正準交換関係の階層性と時間作用素

廣島 文生
九大・数理

科学基礎論夏のセミナー 2019 北大
2019 年 9 月 27-29 日

不確定性原理 P, Q

・運動量 P vs 位置 Q

・Heisenberg: "正準交換関係"(1925) と"不確定性原理"(1927) の発見

$$[P, Q] = -i\hbar \qquad \Delta P \cdot \Delta Q \geq \hbar/2$$

・von Neumann: "正準交換関係 $\to$ 不確定性原理" の導出

・von Neumann の一意性定理

$$P \cong -i\hbar\frac{d}{dx}, \qquad Q \cong x$$

その後

・$\sigma(A) = \sqrt{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}$
・$\varepsilon(A)$ 誤差, $\eta(A)$ 擾乱
・小澤の不等式 (Ozawa 03)

$$\varepsilon(Q)\eta(P) + \varepsilon(Q)\sigma(P) + \sigma(Q)\eta(P) \geq \hbar/2$$

$\rightarrow$ 重力波の検出可能性 $\rightarrow$2015 年 9 月 14 日観測成功！
・Branciard・小澤の不等式

$$\varepsilon(Q)^2\sigma(P)^2 + \sigma(Q)^2\eta(P)^2 + 2\varepsilon(Q)\eta(P)\sqrt{\sigma(Q)^2\sigma(P)^2 - \frac{\hbar^2}{4}} \geq \frac{\hbar^2}{4}$$

時間とエネルギーの不確定性原理

・エネルギー vs 時間

$$\Delta E \cdot \Delta T \geq \hbar/2$$

時間とエネルギーの測定

(1) アインシュタイン・ボーア論争
その後: 小澤の不等式による AB 論争の新解釈
(2) 湯川秀樹の中間子理論 m:中間子質量
$mc^2 \times \frac{\text{原子核の直径}\ f}{c} \approx \hbar/2 \rightarrow m = \frac{\lambda\hbar}{c}(\lambda = \frac{1}{2f}) =$
$200 \times$ 電子質量

湯川秀樹の手書き原稿:湯川記念館資料室より抜粋

DEPARTMENT OF PHYSICS
OSAKA IMPERIAL UNIVERSITY.

DATE

NO. 5

Now the ~~two~~ constants g, λ appearing in the equations (4), (5) should be determined by comparing with experiment. For example, assuming the "Platzwechsel" interaction between a neutron and a proton, (2) for the mass defect of H^2 and the probability of scattering of a neutron by a proton can be ~~estimated~~, ~~which from which~~ calculated and compared with experimental data. Thus ~~it is estimated that~~ λ ~~should be a few multiple~~ is estimated to lie between 10^{12} cm and 10^{13} cm and g ~~should be~~ to be a few multiple of elementary charge e.

§ 3. Quantum accompanying the U-field

~~Now~~ In the quantum theory the U-field should be quantized according to the general principle. ~~In free space U~~ Denoting

$$p_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}, \quad \text{etc} \qquad W = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}$$

$$m_U = \lambda\hbar,$$

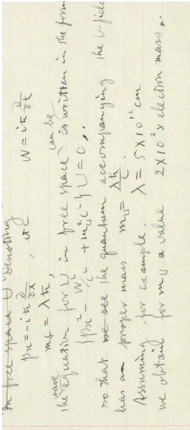
the wave equation for U in free space can be ~~is~~ written in the form

$$\{p_x^2 - W^2/c^2 + m_U^2 c^2\} U = 0,$$

so that ~~we see~~ the quantum accompanying the U-field has ~~an~~ proper mass $m_U = \frac{\lambda\hbar}{c}$.

Assuming, for example, $\lambda = 5 \times 10^{12}$ cm we obtain for m_U a value $2 \times 10^2 \times$ electron mass.

湯川秀樹の手書き原稿:湯川記念館資料室より抜粋



~~In free space U~~ Denoting

$$p_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \text{ etc} \qquad W = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$$

$$m_U c = \lambda \hbar,$$

the wave equation for U in free space can be ~~is~~ written in the form

$$\left\{ p_x^2 - \frac{W^2}{c^2} + m_U^2 c^2 \right\} U = 0,$$

so that ~~we see~~ the quantum accompanying the U-field has ~~a~~ proper mass $m_U = \frac{\lambda \hbar}{c}$.

Assuming, for example, $\lambda = 5 \times 10^{12}$ cm

we obtain for m_U a value $2 \times 10^2 \times$ electron mass.

線形作用素の復習

・$\|Af\| \leq c\|f\|$ のとき有界作用素.
・有界でないとき非有界作用素.
・A の随伴作用素 A^*
・A が対称作用素 $A \subset A^*$
・A が自己共役作用素 $A^* = A$
・A が下から有界 $\inf_{\{\|f\|=1\}}(f, Af) > \exists M$
・対称作用素の自己共役拡大が一つしかないとき本質的自己共役.

例

例 1: $P\lceil_{C_0^\infty}$ は対称作用素 $P\lceil_{H_1}$ は自己共役作用素
例 2: 対称作用素の自己共役拡大は一般に無限個存在.
例 3: $[A,B]=-i$ のとき A,B の少なくとも一つは非有界
例 4: P,Q は非有界
例 5: A 自己共役のとき e^{itA} はユニタリー

CCR 表現と時間作用素

$$E \to \text{ハミルトニアン } H \qquad T \to \text{"時間作用素"}$$

・エネルギーと時間の正準交換関係

$$[H, T] = -i\hbar$$

A. Arai and FH, Ultra-weak time operators of Schrödinger operators, Annals Henri Poincaré 2017.

A, B は複素ヒルベルト空間 $\mathscr{H}$ 上の線形作用素で次の CCR(正準交換関係) を稠密な部分空間 $\mathscr{D} \subset D(AB) \cap D(BA)$ の上で満たす:

$$[A, B] = -i1$$

このとき $(\mathscr{H}, \mathscr{D}, \{A, B\})$ を CCR 表現という.

自由度 d への拡張

線形作用素の族 A_j, B_j は次のような稠密な部分集合

$$\mathscr{D} \subset \cap_{j,k=1}^{d} [D(A_j B_k) \cap D(B_k A_j) \cap D(A_j A_k) \cap D(B_j B_k)]$$

の上で CCR

$$[A_j, B_k] = -i\delta_{jk} 1, \quad [A_j, A_k] = 0 = [B_j, B_k]$$

を満たすとき $(\mathscr{H}, \mathscr{D}, \{A_j, B_j | j = 1, \ldots, d\})$ を CCR 表現という.

Schrödinger 作用素の時間作用素

・Schrödinger 作用素

$$H = -\frac{1}{2}\Delta + V(x) \quad \text{on} \quad L^2(\mathbb{R}^d)$$

の CCR 表現を考察する.
・対称作用素また自己共役作用素 T_H で CCR

$$[H, T_H] = -i1$$

を満たすものが存在すると期待する.
・T_H は H の時間作用素と呼ばれる.

直感的な考察

$[A,B]=-i$ のとき $AB^n=-iNB^{n-1}+B^nA$ なので
$Af(B)=-if'(B)+f(B)A$ と思える. 形式的には

$$T_H = i\frac{d}{dH}$$

ゆえに $f=f(H)$ として

$$T_H f = if' + fT_H$$
$$T_H f'^{-1} f - fT_H f'^{-1} = i$$

対称化して $T_H f'^{-1} + f'^{-1} T_H$ が $f=f(H)$ のペアの候補

正準交換関係の階層性

困難なところ

$H\phi = E\phi \to -i\phi = [H, T]\phi = (H - E)T\phi \to T\phi = -i(H - E)^{-1}\phi$. 故に $\phi \notin D(T)$ が任意の固有ベクトル ϕ で成り立つ.

$$\text{超強時間作用素} \subset \text{強時間作用素} \subset \text{時間作用素}$$

$$\subset \text{弱時間作用素} \subset \text{超弱時間作用素}$$

正準交換関係の階層性

困難なところ

$H\phi = E\phi \to -i\phi = [H, T]\phi = (H-E)T\phi \to T\phi = -i(H-E)^{-1}\phi$. 故に $\phi \notin D(T)$ が任意の固有ベクトル ϕ で成り立つ.

$$\text{超強時間作用素} \subset \text{強時間作用素} \subset \text{時間作用素}$$

$$\subset \text{弱時間作用素} \subset \text{超弱時間作用素}$$

時間作用素構成のアイデア: $H = H_{ac} \oplus H_{sc} \oplus H_p$.

(1) H_{sc} の非存在 $\to H = H_{ac} \oplus H_p$. (2) H_{ac} の強時間作用素の存在. (3) H_p の超弱時間作用素の存在.

参考文献

D. M. Rosenbaum, Super Hilbert space and the quantum-mechanical time operators, *JMP*19 (1969), 1127–1144.
I. Fujiwara, Rational construction and physical signification of the quantum time operator, *Prog. Theor. Phys.* 64 (1980), 18–27.
T. Goto, K. Yamaguchi and N. Sudo, On the time operator in quantum mechanics, *Prog. Theor. Phys.* 66 (1981), 1525–1538, II, 1915–1925.
K. Schmüdgen, On the Heisenberg commutation relation. I, *JFA* 50 (1983), 8–49, II, *Publ. RIMS, Kyoto* 19 (1983), 601–671.
G. Dorfmeister and J. Dorfmeister, Classification of certain pairs of operators (P,Q) satisfying $[P,Q] = -i\mathrm{Id}$, *JFA* 57 (1984), 301–328.
M. Miyamoto, A generalised Weyl relation approach to the time operator and its connection to the survival probability, *JMP* 42 (2001), 1038–1052.
E. A. Galapon, Self-adjoint time operator is the rule for discrete semi-bounded Hamiltonians, *Proc. R. Soc. Lond.* A 458 (2002), 2671–2689.
A.Arai,Generalized weak Weyl relation and decay of quantum dynamics. RMP 17 (2005), 1071-1109.
A.Arai,Spectrum of time operators. LMP 80 (2007),211-221.
A.Arai and Y.Matsuzawa,Time operators of a Hamiltonian with purely discrete spectrum. RMP 20 (2008),951-978.
A.Arai, On the uniqueness of weak Weyl representations of the canonical commutation relation. LMP 85 (2008),15-25.
A.Arai and Y.Matsuzawa,Construction of a Weyl representation from a weak Weyl representation of the canonical commutation relation. LMP 83 (2008),201-211.
G. Muga, R. S. Mayato and I. Egusquiza, *Time in Quantum Mechanics - Vol.1,2*, 2nd Ed., Springer, 2008.
A.Arai, Necessary and sufficient conditions for a Hamiltonian with discrete eigenvalues to have time operators. LMP 87 (2009),67-80.

Weyl 関係と時間作用素

[Weyl 関係] 自己共役作用素のペア (A,B) が Weyl 関係

$$e^{-itA}e^{-isB}=e^{ist}e^{-isB}e^{-itA}$$

を満たすとき Weyl 表現 という.
[弱 Weyl 関係] 自己共役作用素 A と対称作用素 B のペア (A,B) が

$$e^{-itA}D(B)\subset D(B)$$
$$Be^{-itA}\psi=e^{-itA}(B+t)\psi$$

を $\psi\in D(B)$ で満たすとき弱 Weyl 表現という (Miyamoto 01).
・形式的に Weyl 表現, 弱 Weyl 表現の t,s での微分を考えれば次の定理が得られる.

定理

Weyl 関係 $\Longrightarrow$ 弱 Weyl 関係 $\Longrightarrow$CCR

定義 強時間作用素と超強時間作用素

・(H, T) が Weyl 表現のとき自己共役作用素 T を超強時間作用素という.
・(H, T) が弱 Weyl 表現のとき対称作用素 T を強時間作用素という.

・[注 1] (H, T) が Weyl 表現ならば $H \cong \bigoplus P_n$, $T \cong \bigoplus Q_n$.
(von Neumann の一意性定理)
・[注 2] $H > -\infty$,T 強時間作用素のとき T は自己共役拡大が存在しない.
・[注 3] T が強時間作用素のとき $\sigma(H)$ は絶対連続スペクトルのみ.
・[注 4] H が固有値を持つとき H の強時間作用素は存在しない.

$f(P)$ の強時間作用素

以下 $P_j = -i\frac{\partial}{\partial x_j}$, $Q_j = x_j$ とする.

・例 1 $[\frac{1}{2m}P^2, T_{AB}] = -i1$

$$T_{AB} = \frac{m}{2}\sum_{j=1}^{d}(P_j^{-1}Q_j + Q_jP_j^{-1})$$

・例 2 $[f(P), T_f] = -i1$

$$T_f = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{d}(f_j(P)^{-1}Q_j + Q_jf_j(P)^{-1})$$

(FH-Kuribayashi-Matsuzawa(09))

線形形式と時間作用素

H が固有値を持つ場合はどうするか？

定義 弱時間作用素と超弱時間作用素

（１） 稠密な部分空間 $\exists\mathscr{D}\subset D(T)\cap D(H)$ で

$$(H\phi, T\psi)-(T\phi, H\psi)=-i(\phi,\psi),\quad \phi,\psi\in\mathscr{D}$$

を満たすとき (弱 CCR) 対称作用素 T は弱時間作用素という.
（２）対称双線形形式

$$t:\mathscr{D}_1\times\mathscr{D}_2\to C$$

が稠密な部分空間 $\exists\mathscr{E}\subset D(H)\cap\mathscr{D}_1\cap\mathscr{D}_2$ 上で双線形形式 CCR

$$t[H\phi,\psi]-t[\phi,H\psi]=-i(\phi,\psi)\quad \psi,\phi\in\mathscr{E}$$

を満たすとき超弱時間作用素という.

正準交換関係の階層性

自己共役作用素 H に対して, いわゆる"時間作用素 T_H"を定義したい. 以下のような階層性が存在する.

$$\begin{gathered}\text{超強時間作用素} \subset \text{強時間作用素} \subset \text{時間作用素} \\ \subset \text{弱時間作用素} \subset \text{超弱時間作用素}\end{gathered}$$

(注)T が超強時間作用素のとき $H \cong \oplus P_n$ と $T \cong \oplus Q_n$ が成り立つ.
(注) T が弱時間作用素 ならば $t_T : \mathscr{H} \times D(T) \to C$:

$$t_T[\phi, \psi] = (\phi, T\psi), \quad \phi \in \mathscr{H}, \psi \in D(T)$$

は超弱時間作用素.

絶対連続スペクトルと強時間作用素

2 つの自己共役作用素 H,H'. H の強時間作用素 T_H から H' の強時間作用素 $T_{H'}$ を散乱理論を応用して構成する方法.

漸近完全性・散乱理論

H, H' は次を満たす. (1)$\exists W_\pm = \text{s-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH'} J e^{-itH} P_{ac}(H)$. (2)$\lim_{t\to\pm\infty} \|Je^{-itH} P_{ac}(H)\psi\| = \|P_{ac}(H)\psi\|$. (3)$\mathrm{Ran}(W_\pm) = \mathscr{H}_{ac}(H')$. このとき $U_\pm = W_\pm \lceil \mathscr{H}_{ac}(H) : \mathscr{H}_{ac}(H) \to \mathscr{H}_{ac}(H')$ はユニタリーで $H'_{ac} = U_\pm H_{ac} U_\pm^{-1}$.

[例] $H = -\frac{1}{2}\Delta$ と $H' = H + V$ が漸近完全性の条件を満たせば, $T_{H'} = U_\pm T_{AB} U_\pm^{-1}$ は H'_{ac} の強時間作用素.

絶対連続スペクトルと強時間作用素

2 つの自己共役作用素 H,H'. H の強時間作用素 T_H から H' の強時間作用素 $T_{H'}$ を散乱理論を応用して構成する方法.

漸近完全性・散乱理論

H, H' は次を満たす. (1)$\exists W_\pm = \text{s-}\lim_{t\to\pm\infty} e^{itH'} J e^{-itH} P_{ac}(H)$. (2)$\lim_{t\to\pm\infty}\|Je^{-itH}P_{ac}(H)\psi\| = \|P_{ac}(H)\psi\|$. (3)$\mathrm{Ran}(W_\pm) = \mathscr{H}_{ac}(H')$. このとき $U_\pm = W_\pm\lceil\mathscr{H}_{ac}(H) : \mathscr{H}_{ac}(H) \to \mathscr{H}_{ac}(H')$ はユニタリーで $H'_{ac} = U_\pm H_{ac} U_\pm^{-1}$.

定理 **Arai (06),** 強時間作用素

(1)–(3), H_{ac} の強時間作用素 T が存在すると仮定する. このとき $T'_\pm = U_\pm T U_\pm^{-1}$ は H'_{ac} の強時間作用素. つまり $\{H_{ac}, T\}$ が弱 Weyl 関係を満たせば $\{H'_{ac}, T'\}$ も弱 Weyl 関係を満たす.

[例] $H = -\frac{1}{2}\Delta$ と $H' = H + V$ が漸近完全性の条件を満たせば, $T_{H'} = U_\pm T_{AB} U_\pm^{-1}$ は H'_{ac} の強時間作用素.

離散スペクトルと超弱時間作用素

[問題] $H = H_{ac} \oplus H_{sc} \oplus H_p$ で H_{ac} の強時間作用素 $T_{H_{ac}}$ は散乱理論で構成できる. それでは H_p の時間作用素?

定理 Galapon (02), Arai-Matsuzawa (08)

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正規直交系. $\sigma(H_p) = \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $H_p e_j = E_j e_j$, E_j は単純で $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{E_j^2} < \infty$ とする. このとき

$$T\phi = i \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{m \neq n} \frac{(e_m, \phi)}{E_n - E_m} \right) e_n, \quad \phi \in D = LH\{e_n - e_m\}$$

は $[H_p, T]\phi = -i\phi$. つまり $(\mathscr{H}, D, \{H_p, T\})$ は CCR 表現.

離散スペクトルと超弱時間作用素

[問題] $H = H_{ac} \oplus H_{sc} \oplus H_p$ で H_{ac} の強時間作用素 $T_{H_{ac}}$ は散乱理論で構成できる. それでは H_p の時間作用素?

定理 Galapon (02), Arai-Matsuzawa (08)

$\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ は正規直交系. $\sigma(H_p) = \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ で $H_p e_j = E_j e_j$, E_j は単純で $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{E_j^2} < \infty$ とする. このとき

$$T\phi = i\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m\neq n}\frac{(e_m,\phi)}{E_n - E_m}\right)e_n, \quad \phi \in D = LH\{e_n - e_m\}$$

は $[H_p, T]\phi = -i\phi$. つまり $(\mathscr{H}, D, \{H_p, T\})$ は CCR 表現.

定理 Arai+FH (17), 超弱時間作用素

$[E_n \to \infty]$ $\lim_{n\to\infty} E_n = \infty$ のとき時間作用素 $\exists T$.

$[E_n \to 0]$ $E_n < 0, \lim_{n\to\infty} E_n = 0, 0 \notin \sigma(H_p)$ のとき超弱時間作用素 $\exists T$.

H の超弱時間作用素

自己共役作用素 $H = H_{ac} \oplus H_{sc} \oplus H_p$ は $S(\mathscr{H})$ に含まれる $\Longleftrightarrow$

(H.1) $\sigma(H_{sc}) = \emptyset$.

(H.2) $\sigma(H_{ac}) = [0, \infty)$ かつ H_{ac} の $\exists$ 強時間作用素 T_{ac}.

(H.3) $\sigma(H_p) = \{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, $E_1 < E_2 < \cdots < 0$, $\lim_{n\to\infty} E_n = 0$

(その結果 $0 \notin \sigma(H_p)$).

定理 Arai-FH(17), 超弱時間作用素

$H \in S(\mathscr{H})$ のとき $\exists$ 超弱時間作用素 t_H.

証明 $H = H_p \oplus H_{ac}$.

・H_{ac} は強時間作用素 T_{ac} を持つ (仮定)

・H_p は超弱時間作用素 t_p を持つ

・$t_H : (\mathscr{H}_{ac}(H) \oplus \mathscr{D}_p) \times (D(T_{ac}) \oplus \mathscr{D}_p) \to C$ を次で定義すれば

$$t_H[\phi_1 \oplus \phi_2, \psi_1 \oplus \psi_2] = (\phi_1, T_{ac}\psi_1) + t_p[\phi_2, \psi_2].$$

これは H の超弱時間作用素.

例 1 Agmon ポテンシャル ($E_n \to 0$)

$d \geq 3$, $U \in L^\infty(R^3)$, $U \leq 0$, 連続, 回転対称と仮定し $U(x) = -1/|x|^\alpha$ が $|x| > R$ で成り立つとする. ここで $0 < \alpha < 1$ かつ $R > 0$.

$$V(x) = \frac{U(x)}{(1+|x|^2)^{1/2+\varepsilon}},$$

$2\varepsilon + \alpha < 2$ のとき H は $S(\mathscr{H})$ なので H は超弱時間作用素を持つ.

例 2 水素原子 ($E_n \to 0$)

水素原子 $H_{\mathrm{hyd}} = -\Delta - \gamma/|x|$ は自己共役で $D(H_{\mathrm{hyd}}) = D(-\Delta)$. クーロンポテンシャル $-\gamma/|x|$ は $d = 3$ で Agmon ポテンシャルではない. しかし H_{hyd} は $S(\mathscr{H})$ なので超弱時間作用素を持つ.

まとめ

(1) $H = -\frac{1}{2}\Delta + V(x)$ の超弱時間作用素 t は

$$t(H\phi,\psi) - t(H\psi,\phi)^* = -i(\phi,\psi)$$

(2) t の定義域は稠密.
(3) $H = H_{ac} \oplus H_{sc} \oplus H_p$
(3-1) $\sigma(H_{sc}) = \emptyset$ と $0 \notin \sigma(H_p)$ を仮定する.
(3-2) $\#\sigma(H_p) = \infty$ または $\#\sigma(H_p) = 0$ を仮定する.
(3-3) H_p の超弱時間作用素または時間作用素が存在する.
(3-4) H_{ac} の強時間作用素が散乱理論から構成できる.
(4) 非可換調和振動子の時間作用素が存在する.
(5) 超弱時間作用素が存在する V の例を与えた.
(6) 水素原子 H_{hyd} の超弱時間作用素が存在する.