frac{|\nabla\theta|^2}{4} \\ &= e^{-\theta} m + \left(-6\eta - \frac{1}{2} \right) \Delta\theta + \frac{11\eta + 1}{4} |\nabla\theta|^2.\end{aligned} \quad (17.23)$$

$\eta = 0$, $m = 0$, として, $\theta(x) = 2a \langle x \rangle^{-\beta}$ とおく. そうすると

$$v(x) = -a \langle x \rangle^{-\beta-4} (\beta(\beta-1)|x|^2 - 3\beta) + a^2 \beta^2 \langle x \rangle^{-2\beta-4} |x|^2. \quad (17.24)$$

$0 \leq \beta \leq 1, a > 0$ のとき $v \geq 0$ かつ $v = \mathcal{O}(\langle x \rangle^{-\beta-2})$. さらに $-\Delta + v$ は正の固有値をもたない. $\beta > 1, a < 0$ のときは, $v \not\geq 0$ となる. Lieb-Thirring 不等式から $-\Delta + v$ は a が小さいとき非正の固有値をもたないことも分かる.

命題 17.3 ある θ と v が存在して

$$U_0 K_0 U_0^{-1} = \Delta - v, \quad v(x) = \mathcal{O}(\langle x \rangle^{-\beta-2}) (\beta \geq 0)$$

となり, $-\Delta + v$ は正の固有値をもたない.

証明: [GHPS09] による. □

17.4 時間不変なローレンツ多様体上の Nelson 模型

時間不変なローレンツ多様体 $\mathcal{M} = (\mathbb{R}^4, g)$ 上の Nelson 模型を次で一般化して定義する.

定義 17.4 (多様体上の Nelson Hamiltonian)

$$H_g = K \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + \phi. \tag{17.25}$$

ここで

$$K = - \sum_{i,j=1}^3 \partial_i A^{ij} \partial_j + V \tag{17.26}$$

で, $L^2(\mathbb{R}_x^3)$ 上の自己共役作用素 ω は

$$\omega = \left(- \sum_{i,j=1}^3 c(x)^{-1} \partial_i a^{ij}(x) \partial_j c(x)^{-1} + m^2(x) \right)^{1/2} \tag{17.27}$$

で定義され, スカラー場は

$$\phi = \phi(x) = \phi((\omega^{-1/2} \varphi)(\cdot - X)). \tag{17.28}$$

で与えられる.

H_g の基底状態の存在・非存在と紫外切断のくりこみが研究されている. 定義を見ればわかるように, $\omega = \sqrt{-\Delta + m^2}$ が (17.27) のような擬微分作用素に変わっているため, 解析は技術的に困難であろうことが予想される.

	$m(x) \geq a \langle x \rangle^{-1}$	$m(x) \leq a \langle x \rangle^{-\beta}, \beta > 1$
基底状態	存在	非存在

図 18: 基底状態の存在と非存在

17.5 基底状態の存在

基底状態の存在を示すために次の条件を導入する. 基本的に $[a^{ij}]$, $[A^{ij}]$ は楕円的で, V は十分早く増加することが本質的である.

条件 17.5 K と ω に対して次の条件を導入する. 次を満たす $C_0 > 0, C_1 > 0, \delta > 0$, が存在する.

- (1) $C_0 \mathbb{1} \leq [a^{ij}(x)] \leq C_1 \mathbb{1}$,
- (2) $\partial^\alpha a^{ij}(x) \in O(\langle x \rangle^{-1}), \quad |\alpha| \leq 1$,
- (3) $C_0 \leq c(x) \leq C_1, \quad \partial^\alpha c(x) \in O(1), \quad |\alpha| \leq 2$,
- (4) $\partial^\alpha m(x) \in O(1), \quad |\alpha| \leq 1$,
- (5) $C_0 \mathbb{1} \leq [A^{ij}(X)] \leq C_1 \mathbb{1}$,
- (6) $V(X) \geq C_0 \langle X \rangle^{2\delta} - C_1$.

定理 17.6 (基底状態の存在) 条件 17.5 の下で, $m(x) \geq a \langle x \rangle^{-1}$ ($a > 0$), かつ $\delta > 3/2$ ならば H は基底状態をもつ.

証明: この定理の証明は以下の一般的な命題による.

命題 17.7 以下を仮定する.

- (1) $\omega \geq 0$ かつ $\text{Ker } \omega = 0$,
- (2) $\sup_X \|(\omega^{-1/2} \varphi)(\cdot - X)\| < \infty$,
- (3) $(K + \mathbb{1})^{-1/2}$ はコンパクト,
- (4) $\omega^{-1} \varphi(\cdot - X)(K + \mathbb{1})^{-1/2}$ はコンパクト,
- (5) $\omega^{-3/2} \varphi(\cdot - X)(K + \mathbb{1})^{-1/2}$ はコンパクト.

このとき H_g は基底状態をもつ.

注意 17.8 命題 17.7 の条件 (5) は Nelson 模型の赤外正則条件 $I_{\mathbb{R}} < \infty$ に対応している.

定理 17.7 の証明: 条件 (1)-(4) in 命題 17.7 はすぐにチェックできる. (5) が難しい. キーになる評価は [GHPS11] による次である.

補題 17.9 $\omega^{-3/2}\langle x \rangle^{-3/2-\epsilon}$ は有界で $\langle X \rangle^{3/2+\epsilon}(K + \mathbb{1})^{-1/2}$ はコンパクトである.

この補題により

$$\omega^{-3/2}\varphi(\cdot - X)(K + \mathbb{1})^{-1/2} = \omega^{-3/2}\langle x \rangle^{-3/2-\epsilon}\langle x \rangle^{3/2+\epsilon}\varphi(x - X)\langle X \rangle^{-3/2-\epsilon}\langle X \rangle^{3/2+\epsilon}(K + \mathbb{1})^{-1/2} \quad (17.29)$$

と書いて $\omega^{-3/2}\varphi(\cdot - X)(K + \mathbb{1})^{-1/2}$ がコンパクトになることがわかる. \square

17.6 基底状態の非存在

基底状態の非存在を示す. アイデアは Nelson 模型と同じく経路積分を利用するが, 技術的に少しハードになる. φ_p を K の基底状態とする. このとき $\varphi_p > 0$ で $\varphi_p \in D(e^{-C|x|^{\delta+1}})$ であることがわかる. 基底状態変換 $U : L^2(\mathbb{R}^3, \varphi_p^2 dx) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3)$, $f \mapsto \varphi_p f$, によって

$$L_p = U(K - \inf \sigma(K))U^{-1} \quad (17.30)$$

と定義する. その結果

$$H_g \cong L_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + \phi_\varphi(X)$$

になる. この右辺を L_g とおいて, L_g の基底状態の非存在を考える.

定理 17.10 (基底状態の非存在) $\varphi > 0$ とする. $m(x) \leq a\langle x \rangle^{-1-\epsilon}$ ($\epsilon > 0$) と $\delta > 0$ を仮定する. このとき H_g の基底状態は存在しない.

証明: Nelson 模型と同様の方針で証明する.

$$a = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(\mathbb{1}, e^{-TH}\mathbb{1})^2}{(\mathbb{1}, e^{-2TH}\mathbb{1})} \quad (17.31)$$

とする. $a = 0$ を示せばいい. 次の補題が示せる.

補題 17.11 ($P(\phi)_1$ 過程) ($\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X})$) 上に, 次を満たす確率測度 \mathcal{N}_K^x が存在する. 座標過程 $(X_t)_{t \geq 0}$ は $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}), \mathcal{N}_K^x)$ 上の $P(\phi)_1$ 過程で,

$$(f, e^{-tL}g)_{L^2(\varphi_p^2 dx)} = \mathbb{E} \left[\overline{f(X_0)g(X_t)} \right],$$

と表せる. ここで $\mathbb{E}[\dots] = \int \varphi_p^2(x) dx \int \dots d\mathcal{N}_K^x$.

この補題から

$$(\mathbb{1}, e^{-TH}\mathbb{1}) = \mathbb{E} \left[e^{\int_0^T dt \int_0^T ds W_g(X_t, X_s, |t-s|)} \right]$$

となり, ペアポテンシャルは

$$W_g(X, Y, t) = \frac{1}{2}(\varphi(\cdot - X), \omega^{-1}e^{-|t|\omega}\varphi(\cdot - Y))_{L^2(\mathbb{R}^3)}.$$

Nelson 模型と全く同様に

$$\gamma \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E} \left[e^{\int_{-T}^T \int_{-T}^T -2 \int_{-T}^0 \int_0^T W_g} \right]}{\mathbb{E} \left[e^{\int_{-T}^T \int_{-T}^T W_g} \right]} = \lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu_T} \left[e^{-2 \int_{-T}^0 \int_0^T W_g} \right]$$

が示される. ここで μ_T は

$$\mathbb{E}_{\mu_T}[\dots] = \frac{1}{Z_T} \mathbb{E}[\dots e^{-2 \int_{-T}^0 \int_0^T W_g}]$$

で定義される確率測度. ω が擬微分作用素なので, W を具体的に書き表すことができない. しかし, 次の補題によって, 評価を Nelson 模型に還元することができる.

補題 17.12 $m(x) \leq a\langle x \rangle^{-1-\epsilon}$ とする. このとき定数 $C_1, C_2, C_3, C_4 > 0$ で次を満たすものが存在する.

$$C_1 e^{-C_2 t \omega_\infty^2(x, y)} \leq e^{-t\omega^2(x, y)} \leq C_3 e^{-C_4 t \omega_\infty^2(x, y)}. \quad (17.32)$$

ここで $\omega_\infty^2 = -\Delta$.

W を

$$W(X, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\hat{\varphi}(k)|^2}{\omega(k)} e^{-|t|\omega(k)} e^{-ikx} dk$$

とおこう. もちろん, これは Nelson 模型に付随したペアポテンシャルである. 補題 17.12 から

$$C_1 W(x - y, C_2 |t|) \leq W_g(x, y, |t|) \leq C_3 W(x - y, C_4 |t|) \quad (17.33)$$

となるから, W_g の評価を W の評価へ帰着できることになる.

$$\mathbb{E}_{\mu_T} \left[e^{-2 \int_{-T}^0 \int_0^T W_g} \right] = \mathbb{E}_{\mu_T} [\mathbb{1}_{A_T} \cdots] + \mathbb{E}_{\mu_T} [\mathbb{1}_{A_T^c} \cdots]$$

と分ける. ここで

$$A_T = \{(x, w) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{X} \mid \sup_{|s| \leq T} |X_s(w)| \leq T^\lambda, X_0(w) = x\}$$

とする.

$$W(X, Y, |t|) = \frac{1}{4\pi^2} \int \frac{\varphi(x)\varphi(y)}{|x - y + X - Y|^2 + t^2} dx dy$$

を思い出して Nelson 模型と全く同じように

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{A_T} \int_{-T}^0 dt \int_0^T ds W_g &\geq \mathbb{1}_{A_T} \int_{-T}^0 dt \int_0^T ds W \\ &\geq \int_{\mathbb{R}^3} dx \int_{\mathbb{R}^3} dy \varphi(x)\varphi(y) \log \left\{ \frac{8T^{2\lambda} + 2|x - y|^2 + cT^2}{8T^{2\lambda} + 2|x - y|^2} \right\} \end{aligned}$$

と評価できて. 右辺は $T \rightarrow \infty$ で発散する. よって

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu_T} [\mathbb{1}_{A_T} \cdots] = 0 \quad (17.34)$$

となる. 次に補題 17.12 から

$$\mathbb{E}_{\mu_T} \left[\mathbb{1}_{A_T^c} e^{-\int_{-T}^0 \int_0^T W_g} \right] \leq C_1 e^{TC_2} \mathbb{E} [A_T^c] \quad (17.35)$$

と評価される. Nelson 模型と同様に K に対する Dirichlet 原理を示すことができ

$$\mathbb{E} [A_T^c] \leq T^{-\lambda} (a + bT)^{1/2} e^{-T^{\lambda(\delta+1)}}$$

と評価できる. $\lambda(\delta + 1) > 1$ は

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{\mu_T} [\mathbb{1}_{A_T^c} \cdots] = 0 \quad (17.36)$$

を意味する. (17.34), (17.36) から証明終わり. □

17.7 紫外切断のくりこみ

最後に UV 切断のくりこみについて紹介しよう. Nelson 模型のくりこみ項は

$$E_\Lambda = -\frac{1}{2}(2\pi)^{-3} \int \frac{1}{|k|(|k|^2/2 + |k|)} \mathbb{1}_{|k| < \Lambda} dk \quad (17.37)$$

だった. いま $\varphi_\Lambda(\cdot) = \Lambda^3 \varphi(\Lambda \cdot)$ として, 次を定義する.

$$E_\Lambda(x) = -\frac{1}{2}(2\pi)^{-3} \int (h_0(x, \xi) + 1)^{-1/2} \frac{K(x, \xi)}{(K(x, \xi) + 1)^2} |\hat{\varphi}(\xi/\Lambda)|^2 d\xi, \quad (17.38)$$

$$h_0(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^3 \xi_i a^{ij}(x) \xi_j, \quad (17.39)$$

$$K(x, \xi) = \sum_{i,j=1}^3 \xi_i A^{ij}(x) \xi_j. \quad (17.40)$$

このときに

$$\varphi_\Lambda(x' - x) \rightarrow \delta(x' - x) \int \varphi(y) dy \quad (\Lambda \rightarrow \infty)$$

となる. (17.38) の $(h_0(X, \xi) + 1)^{-1/2}$ 項は (17.37) の $|k|^{-1}$ に対応している. そして (17.38) の $\frac{K(X, \xi)}{(K(X, \xi) + 1)^2}$ は (17.37) の $\frac{1}{|k|^2/2 + |k|}$ に対応している.

定理 17.13 (UV くりこみ) 下から有界な自己共役作用素 H_{ren} が存在して

$$s\text{-}\lim_{\Lambda \rightarrow \infty} e^{-t(H_\Lambda - E_\Lambda(X))} \rightarrow e^{-tH_{\text{ren}}}$$

となる.

17.8 参考文献など

多様体上の Nelson 模型の解析は一連の論文 [GHPS09, GHPS11, GHPS12a, GHPS12b] でなされた. [GHPS11] では基底状態の存在が示されている. 最大のポイントは 補題 17.9 を示すことであった. 擬微分作用素の技術で示された. 基底状態の非存在は [GHPS09, GHPS12b] でなされた. アイデアは [LMS02] と同じだが, 技術的に克服しなくてはならない部分が多かった. 最後の UV くりこみは [GHPS12a] でされた.

18 その他の模型

Feynman-Kac 型汎関数積分表示を使って、解析ができる模型の例を挙げる。下から有界な模型の Hamiltonian が生成する熱半群は殆ど Feynman-Kac 型汎関数積分表示することが出来る。キーとなるアイデアはスピンを含む模型であれば Poisson 過程 $(N_t)_{t \geq 0}$, 非局所的な作用素を含む模型であれば subordinator $(T_t)_{t \geq 0}$ を適当に組み合わせて、それぞれの Markov 性を使えば Feynman-Kac 型汎関数積分表示を得ることが出来る。

18.1 スピン・ボゾン模型

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ は 2×2 パウリ行列を表すとして。

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Hilbert 空間 $\mathcal{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}$ を考えよう。スピン・ボゾン Hamiltonian は

$$\varepsilon \sigma_z \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + \alpha \sigma_x \otimes \phi(\hat{h})$$

で定義される \mathcal{H} 上の作用素である。ここで $\alpha \in \mathbb{R}$ は結合定数, $\varepsilon \geq 0$ は 2 レベル原子のスペクトルギャップを表すパラメータである。Feynman-Kac 型汎関数積分表示をつかって [Spo89, HHL12] で調べられている。また、基底状態の研究として [Hiro99, Abd11, HH11] などがある。

18.2 準相対論的 Nelson 模型

準相対論的 Nelson 模型の Hamiltonian は

$$(\sqrt{-\Delta + m^2} - m + V) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + H_1$$

で定義される。Nelson 模型で H_p を $\sqrt{-\Delta + m^2} - m + V$ に置換えて定義される。この場合の Feynman-Kac 型汎関数積分表示は Nelson Hamiltonian のそれと全く同様に構成することができる。ただし、Brown 運動が Lévy 過程に変わる。さらにもっと一般化して Ψ を Bernstein 関数として

$$\Psi(-\Delta) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f + H_1$$

を定義しても、Nelson Hamiltonian と同じ解析が出来ると思われる。

18.3 Pauli-Fierz 模型

18.3.1 スピンがない場合

Pauli-Fierz 模型は非相対論的量子電磁力学という中途半端な名前のついた模型で, Pauli-Fierz [PF38] が toy model として導入した模型である. それは $H_p \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f$ に量子化された電磁場

$$A_\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=1,2} \int e_\mu(k, j) \left(a^*(k) e^{-ikx} \hat{\varphi}(-k) / \sqrt{\omega(k)} + a(k) e^{ikx} \hat{\varphi}(k) / \sqrt{\omega(k)} \right) dk$$

がミニマル結合した模型である. $A = \int_{\mathbb{R}^3}^\oplus A(x) dx$ とおく.

$$\frac{1}{2m} (p \otimes \mathbb{1} - A)^2 + V \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f$$

この汎関数積分に依る解析は例えば [FFG97, Hir97, Hir00a, Hir00b, Hir02, MS12] などがある. また [Spo04] には無限次元 OU 過程をもちいた解説がある.

18.3.2 スピンがある場合

スピンを含む場合は Pauli 行列で

$$\frac{1}{2m} (\sigma \cdot (p \otimes \mathbb{1} - A))^2 + V \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f$$

と定義される. この Hamiltonian の基底状態は対称性から 2 重に縮退していることが [HS01b, Hir05a] で示されている. この汎関数積分表示は [HL08] で与えられている.

18.3.3 $V = 0$ の場合

$V = 0$ の場合 Pauli-Fierz 模型は平行移動不変になる. 全運動量 $P \in \mathbb{R}^d$ の Hamiltonian は Fock 空間上に

$$\frac{1}{2m} (P - P_f - A(0))^2 + H_f$$

で定義される. この汎関数積分表示は [Hir07] で与えられている.

18.4 準相対論的 Pauli-Fierz 模型

18.4.1 スピンがない場合

準相対論的 Pauli-Fierz 模型は相対論的な模型

$$(\sqrt{-\Delta + m^2} - m + V) \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f$$

に電磁場をミニマル結合して定義される.

$$\sqrt{(p \otimes \mathbb{1} - A)^2 + m^2} - m + V \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f$$

この模型も汎関数積分表示を用いて, [Hir14] で (1) 本質的自己共役性, (2) 固有ベクトルのガウス domination, (3) 付随する Gibbs 測度の存在, (4) 固有ベクトルの指数および多項式減衰性が示されている. $m = 0$ のときは

$$|p \otimes \mathbb{1} - A| + V \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f$$

と表せる. この基底状態の存在が [HH13a, HH13b] で調べられている.

18.4.2 スピンがある場合

スピンがある場合の準相対論的 Pauli-Fierz 模型は次で与えられる.

$$\sqrt{(\sigma \cdot (p \otimes \mathbb{1} - A))^2 + m^2} - m + V \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_f.$$

この汎関数積分表示もスピンのない場合と同様に構成できて, 解析可能である. 基底状態の存在が [KMS11] で調べられている.

参考文献

- [Abd11] A. Abdesselam, The ground state energy of the massless spin-boson model, *Ann. Henri Poincaré* **12** (2011), 1321–1347.
- [Amm00] Z. Ammari, Asymptotic completeness for a renormalized nonrelativistic Hamiltonian in quantum field theory: the Nelson model, *Math. Phys. Anal. Geom.* **3** (2000), 217–285.

- [ALS83] G. F. De Angelis, G. Jona-Lasinio, and M. Sirugue, Probabilistic solution of Pauli-type equations, *J. Phys.* **A16** (1983), 2433–2444.
- [ARS91] G. F. De Angelis, A. Rinaldi, and M. Serva, Imaginary-time path integral for a relativistic spin-(1/2) particle in a magnetic field, *Europhys. Lett.* **14** (1991), 95–100.
- [Ara83a] A. Arai, A note on scattering theory in non-relativistic quantum electrodynamics, *J. Phys. A* **16** (1983), 49–69.
- [Ara83b] A. Arai, Rigorous theory of spectra and radiation for a model in quantum electrodynamics, *J. Math. Phys.* **24** (1983), 1896–1910.
- [Ara88] 新井朝雄, 場の量子論と統計力学, 日本評論社, 1988.
- [Ara90] A. Arai, An asymptotic analysis and its application to the nonrelativistic limit of the Pauli-Fierz and a spin-boson model, *J. Math. Phys.* **31** (1990), 2653–2663.
- [Ara00] 新井朝雄, フォック空間と量子場, 上下, 日本評論社, 2000.
- [Ara01] A. Arai. Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation. *Rev. Math. Phys.* **13** (2001), 1075–1094.
- [AH97] A. Arai and M. Hirokawa. On the existence and uniqueness of ground states of a generalized spin-boson model. *J. Funct. Anal.* **151** (1997), 455–503.
- [AHH99] A. Arai, M. Hirokawa and F. Hiroshima, On the absence of eigenvectors of Hamiltonians in a class of massless quantum field models without infrared cutoff *J. Funct. Anal.* **168** (1999), 470–497.
- [AK03] A. Arai and H. Kawano, Enhanced binding in a general class of quantum field models, *Rev. Math. Phys.* **15** (2003), 387–423.
- [BFS98] V. Bach, J. Fröhlich, and I. M. Sigal, Quantum electrodynamics of confined nonrelativistic particles, *Adv. Math.* **137** (1998), 299–395.
- [BFS99] V. Bach, J. Fröhlich, and I. M. Sigal, Spectral analysis for systems of atoms and molecules coupled to the quantized radiation field, *Commun. Math. Phys.* **207** (1999), 249–290.

- [BH09] V. Betz and F. Hiroshima, Gibbs measures with double stochastic integrals on path space, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics*, **12** (2009), 135–152.
- [BHLMS02] V. Betz, F. Hiroshima, J. Lőrinczi, R. A. Minlos and H. Spohn, Ground state properties of the Nelson Hamiltonian-A Gibbs measure-based approach, *Rev. Math. Phys.* **14** (2002), 173–198.
- [CH04] I. Catto and C. Hainzl, Self-energy of one electron in non-relativistic QED, *J. Funct. Anal.* **207** (2004), 68–110.
- [CVV03] T. Chen, V. Vougalter and S. A. Vougalter, The increase of binding energy and enhanced binding in nonrelativistic QED, *J. Math. Phys.* **44** (2003), 1961–1970.
- [Car78] R. Carmona, Pointwise bounds for Schrödinger eigenstates, *Commun. Math. Phys.* **62** (1978), 97–106.
- [CMS90] R. Carmona, W.C.Masters, and B. Simon, Relativistic Schrödinger operators: asymptotic behavior of the eigenvalues, *J. Funct. Anal.* **91** (1990), 117–142.
- [CFKS87] H. L. Cycon, R. G. Froese, W. Kirsch, and B. Simon, *Schrödinger Operators. With Application to Quantum Mechanics and Global Geometry*, Springer, 1987.
- [Dau83] I. Daubechies, An uncertainty principle for fermions with generalized kinetic energy, *Commun. Math. Phys.* **90** (1983), 319–334.
- [Dav79] E. B. Davies, Particle-boson interactions and weak coupling limit, *J. Math. Phys.* **20** (1979), 345–351.
- [DG04] J. Dereziński and C. Gérard, Scattering theory of infrared divergent Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. Henri Poincaré* **5** (2004), 523–578.
- [FFG97] C. Fefferman, J. Fröhlich, and G. M. Graf, Stability of ultraviolet-cutoff quantum electrodynamics with non-relativistic matter, *Commun. Math. Phys.* **190** (1997), 309–330.
- [Ger00] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. H. Poincaré* **1** (2000), 443–459.

- [GHPS09] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati, and A. Suzuki, Infrared divergence of a scalar quantum field model on a pseudo Riemannian manifold, *Interdisciplinary Information Sciences* **15** (2009), 399–421.
- [GHPS11] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Infrared problem for the Nelson model with variable coefficients, *Commun. Math. Phys.* **308** (2011), 543–566.
- [GHPS12a] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Removal of the UV cutoff for the Nelson model with variable coefficients, *Lett Math Phys*, **101** (2012), 305–322.
- [GHPS12b] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Absence of ground state of the Nelson model with variable coefficients, *J. Funct. Anal.* **262** (2012), 273–299.
- [GJ68] J. Glimm and A. Jaffe, A $\lambda(\phi^4)_2$ quantum field theory without cutoffs. I, *Phys. Rev.* **176** (1968), 1945–1951.
- [GJ81] J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics: A Functional Integral Point of View*, Springer, 1981.
- [GLL01] M. Griesemer, E. Lieb, and M. Loss, Ground states in non-relativistic quantum electrodynamics, *Invent. Math.* **145** (2001), 557–595.
- [Gro73] L. Gross. The relativistic polaron without cutoffs, *Commun. Math. Phys.* **31** (1973), 25–73.
- [GHL13] M. Gubinelli, F. Hiroshima and J. Lórinzi, Ultraviolet renormalization of the Nelson Hamiltonian through functional integration, *J. Funct. Anal.* **267** (2014), 3125–3153.
- [HH11] D. Hasler and I. Herbst, Ground states in the spin boson model, *Ann. Henri Poincaré* **12** (2011), 621–677.
- [HVV03] C. Hainzl, V. Vougalter and S. A. Vougalter, Enhanced binding in non-relativistic QED, *Commun. Math. Phys.* **233** (2003), 13–26.
- [Hiro99] M. Hirokawa. An expression of the ground state energy of the spin-boson model, *J. Funct. Anal.* **162** (1999), 178–218.

- [Hir03] M. Hirokawa. Infrared catastrophe for Nelson’s model, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **42** (2003), 897–922.
- [HHL12] M. Hirokawa, F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Spin-boson model through a Poisson-driven stochastic process, *Math. Z.* **277** (2014), 1165–1198.
- [HHS05] M. Hirokawa, F. Hiroshima and H. Spohn, Ground state for point particle interacting through a massless scalar Bose field, *Advances in Math.*, **191** (2005), 339–392.
- [HH10] T. Hidaka and F. Hiroshima, Pauli-Fierz model with Kato class potential and exponential decay, *Rev. Math. Phys.* **22** (2010), 1181–1208.
- [HH13a] T. Hidaka and F. Hiroshima, Spectrum of semi-relativistic Pauli-Fierz model I, preparation.
- [HH13b] T. Hidaka and F. Hiroshima, Self-adjointness of semi-relativistic Pauli-Fierz Hamiltonian, preparation.
- [HH14] M. Hirokawa and F. Hiroshima, Absence of energy level crossing for the ground state energy of the Rabi model, *Commun. Stochastic Analysis* **8** (2015), 551–560.
- [Hir97] F. Hiroshima, Functional integral representation of a model in quantum electrodynamics, *Rev. Math. Phys.* **9** (1997), 489–530.
- [Hir99] F. Hiroshima, Weak coupling limit removing an ultraviolet cut-off for a Hamiltonian of particles interacting with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **40** (1999), 1215–1236.
- [Hir98] F. Hiroshima, Weak coupling limit and a removal of an ultraviolet cut-off for a Hamiltonian of particles interacting with a massive scalar field, *Inf. Dim. Anal. and Quantum Prob. and Related Topics* **1** (1998), 407–423.
- [Hir00a] F. Hiroshima, Essential self-adjointness of translation-invariant quantum field models for arbitrary coupling constants, *Commun. Math. Phys.* **211** (2000), 585–613.
- [Hir00b] F. Hiroshima, Ground states of a model in nonrelativistic quantum electrodynamics II, *J. Math. Phys.* **41** (2000), 661–674.

- [Hir02] F. Hiroshima, Self-adjointness of the Pauli-Fierz Hamiltonian for arbitrary values of coupling constants, *Ann. Henri Poincaré* **3** (2002), 171–201.
- [Hir05a] F. Hiroshima, Multiplicity of ground states in quantum field models: applications of asymptotic fields, *J. Funct. Anal.* **224** (2005), 431–470.
- [Hir05b] 廣島文生, 場の理論における埋蔵固有値の摂動問題, *数学* **57**(2005),70–92.
- [Hir07] F. Hiroshima, Fiber Hamiltonians in nonrelativistic quantum electrodynamics, *J. Funct. Anal.* **252** (2007), 314–355.
- [Hir14] F. Hiroshima, Functional integral approach to semi-relativistic Pauli-Fierz models, *Adv. in Math.* **259** (2014), 784–840.
- [Hir15] F. Hiroshima, Translation invariant models in QFT without ultraviolet cutoffs, arXiv:1506.07514, preprint 2015.
- [HIL12] F. Hiroshima, T. Ichinose, and J. Lőrinczi, J. Path integral representation of Schrödinger operator with Bernstein functions of the Laplacian, *Rev. Math. Phys.* **24** (2012) 1250013 (40 pages).
- [HIL13] F. Hiroshima, T. Ichinose and J. Lőrinczi, Probabilistic representation and fall-off of bound states of relativistic Schroedinger operators with spin 1/2, *Publ RIMS Kyoto* **49** (2013), 189–214.
- [HI07] F. Hiroshima and K.R. Ito, Mass renormalization in nonrelativistic quantum electrodynamics with spin 1/2, *Rev. Math. Phys.* **19** (2007), 405–454.
- [HL08] F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Functional integral representation of the Pauli-Fierz model with spin 1/2, *J. Funct. Anal.* **254** (2008), 2127–2185.
- [HL12] F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Lieb-Thirring bound for Schroedinger operators with Bernstein functions of the Laplacian, *Commun. Stochastic Analysis* **6** (2012), 589–602.
- [HLT12] F. Hiroshima, J. Lőrinczi and T. Takaesu, A probabilistic representation of the ground state expectation of fractional powers of the boson number operator, *J. Math. Anal. Appl.* **395** (2012), 437–447.

- [HS08] F. Hiroshima and I. Sasaki, Enhanced binding of an N particle system interacting with a scalar field I, *Math. Z.* **259** (2008) 657–680.
- [HS15] F. Hiroshima and I. Sasaki, Enhanced binding of an N particle system interacting with a scalar field II, to be published in Publ. RIMS Kyoto.
- [HSS11] F. Hiroshima, I. Sasaki, A. Suzuki and H. Spohn, *Enhanced binding in quantum field theory* COE Lecture Note **38** Kyushu University, 2011.
- [HS01a] F. Hiroshima and H. Spohn, Enhanced binding through coupling to a quantum field, *Ann. Henri Poincaré* **2** (2001), 1159–1187.
- [HS01b] F. Hiroshima and H. Spohn, Ground state degeneracy of the Pauli-Fierz Hamiltonian with spin, *Adv. Theor. Math. Phys.* **5** (2001), 1091–1104.
- [HS05] F. Hiroshima and H. Spohn, Mass renormalization in nonrelativistic QED, *J. Math. Phys.* **46** (2005), 042302.
- [HSS11] F. Hiroshima, H. Spohn and A. Suzuki, The no-binding regime of the Pauli-Fierz model, *J. Math. Phys.* **52**, (2011), 062104.
- [KMS11] M. Könenberg, O. Matte and E. Stockmeyer, Existence of ground states of hydrogen-like atoms in relativistic QED I: The semi-relativistic Pauli-Fierz operator, *Rev. Math. Phys.* **23** (2011), 375–407.
- [KV86] C. Kipnis and S. R. S. Varadhan, Central limit theorem for additive functionals of reversible Markov processes and applications to simple exclusions, *Commun. Math. Phys.* **104** (1986), 1–19.
- [LS81] H. Leinfelder and C. G. Simader, Schrödinger operators with singular magnetic potentials, *Math. Z.* **176** (1981), 1–19.
- [Lie76] E. Lieb, Bounds on the eigenvalues of the Laplacian and Schrödinger operators, *Bull. AMS* **82** (1976), 751–753.
- [Lie80] E. Lieb, The number of bound states of one-body Schrödinger operators and the Weyl problem, *Proc. of the Math. Soc. Symposia in Pure Math.* **36** (1980), 241–252.

- [LHB11] J. Lőrinczi, F. Hiroshima and V. Betz, *Feynman-Kac type theorems and Gibbs measures on path space*, Studies in Mathematics **34**, DeGruyter 2011.
- [LMS02] J. Lőrinczi, R. A. Minlos, and H. Spohn. The infrared behaviour in Nelson’s model of a quantum particle coupled to a massless scalar field, *Ann. Henri Poincaré* **3** (2002), 1–28.
- [MS12] T. Miyao and H. Spohn, Scale dependence of the retarded van der Waals potential, *J. Math. Phys.* **53** (2012), 095215.
- [Nel64a] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1990–1997.
- [Nel64b] E. Nelson, Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field, In *Proc. Conference on Analysis in Function Space*, W. T. Martin and I. Segal (eds.), page 87. MIT Press, 1964.
- [OS99] H. Osada and H. Spohn, Gibbs measures relative to Brownian motion, *Ann. Probab.* **27** (1999), 1183–1207.
- [PF38] W. Pauli and M. Fierz, Zur Theorie der Emission langwelliger Lichtquanten. *Nuovo Cimento* **15** (1938), 167–188.
- [RS80] M. Reed and B. Simon, *Method of modern mathematical physics I* Academic Press 1980.
- [RS75] M. Reed and B. Simon, *Method of modern mathematical physics II* Academic Press 1975.
- [Sas05] I. Sasaki. Ground state of the massless Nelson model in a non-Fock representation, *J. Math. Phys.* **46** (2005), 102107.
- [Sim74] B. Simon. *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press, 1974.
- [Sim79] B. Simon, *Functional Integration and Quantum Physics*, Academic Press, 1979, 2nd ed. 2005.

- [Sim82] B. Simon, Schrödinger semigroups, *Bull. Amer. Math. Soc.* **7** (1982), 447–526.
- [Spo89] H. Spohn, Ground state(s) of the spin-boson Hamiltonian, *Commun. Math. Phys.* **123** (1989), 277–304.
- [Spo98] H. Spohn, Ground state of quantum particle coupled to a scalar boson field, *Lett. Math. Phys.* **44**, (1998), 9–16.
- [Spo04] H. Spohn, *Dynamics of Charged Particles and their Radiation Field*, Cambridge University Press, 2004.

索引

- C_0 半群, 22
- $L^p - L^q$ 有界性, 67
- $P(\phi)_1$ -Feynman-Kac 公式, 76
 - Rabi 模型, 83
- $P(\phi)_1$ 過程, 71
- Ψ -Kato クラス, 65

- 正準交換関係, 89

- admissible ポテンシャル, 129

- Bernstein 関数, 34
- Bochner-Minlos の定理, 95
- Boson Fock 空間, 88
- Brown 運動, 9
 - \mathbb{R} 上, 12

- càdlàg パス, 13, 41
- Chapman-Kolmogorov 恒等式, 74
- compensator, 14
- consistency 条件, 71
- counting 測度, 17

- Dirichlet 原理, 77
- Doob の h -変換, 69

- enhanced binding, 183
- Euclid 群, 101
- Euclid 場, 97

- Feynman-Kac 公式, 21
- Feynman-Kac-Itô 公式, 25, 26, 39
 - spin, 28
 - spin, 一般化された, 55
 - 一般化された, 39
 - 相対論的 Schrödinger 作用素, 43
- Feynman-Kac-Nelson 公式, 99
 - $P(\phi)_1$ 過程, 105
 - Brown 運動, 105

- Gaussian random variable, 81
- Gibbs 測度, 129
 - Nelson 模型, 132

- intensity, 13
- Itô isometry, 11
- Itô の公式
 - Semi-martingale, 19

- Kato-Rellich の定理, 43, 49, 103
- Kato クラス, 63
 - Ψ , 65

- Lévy 測度, 14
- Lévy-Itô 分解, 15
- Lévy-Khintchine 公式, 15
- Lévy 過程, 13
- Langevin 方程式, 80
- Levi-Civita テンソル, 27
- Lieb-Thirring 不等式, 44, 182, 196

- Markov 性
 - Euclid 場, 98
- Markov 過程, 10
- Martingale, 10, 24

Martingale 性
 Nelson 模型, 125
 Mehler 公式, 81
 Nelson Hamiltonian
 Fock 空間, 103
 多様体上, 196
 汎関数空間, 104
 準相対論的, 202
 Nelson の解析ベクトル定理, 91
 Ornstein-Uhlenbeck process, 70, 80
 Pauli-Fierz 模型, 203
 $V = 0$ の場合, 203
 スピン, 203
 準相対論的, 204
 準相対論的でスピンある場合, 204
 Perron-Frobenius 定理, 112
 Poisson ランダム測度, 17
 Poisson 過程, 13
 compensated, 13
 複合, 13
 predictable, 18
 Pull through 公式, 143
 Rabi 模型, 82
 Riesz-Thorin 定理, 67
 Segal 場, 90
 Semi-martingale, 18
 spin-Feynman-Kac-Itô 公式, 28
 スピン $1/2$ 相対論的 Schrödinger 作用素, 59, 204
 一般化された, 55
 磁場に零点がある場合, 62
 Stone の定理, 23
 Stratonovich 積分, 12
 subordinated Brownian motion, 64
 subordinator, 35
 UV くりこみ, 147
 ポーラロン模型, 167
 多様体上, 201
 Wick 積, 91
 Wick 積, 106
 Wiener-Itô-Segal 同型, 93
 Wiener 測度, 9
 エルミート多項式, 80
 ガウス domination, 139
 ガウス超過程, 92
 スカラー場, 94
 スピン $1/2$, 27
 スピン・ボゾン模型, 202
 スピン作用素
 一般化された, 48
 スペクトルゼータ関数, 32
 トロッタ積公式, 21
 パウリ行列, 27
 ファンクター, 106
 フィルトレーション, 10
 ペアポテンシャル, 111
 Nelson, 111
 くりこまれた, 162
 ペア相互作用, 141
 ボゾン数の指数減衰性, 143
 ポーラロン模型, 166

個数作用素
 期待値, 144
 全運動量, 165
 共役運動量作用素, 90
 再帰性, 16
 双極不等式, 42, 44, 56, 60, 167, 186
 反正準交換關係, 27
 埋蔵固有値, 109
 基底状態, 69
 調和振動子, 79
 基底状態変換, 69
 安定過程, 16
 局所一樣位相, 8
 局所弱収束, 130
 座標過程, 9
 弱結合極限, 163, 164

 拡散過程, 69
 有限粒子部分空間, 89
 正值保存性, 94
 正值性保存作用素, 17
 正值性改良作用素, 17
 消滅作用素, 88

 生成作用素, 88
 相互作用項, 103, 104
 確率積分, 11
 一般的な, 38
 確率遷移関数, 74
 空間的減衰性, 62, 126
 第2量子化, 89, 95
 期待値, 142
 紫外発散, 108

 自由 Hamiltonian , 95
 赤外正則条件, 109
 赤外特異条件, 109
 赤外発散, 108, 144
 軟ボゾン, 108, 144

 連続修正, 11
 非再帰性, 16