スピン・ボゾン模型

Fumio Hiroshima (廣島文生)

Faculty of Mathematics, Kyushu University

Fukuoka, 819-0395, Japan

hiroshima@math.kyushu-u.ac.jp

1　スピン・ボゾン模型

1.1　はじめに

場の量子論では様々な素粒子模型が研究対象になる．典型的な例は電子・光子の相互作用を記述する量子電磁力学や, 核子と中間子の相互作用を記述する強い相互作用などである．ここで紹介するスピン・ボゾン模型は 2 レベル原子がスカラー量子場と線形に結合したおもちゃのような模型であるが, その数学的解析は本質的な困難さを含んでいる．つまり相互作用がスイッチオフ状態のとき 2 レベル原子の点スペクトル $\{-\varepsilon,\varepsilon\}$ が連続スペクトルに埋め込まれているので, 相互作用がスイッチオン状態のスペクトル解析が埋蔵固有値の摂動問題となるのである．

連続パス空間上に定義されるギブス測度は場の量子論に現れる基底状態の研究に重要な役割を果たすことはよく知られている．例えば [LHB11, Chapter 6] や [LMS02, BHLMS02, BH09] を参照せよ．ギブス測度は通常ブラウン運動, 外場ポテンシャル, ペアポテンシャルによって定義される測度 μ_T の $T\to\infty$ の極限として定義される．多くの場合この極限の存在は, 測度族 $\{\mu_T\}_T$ の前コンパクト性を証明して達成される．

この論文は [HHL12] の要約版である．ジャンプをもつパス空間上の測度を使って, スピン・ボゾンハミルトニアンの基底状態の存在と一意性を示し, 次にこの基底状態に付随したギブス測度を構成し, 最後に基底状態の性質を非摂動的に調べることを目標とする．

非局所的な運動項 $\sqrt{-\Delta}$ やスピン 1/2 をもつシュレディンガー型ハミルトニアンのファインマン・カッツの公式はレヴィー過程を用いて表現できることが [Hir13, HL08, HIL12a, HIL12b] で知られている．[HL08] ではスピンをもつパウリ・フィールツ模型の熱半群のファインマンカッツ公式を導いた．[HIL12a, HIL12b] ではスピンを含む相対論的シュレディンガー作用素の固有状態の空間減衰の様子をファインマン・カッツ公式をつかって調べた．

2007 年ころには既にスピン・ボゾンハミルトニアンが作る熱半群のファインマン・カッツ公式は得られていたが, ギブス測度の存在が証明できなかった．測度族の tightness をいえばいいのだが, それが cádlág パス空間上の測度族であるために tightness の一般論にのせづらかった．そこで弱収束の証明をあきらめて, 局所弱収束の証明に目標を定め直してやっと結果を出すことができた．幸運にも重要な応用は局所弱収束で十分であった．

スピン・ボゾンハミルトニアンのスペクトルは [AMRZ08, FN88, HH10, SD85, Spo89, SSW90, HS95, BS98, AH97, Hir99, Ger00, Hir01, Hir02] などで調べられている．特に [AH97] ではスピン・ボゾン模型の一般化が作用素論的に研究されている．そこでは基底状態の存在・一意性が示されている．この論文ではスピン・ボゾン模型に対して [AH97] で示されたものと同じ結果を弱い条件の下で示す．また [SD85, Spo89, SSW90, HS95] では測度論的な方法

でスピン・ボゾン模型のスペクトルが考察されているがギブス測度については何も言及されていない. これから考察するように, スピン・ボゾンハミルトニアンに対応するギブス測度は外場ポテンシャルをもたず, 見かけ上ペアポテンシャルしかもたない. これは今まで知られているギブス測度とは大きく異なる点である.

第 2 章ではスピン・ボゾンハミルトニアンを適当なヒルベルト空間上の自己共役作用素として再定義し, 確率論的な準備をする. 第 3 章では基底状態の存在と一意性を示し, さらに基底状態のパリティーを与える. 第 4 章では基底状態に付随したギブス測度の存在を示す. この章がこの論文のメインである. 第 5 章ではギブス測度をつかって様々な観測量 (自己共役作用素) に対する基底状態の期待値を与え, 基底状態のガウス domination, ボゾン数の超指数的減衰性, pull-through 公式などを示す. 最後に第 6 章はスピン・ボゾンハミルトニアンの van Hove 表現を与える.

1.2 定義

基本的な概念の定義から始める. $\mathscr{F} = \bigoplus_{n=0}^\infty \left(\otimes_{\rm sym}^n L^2(\mathbb{R}^d)\right)$ は $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のボゾンフォック空間である. $\Omega_{\rm b} = 1 \oplus 0 \oplus 0 \oplus \cdots \in \mathscr{F}$ はフォック真空といわれる. 生成作用素と消滅作用素をそれぞれ $a(f)$, $a^\dagger(f)$, $f, g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, で表し, それらは正準交換関係 (CCR) $[a(f), a^\dagger(g)] = (\bar{f}, g)$, $[a(f), a(g)] = 0 = [a^\dagger(f), a^\dagger(g)]$ をみたす. 形式的に $a^\sharp(f) = \int a^\sharp(k) f(k) dk$ と表すことがある. $d\Gamma(T)$ は作用素 T の第 2 量子化作用素をあらわす. $\omega(k) = |k|$ を $L^2(\mathbb{R}^d)$ 上のかけ算作用素とおもって $H_{\rm f} = d\Gamma(\omega)$ は自由ハミルトニアンといわれている. 作用素

$$\phi_{\rm b}(\hat{h}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \left(a^\dagger(k)\hat{h}(-k) + a(k)\hat{h}(k)\right) dk \tag{1.1}$$

はスカラー場作用素といわれるものである. ここで $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ で, $\hat{h}$ はフーリエ変換を表す. σ_x, σ_y, σ_z は 2×2 パウリ行列を表すとしよう: $\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$, $\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. ヒルベルト空間 $\mathscr{H} = \mathbb{C}^2 \otimes \mathscr{F}$ を考えよう. スピン・ボゾンハミルトニアンは

$$H_{\rm SB} = \varepsilon\sigma_z \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\rm f} + \alpha\sigma_x \otimes \phi_{\rm b}(\hat{h}) \tag{1.2}$$

で定義される $\mathscr{H}$ 上の作用素である. ここで $\alpha \in \mathbb{R}$ は結合定数, $\varepsilon \geq 0$ は 2 レベル原子のスペクトルギャップを表すパラメターである.

2 ファインマン・カッツ公式

2.1 ユニタリー変換

$\mathbb{R}^3$ 上の回転群は $SU(2)$ 上に adjoint 表現 をもつ. $n \in \mathbb{R}^3$ は単位ベクトルで $\theta \in [0, 2\pi)$ とする. このとき $e^{(i/2)\theta n\cdot\sigma}$ は $e^{(i/2)\theta n\cdot\sigma}\sigma_\mu e^{-(i/2)\theta n\cdot\sigma} = (R\sigma)_\mu$ をみたす. ここで R は 3×3 行列で n の周りの角度 θ の回転を表し, $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ である. 特に $n = (0, 1, 0)$ と $\theta = \pi/2$ に対して, $e^{(i/2)\theta n\cdot\sigma}\sigma_x e^{-(i/2)\theta n\cdot\sigma} = \sigma_z$, $e^{(i/2)\theta n\cdot\sigma}\sigma_z e^{-(i/2)\theta n\cdot\sigma} = -\sigma_x$ が成立する.

$$U = \exp\left(i\frac{\pi}{4}\sigma_y\right) \otimes \mathbb{1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \otimes \mathbb{1} \tag{2.1}$$

としよう．これは $\mathscr{H}$ 上のユニタリーになり，H_{SB} は

$$H = UH_{\mathrm{SB}}U^* = -\varepsilon\sigma_x \otimes \mathbb{1} + \mathbb{1} \otimes H_{\mathrm{f}} + \alpha\sigma_z \otimes \phi_{\mathrm{b}}(\hat{h}) \tag{2.2}$$

のように変換される．このとき $H = \begin{bmatrix} H_{\mathrm{f}} + \alpha\phi_{\mathrm{b}}(\hat{h}) & -\varepsilon \\ -\varepsilon & H_{\mathrm{f}} - \alpha\phi_{\mathrm{b}}(\hat{h}) \end{bmatrix}$ と行列表示される．もし $\hat{h}/\sqrt{\omega} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ かつ h が実ならば $\phi_{\mathrm{b}}(\hat{h})$ は対称でかつ H_{f} に対して相対無限小になる．その結果 Kato-Rellich の定理により H は $D(H_{\mathrm{f}})$ で自己共役かつ下から有界になる．$\mathbb{Z}_2 = \{-1, +1\}$ は 2 次の加法群とする．$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi(+) \\ \Psi(-) \end{bmatrix} \in \mathscr{H}$ に対して

$$H\Psi = \begin{bmatrix} (H_{\mathrm{f}} + \alpha\phi_{\mathrm{b}}(\hat{h}))\Psi(+) - \varepsilon\Psi(-) \\ (H_{\mathrm{f}} - \alpha\phi_{\mathrm{b}}(\hat{h}))\Psi(-) - \varepsilon\Psi(+) \end{bmatrix}.$$

よって H は $L^2(\mathbb{Z}_2; \mathscr{F}) = \left\{ f : \mathbb{Z}_2 \to \mathscr{F} \,\middle|\, \|f\|_{L^2(\mathbb{Z}_2;\mathscr{F})} = \sqrt{\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2} \|f(\sigma)\|^2_{\mathscr{F}}} < \infty \right\}$ 上の作用素

$$(\tilde{H}\Psi)(\sigma) = \left(H_{\mathrm{f}} + \alpha\sigma\phi_{\mathrm{b}}(\hat{h})\right)\Psi(\sigma) + \varepsilon\Psi(-\sigma), \quad \sigma \in \mathbb{Z}_2, \tag{2.3}$$

と思える． 以下，$\mathscr{H}$ と $L^2(\mathbb{Z}_2; \mathscr{F})$ を $\mathscr{H} \ni \begin{bmatrix} \Psi(+) \\ \Psi(-) \end{bmatrix} \mapsto \Psi(\sigma) = \begin{cases} \Psi(+), & \sigma = +1, \\ \Psi(-), & \sigma = -1 \end{cases} \in L^2(\mathbb{Z}_2; \mathscr{F})$，で同一視し，$H$ の代わりに $\tilde{H}$ を考察し，同じ記号 H を $\tilde{H}$ の代わりに使う．

2.2 ポアソン積分

$(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$ を intensity 1 の (Ω, Σ, P) 上のポアソン過程とする．$D = \{t \in \mathbb{R} \,|\, N_{t+} \neq N_{t-}\}$ でパスのジャンプする点を表し，ポアソン過程による積分を

$$\int_{(s,t]} f(r, N_r)dN_r = \sum_{\substack{r\in D \\ r\in(s,t]}} f(r, N_r)$$

で定める (詳しくは [HL08] の Appendix を参照せよ)．$\int_{(s,t]} \cdots dN_r$ を $\int_s^{t+} \cdots dN_r$ のように書き表す．g を連続とする．$\int_s^{t+} g(r, N_{-r})dN_r$ は t について右連続で $g(r, N_{-r})$ は左連続になっている．確率過程 $\sigma_t = \sigma(-1)^{N_t}$ を定義する．これはスピンをあらわすことになる．

命題 2.1 確率過程 $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$ は次の性質を満たす．

独立性: N_t と N_s は独立 $s \leq 0 \leq t$, $s \neq t$.

マルコフ性: $(N_t)_{t\geq 0}$ と $(N_t)_{t\leq 0}$ は各々 $\mathscr{F}_t^+ = \sigma(N_s, 0 \leq s \leq t)$ と $\mathscr{F}_t^- = \sigma(N_s, t \leq s \leq 0)$ に関してマルコフ，*i.e.*, $\mathbb{E}_P\left[N_{t+s}|\mathscr{F}_s^+\right] = \mathbb{E}_P^{N_s}\left[N_t\right]$, $\mathbb{E}_P\left[N_{-t-s}|\mathscr{F}_{-s}^-\right] = \mathbb{E}_P^{N_{-s}}\left[N_{-t}\right]$.

鏡映対称性: N_t と N_{-t} は同分布 *i.e.*, $\mathbb{E}_P[f(N_{-t})] = \mathbb{E}_P[f(N_t)] = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\dfrac{|t|^n}{n!}e^{-|t|}$.

シフト不変性: $\sigma_t=(-1)^{N_t}$, $t\in\mathbb{R}$, は, シフト不変, *i.e.*,

$$\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_P\left[\prod_{j=0}^n f_j(\sigma_{t_j})\right]=\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_P\left[\prod_{j=0}^n f_j(\sigma_{s+t_j})\right],\quad s\in\mathbb{R}.$$

2.3　ユークリッド場

ファインマン・カッツ公式をえるためにフォック空間のシュレディンガー表現を採用する. シュレディンガー表現ではフォック空間 $\mathscr{F}$ は 確率測度空間 (Q,μ) 上の L^2 空間として表される. $\phi(f)$, $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$, はガウス型確率変数で平均がゼロ, 分散は $\mathbb{E}_\mu[\phi(f)\phi(g)]=\frac{1}{2}(f,g)$ である. かけ算作用素 $\phi(f)$ は $\phi_{\rm b}(\hat{f})$ に, Q 上の恒等作用素 $\mathbb{1}$ は真空 $\Omega_{\rm b}\in\mathscr{F}$ に対応している. 次に自由ハミルトニアン $H_{\rm f}$ に対応する確率変数を導入する. $L^2(\mathbb{R}^d)$ と $L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ の間には次で定義される等長作用素族 $j_s:L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ が存在する:

$$\widehat{j_sf}(k,k_0)=\frac{e^{-itk_0}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\omega(k)}{|k_0|^2+\omega(k)^2}}\hat{f}(k).$$

$\Phi_{\rm E}(j_sf)$ は $(Q_{\rm E},\mu_{\rm E})$ をユークリッド場に対応する確率測度空間とする. $(Q_{\rm E},\mu_{\rm E})$ 上のガウス型確率変数で $j_sf\in L^2(\mathbb{R}^{d+1})$ をインデックスにもつ. その平均はゼロ, 分散は

$$\mathbb{E}_{\mu_{\rm E}}[\Phi_{\rm E}(j_sf)\Phi_{\rm E}(j_tg)]=\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|s-t|\omega(k)}\overline{\hat{f}(k)}\hat{g}(k)dk.$$

また $\{J_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ は $L^2(Q)$ から $L^2(Q_{\rm E})$ への等長作用素の族で次で定義される:

$$J_s\mathbb{1}=\mathbb{1},\quad J_s{:}\phi(f_1)\cdots\phi(f_n){:}={:}\Phi_{\rm E}(j_sf_1)\cdots\Phi_{\rm E}(j_sf_n){:}.\tag{2.4}$$

ここで $:X:$ はウイック積を表す. 特に $(J_s\Phi,J_t\Psi)_{L^2(Q_E)}=(\Phi,e^{-|t-s|H_{\rm f}}\Psi)_{L^2(Q)}$ となる. 以降 $\mathscr{H}$ と $\mathbb{C}^2\otimes L^2(Q)$ とを同一視する.

命題 2.2 $\Phi,\Psi\in\mathscr{H}$, $h\in L^2(\mathbb{R}^d)$ は実数値関数としよう. このとき

$$(\varepsilon\neq 0)\quad(\Phi,e^{-tH}\Psi)_{\mathscr{H}}=e^t\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_P\mathbb{E}_{\mu_{\rm E}}\left[\overline{J_0\Phi(\sigma_0)}e^{-\alpha\Phi_{\rm E}\left(\int_0^t\sigma_sj_shds\right)}\varepsilon^{N_t}J_t\Psi(\sigma_t)\right]\tag{2.5}$$

$$(\varepsilon=0)\quad(\Phi,e^{-tH}\Psi)_{\mathscr{H}}=e^t\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mu_{\rm E}}\left[\overline{J_0\Phi(\sigma)}e^{-\alpha\Phi_{\rm E}\left(\sigma\int_0^tj_shds\right)}J_t\Psi(\sigma)\right].\tag{2.6}$$

証明: $\varepsilon\neq 0$ としよう. (2.3) から $H\Psi(\sigma)=(H_{\rm f}+\alpha\phi(h))\Psi(\sigma)-e^{\log\varepsilon}\Psi(-\sigma)$ が従う. [HL08, Theorem 4.11] によって

$$(\Phi,e^{-tH}\Psi)_{\mathscr{H}}=e^t\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_P\mathbb{E}_{\mu_{\rm E}}\left[\overline{J_0\Phi(\sigma_0)}e^{-\alpha\int_0^t\sigma_s\Phi_{\rm E}(j_sf)ds+\int_0^{t+}\log\varepsilon dN_s}J_t\Psi(\sigma_t)\right]$$

となる. $\int_0^{t+}\log\varepsilon dN_s=N_t\log\varepsilon$ なので (2.5) が従う. $\varepsilon=0$ としよう. $\varepsilon\to 0$ のとき, (2.5) の右辺の被積分関数は $\{N_t\geq 1\}$ 上で消える. 一方 $\{N_t=0\}$ 上で消えない. よって (2.6) が次より得られる:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}(\Phi,e^{-tH}\Psi)_{\mathscr{H}}&=\lim_{\varepsilon\to 0}e^t\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_P\mathbb{E}_{\mu_{\rm E}}\left[\overline{J_0\Phi(\sigma_0)}e^{-\alpha\Phi_{\rm E}\left(\int_0^t\sigma_sj_shds\right)}\varepsilon^{N_t}J_t\Psi(\sigma_t)\right]\\&=e^t\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mu_{\rm E}}\left[\overline{J_0\Phi(\sigma)}e^{-\alpha\Phi_{\rm E}\left(\sigma\int_0^tj_shds\right)}J_t\Psi(\sigma)\right].\end{aligned}$$

終

この命題より熱半群を積分表示することができる:

$$e^{-tH}\Phi(\sigma) = e^t \mathbb{E}_P\left[J_0^* e^{\Phi_{\mathrm{E}}(-\alpha\int_0^t \sigma_r j_r h dr)} J_t \Phi(\sigma_t)\right]. \tag{2.7}$$

$\mathbb{1}_{\mathscr{H}} = \mathbb{1}_{L^2(\mathbb{Z}_2)} \otimes \mathbb{1}_{L^2(Q)}$ とおこう．$\mathbb{1}_{\mathscr{H}}$ に関する熱半群の期待値はあとで非常に重要になってくる．

系 2.3 $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は実数値とする．このとき

$$(\mathbb{1}_{\mathscr{H}}, e^{-tH}\mathbb{1}_{\mathscr{H}}) = e^t \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_P\left[\varepsilon^{N_t} e^{\frac{\alpha^2}{2}\int_0^t dr \int_0^t W(N_r - N_s, r-s)ds}\right], \tag{2.8}$$

ここで $W(x,s) = \frac{(-1)^x}{2}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-|s|\omega(k)}|\hat{h}(k)|^2 dk$.

証明: 命題 2.2 により $(\mathbb{1}_{\mathscr{H}}, e^{-tH}\mathbb{1}_{\mathscr{H}}) = e^t \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_P\left[\varepsilon^{N_t} e^{\frac{\alpha^2}{2}\int_0^t dr \int_0^t W(N_r + N_s, r-s)ds}\right]$. さらに 恒等式 $W(N_r + N_s, r-s) = W(N_r - N_s, r-s)$ に注意すれば系が従う． **終**

3 スピン・ボゾンハミルトニアンの基底状態

以降 $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$ でかつ実数値を断りなしに仮定する．

3.1 正値性改良型半群

$E = \inf\sigma(H)$ とし, $\mathrm{Ker}(H-E)$ の次元を評価したい．

系 3.1 $\varepsilon \neq 0$ とする．このとき e^{-tH}, $t>0$, は正値性改良型半群 *i.e.*, $(\Psi, e^{-tH}\Phi) > 0$ が任意の $\Psi, \Phi \geq 0$ *(*$\Psi \not\equiv 0 \not\equiv \Phi$*)* で成立する．

証明: $(\Psi, e^{-tH}\Phi) \geq 0$ は自明なので $(\Psi, e^{-tH}\Phi) \neq 0$ を示す．$(\Psi, e^{-tH}\Phi) = 0$ を仮定する．このとき J_t は正値性保存作用素なので $\mathbb{E}_P\left[\left(J_0\Psi(\sigma), e^{\Phi_{\mathrm{E}}\left(-\alpha\int_0^t \sigma_s j_s h ds\right)}\varepsilon^{N_t} J_t\Phi(\sigma_t)\right)_{L^2(Q_{\mathrm{E}})}\right] = 0$. これは $\mathrm{supp}(J_0\Psi(\sigma)) \cap \mathrm{supp}(J_t\Phi(\sigma_t)) = \emptyset$ が殆ど至るところで成立するといっている．つまり $0 = (J_0\Psi(\sigma), J_t\Phi(\sigma_t)) = (\Psi(\sigma), e^{-tH_{\mathrm{f}}}\Phi(\sigma_t))$. しかし $e^{-tH_{\mathrm{f}}}$ は正値性改良型なので $\Psi(\sigma) \equiv 0$ または $\Phi(\sigma_t) \equiv 0$. これは矛盾であるから $(\Psi, e^{-tH}\Phi) > 0$ が成立する． **終**

3.2 基底状態の存在と一意性

$\varepsilon = 0$ のとき $H = \begin{bmatrix} H_{\mathrm{f}} + \alpha\phi(h) & 0 \\ 0 & H_{\mathrm{f}} - \alpha\phi(h)\end{bmatrix}$ のように対角化される．対角成分に表れた $H_{\mathrm{f}} + \alpha\phi(h)$ は van Hove ハミルトニアンとよばれている．それが一意的な基底状態をもつ必

要十分条件は $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ である. つまり $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ のとき, そのときに限り H は2重に縮退した基底状態をもつ. そこで $\varepsilon \neq 0$ の場合を考える. $\Phi_T = e^{-T(H-E)}\mathbb{1}_{\mathscr{H}}$, $T \geq 0$, とし

$$\gamma(T) = \frac{(\mathbb{1}_{\mathscr{H}}, \Phi_T)^2}{\|\Phi_T\|^2} = \frac{(\mathbb{1}_{\mathscr{H}}, e^{-TH}\mathbb{1}_{\mathscr{H}})^2}{(\mathbb{1}_{\mathscr{H}}, e^{-2TH}\mathbb{1}_{\mathscr{H}})}. \tag{3.1}$$

と定める. 簡単に次を示すことができる:

命題 3.2 H が基底状態をもつための必要十分条件は $\lim_{T\to\infty} \gamma(T) > 0$.

系 2.3 から

$$\|\Phi_T\|^2 = e^{2TE} \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_P \left[\varepsilon^{N_T} e^{\frac{\alpha^2}{2}\int_{-T}^T dt \int_{-T}^T W(N_t - N_s, t-s)ds} \right], \tag{3.2}$$

$$(\mathbb{1}_{\mathscr{H}}, \Phi_T) = e^{TE} \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_P \left[\varepsilon^{N_T} e^{\frac{\alpha^2}{2}\int_0^T dt \int_0^T W(N_t - N_s, t-s)ds} \right]. \tag{3.3}$$

さらに

$$\left| \int_{-T}^0 dt \int_0^T W(N_t - N_s, t-s)ds \right| \leq \frac{1}{2}\|\hat{h}/\omega\|^2 \tag{3.4}$$

が T とパスの両方に一様に成立することに注意せよ.

定理 3.3 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする. このとき H は一意的な基底状態をもつ.

証明: $\int_{-T}^T dt \int_{-T}^T W ds = \int_{-T}^0 dt \int_{-T}^0 W ds + \int_0^T dt \int_0^T W ds + 2\int_{-T}^0 dt \int_0^T W ds$ と (3.4) から,

$$\|\Phi_T\|^2 \leq e^{2TE} \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_P \left[\varepsilon^{N_T} e^{\frac{\alpha^2}{2}(\int_{-T}^0 dt \int_{-T}^0 dsW(N_t-N_s,t-s) + \int_0^T dt \int_0^T dsW(N_t-N_s,t-s) + \|\hat{h}/\omega\|^2)} \right] \tag{3.5}$$

をえる. N_t と N_{-s} の独立性と鏡映対称性から

$$\begin{aligned}
\|\Phi_T\|^2 &\leq e^{2TE} \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2} \left(\mathbb{E}_P \left[\varepsilon^{N_T} e^{\frac{\alpha^2}{2}\int_0^T dt \int_0^T dsW(N_t-N_s,t-s)} \right] \right)^2 e^{\frac{\alpha^2}{2}\|\hat{h}/\omega\|^2} \\
&\leq \left(e^{TE} \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_P \left[\varepsilon^{N_T} e^{\frac{\alpha^2}{2}\int_0^T dt \int_0^T dsW(N_t-N_s,t-s)} \right] \right)^2 e^{\frac{\alpha^2}{2}\|\hat{h}/\omega\|^2} = (\mathbb{1}_{\mathscr{H}}, \Phi_T)^2 e^{\frac{\alpha^2}{2}\|\hat{h}/\omega\|^2}.
\end{aligned}$$

その結果 $\gamma(T) \geq e^{-\frac{\alpha^2}{2}\|\hat{h}/\omega\|^2}$ となる. つまり基底状態 φ_{g} が存在する. 系 3.1 から φ_{g} が正の関数としていいので, 基底状態は定数倍をのぞいて一意である. **終**

3.3 パリティー対称性

H_{SB} はパリティー対称性をもつ. これをみよう. $P = \sigma_z \otimes (-1)^N$ とする. ここで $N = d\Gamma(\mathbb{1})$ は個数作用素. $\mathrm{Spec}(\sigma_z) = \{-1, 1\}$ と $\mathrm{Spec}(N) = \{0, 1, 2, ...\}$ から $\mathrm{Spec}(P) = \{-1, 1\}$ が従う. $\mathscr{H}$ と $\mathscr{F}_\uparrow \oplus \mathscr{F}_\downarrow$ を同一視する. ここで $\mathscr{F}_\uparrow$ と $\mathscr{F}_\downarrow$ は $\mathscr{F}$ のコピーである. そうすると

$\sigma_X=\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$ は $\sigma_X\begin{bmatrix}\Psi(+)\\\Psi(-)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\Psi(+)+b\Psi(-)\\c\Psi(+)+d\Psi(-)\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}\Psi(+)\\\Psi(-)\end{bmatrix}\in\mathscr{F}_\uparrow\oplus\mathscr{F}_\downarrow$ と作用する．さらに $\mathscr{F}$ は $\mathscr{F}_\mathrm{e}\oplus\mathscr{F}_\mathrm{o}$ と分解できる．ここで $\mathscr{F}_\mathrm{e}$ と $\mathscr{F}_\mathrm{o}$ は $\mathscr{F}$ の部分空間で偶数個のボゾン，奇数個のボゾンからなる空間を表す．i.e., $\mathscr{F}_\mathrm{e}=\oplus_{m=0}^\infty\mathscr{F}_{2m}$ and $\mathscr{F}_\mathrm{o}=\oplus_{m=0}^\infty\mathscr{F}_{2m+1}$. $\mathscr{F}$ から $\mathscr{F}_\mathrm{e}$ と $\mathscr{F}_\mathrm{o}$ への射影を P_e と P_o で表す．$\mathscr{H}_+=P_\mathrm{e}\mathscr{F}_\uparrow\oplus P_\mathrm{o}\mathscr{F}_\downarrow$, $\mathscr{H}_-=P_\mathrm{o}\mathscr{F}_\uparrow\oplus P_\mathrm{e}\mathscr{F}_\downarrow$ とおく．

補題 3.4 次が成立する

(1) $\mathscr{H}$ は $\mathscr{H}_+\oplus\mathscr{H}_-$ と同一視できる．ただし

$$\mathscr{F}_\uparrow\oplus\mathscr{F}_\downarrow\ni\begin{bmatrix}\Psi(+)\\\Psi(-)\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}\Psi(+)_\mathrm{e}\\\Psi(-)_\mathrm{o}\end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix}\Psi(+)_\mathrm{o}\\\Psi(-)_\mathrm{e}\end{bmatrix}\in\mathscr{H}_+\oplus\mathscr{H}_-.$$

ここで $\Psi(\pm)_\mathrm{e}=P_\mathrm{e}\Psi(\pm)$, $\Psi(\pm)_\mathrm{o}=P_\mathrm{o}\Psi(\pm)$.

(2) $[H_\mathrm{SB},P]=0$.

(3) $\mathscr{H}_\pm$ は P の固有値 ±1 対応した固有空間である．

(4) H_SB は $H_\mathrm{SB}=H_\mathrm{SB}\lceil_{\mathscr{H}_+}\oplus H_\mathrm{SB}\lceil_{\mathscr{H}_-}$ と分解できる．

証明: 証明は初等的であるので省略する． **終**

簡単に次のことが分かる．

(1) $(\Psi,\sigma_x\Phi)=0$, $(U^*\Psi,\sigma_zU^*\Phi)=0$ が任意の $\Psi,\Phi\in\mathscr{H}_\pm$ で成立.

(2) $(\Psi,\phi(f)\Phi)=0$, $(U^*\Psi,\phi(f)U^*\Phi)=0$ が任意の $\Psi,\Phi\in\mathscr{H}_\pm$ で成立.

基底状態のパリティーもわかる．

系 3.5 φ_SB を基底状態とする．このとき $\varphi_\mathrm{SB}\in\mathscr{H}_-$.

証明: $\varphi_\mathrm{SB}=U^*\varphi_\mathrm{g}$ に注意すれば

$$\varphi_\mathrm{SB}=s-\lim_{T\to\infty}\frac{U^*e^{-TH}\mathbb{1}_\mathscr{H}}{\|U^*e^{-TH}\mathbb{1}_\mathscr{H}\|}=s-\lim_{T\to\infty}\frac{e^{-TH_\mathrm{SB}}U^*\mathbb{1}_\mathscr{H}}{\|e^{-TH_\mathrm{SB}}U^*\mathbb{1}_\mathscr{H}\|}.$$

$\mathbb{1}_\mathscr{H}$ は $\begin{bmatrix}\Omega_\mathrm{b}\\\Omega_\mathrm{b}\end{bmatrix}\in\mathscr{F}_\uparrow\oplus\mathscr{F}_\downarrow$ に対応していて，$U^*\mathbb{1}_\mathscr{H}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Omega_\mathrm{b}\\\Omega_\mathrm{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\Omega_\mathrm{b}\end{bmatrix}\in\mathscr{H}_-$. この結果 $Pe^{-TH_\mathrm{SB}}U^*\mathbb{1}_\mathscr{H}=e^{-TH_\mathrm{SB}}PU^*\mathbb{1}_\mathscr{H}=-e^{-TH_\mathrm{SB}}U^*\mathbb{1}_\mathscr{H}$. I.e., $e^{-TH_\mathrm{SB}}U^*\mathbb{1}_\mathscr{H}\in\mathscr{H}_-$. これは $\varphi_\mathrm{SB}\in\mathscr{H}_-$ を意味する． **終**

系 3.1 から φ_g は非負ベクトル $\rho(\sigma,\phi)=\begin{cases}1, & \sigma=+1\\0, & \sigma=-1\end{cases}$ と直交しないので

$$\inf\sigma(H)=-\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta}\log(\rho,e^{-\beta H}\rho)=-\lim_{\beta\to\infty}\frac{1}{\beta}\log e^\beta\mathbb{E}_P\left[\varepsilon^{N_t}e^{\frac{\alpha^2}{2}\int_0^\beta\int_0^\beta W}\right]\tag{3.6}$$

をえる．右辺の表現は [Hir99, Abd12] でも与えられている．

4　基底状態に付随したパス上の測度

4.1　$\varepsilon=1$ の場合の局所弱収束

簡単のために $\varepsilon=1$ とする．$\mathscr{X}=D(\mathbb{R};\mathbb{Z}_2)$ は $\mathbb{Z}_2$ に値をとる càdlàg パス[1] の空間とし $\mathscr{G}$ は シリンダ集合から生成される σ-代数とする．つまり $\sigma.:(\Omega,\Sigma,P)\to(\mathscr{X},\mathscr{G})$ は $\mathscr{X}$-値確率変数．その像測度を $\mathcal{W}^\sigma$, i.e., $A\in\mathscr{G}$ に対して $\mathcal{W}^\sigma(A)=\sigma_\cdot^{-1}(A)$, そして $\mathscr{X}$ 上の座標過程を $(X_t)_{t\in\mathbb{R}}$, i.e., $X_t(\omega)=\omega(t)$ とする．その結果ファインマン・カッツ公式は

$$(\Phi,e^{-tH}\Psi)_{\mathscr{H}}=e^t\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}^\sigma_{\mathcal{W}}\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[\overline{J_0\Phi(X_0)}e^{-\alpha\Phi_{\mathrm{E}}\left(\int_0^t X_sj_shds\right)}J_t\Psi(X_t)\right]\tag{4.1}$$

で与えられる．ここで $\mathbb{E}_{\mathcal{W}^\sigma}=\mathbb{E}^\sigma_{\mathcal{W}}$ である．

補題 4.1 $\Phi,\Psi\in\mathscr{H}$, $s\in\mathbb{R}$, とする．このとき

$$(\Phi,e^{-tH}\Psi)_{\mathscr{H}}=e^t\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}^\sigma_{\mathcal{W}}\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[\overline{J_s\Phi(X_s)}e^{-\alpha\Phi_{\mathrm{E}}\left(\int_s^{s+t} X_rj_rhdr\right)}J_{s+t}\Psi(X_{s+t})\right].\tag{4.2}$$

証明: トロッタ積公式 $(\Phi,e^{-tH}\Psi)_{\mathscr{H}}=\lim_{n\to\infty}(\Phi,(e^{-\frac{t}{n}(\varepsilon\sigma_x+\alpha\sigma_z\otimes\phi(h))}e^{-\frac{t}{n}H_{\mathrm{f}}})^n\Psi)$ と $e^{-|t-s|H_{\mathrm{f}}}=J_t^*J_s$ から

$$(\Phi,e^{-tH}\Psi)_{\mathscr{H}}=e^t\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_P\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[\overline{J_s\Phi(\sigma_0)}e^{-\alpha\Phi_{\mathrm{E}}\left(\int_0^t \sigma_rj_{s+r}hdr\right)}J_{s+t}\Psi(\sigma_t)\right].$$

シフト不変性から

$$(\Phi,e^{-tH}\Psi)_{\mathscr{H}}=e^t\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_P\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[\overline{J_s\Phi(\sigma_s)}e^{-\alpha\Phi_{\mathrm{E}}\left(\int_0^t \sigma_{s+r}j_{s+r}hdr\right)}J_{s+t}\Psi(\sigma_{s+t})\right].$$

よって補題が示せた． **終**

$Q_{[S,T]}=J_S^*e^{\Phi_{\mathrm{E}}(-\alpha\int_S^T X_sj_shds)}J_T$ は $L^2(Q)$ 上有界である．実際 $\|Q_{[S,T]}\|\le\|Q_{[S,T]}\|_{L^1(Q)}\le e^{\frac{\alpha^2}{4}\|\int_S^T X_sj_shds\|^2}$ となる．$(\mathbb{Z}_2,\mathscr{B})$ は可測空間で, σ-代数 $\mathscr{B}$ は $\mathscr{B}=\{\emptyset,\{-1\},\{+1\},\mathbb{Z}_2\}$.

系 4.2 $-\infty<t_0\le t_1\le\ldots\le t_n<\infty$, $A_0,...,A_n\in\mathscr{B}$ とする．このときグリーン関数の半関数積分表示が次で与えられる:

$$\begin{aligned}&(\Phi,\mathbb{1}_{A_0}e^{-(t_1-t_0)H}\mathbb{1}_{A_1}e^{-(t_2-t_1)H}\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})H}\mathbb{1}_{A_n}\Psi)\\&=e^{t_n-t_0}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}^\sigma_{\mathcal{W}}\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[\left(\prod_{j=0}^n\mathbb{1}_{A_j}(X_{t_j})\right)\overline{\Phi(X_{t_0})}Q_{[t_0,t_n]}\Psi(X_{t_n})\right].\end{aligned}\tag{4.3}$$

証明: $\mathscr{F}_s=\sigma(N_r,0\le r\le s)$ を自然なフィルトレイションとする．マルコフ性から

$$\begin{aligned}&\left(e^{-sH}\mathbb{1}_Ae^{-tH}\Phi\right)(\sigma)\\&=e^{s+t}\mathbb{E}_P\left[J_0^*e^{\Phi_{\mathrm{E}}(-\alpha\int_0^s\sigma_rj_rhdr)}J_s\mathbb{1}_A(\sigma_s)\mathbb{E}_P\left[J_0^*e^{-\alpha\Phi_{\mathrm{E}}(\int_0^t\sigma_{r+s}j_rhdr)}J_t\Phi(\sigma_{t+s})\,\middle|\,\mathscr{F}_s\right]\right]\\&=e^{s+t}\mathbb{E}_P\left[J_0^*e^{\Phi_{\mathrm{E}}(-\alpha\int_0^s\sigma_rj_rhdr)}J_s\mathbb{1}_A(\sigma_s)J_0^*e^{-\alpha\Phi_{\mathrm{E}}(\int_0^t\sigma_{r+s}j_rhdr)}J_t\Phi(\sigma_{t+s})\right]\\&=e^{s+t}\mathbb{E}_P\left[J_0^*e^{-\alpha\Phi_{\mathrm{E}}(\int_0^s\sigma_rj_rhdr)}J_s\mathbb{1}_A(\sigma_s)J_0^*e^{-\alpha\Phi_{\mathrm{E}}(\int_0^t\sigma_{r+s}j_rhdr)}J_t\Phi(\sigma_{t+s})\right].\end{aligned}$$

[1]右連続で左極限が存在するパスのこと．

また $J_0=U_{-s}J_s$ から

$$\begin{aligned}&\left(e^{-sH}\mathbb{1}_A e^{-tH}\Phi\right)(\sigma)\\&=e^{s+t}\mathbb{E}_P\left[J_0^* e^{-\alpha\Phi_{\mathrm{E}}(\int_0^s j_r\sigma_r h dr)}J_sJ_s^*U_s\mathbb{1}_A(\sigma_s)e^{-\alpha\Phi_{\mathrm{E}}(\int_0^t\sigma_{r+s}j_r h dr)}J_t\Phi(\sigma_{t+s})\right]\\&=e^{s+t}\mathbb{E}_P\left[J_0^* e^{-\alpha\Phi_{\mathrm{E}}(\int_0^s j_r\sigma_r h dr)}J_sJ_s^*\mathbb{1}_A(\sigma_s)e^{-\alpha\Phi_{\mathrm{E}}(\int_0^t\sigma_{r+s}j_{r+s} h dr)}J_{t+s}\Phi(\sigma_{t+s})\right].\end{aligned}\tag{4.4}$$

さらに (4.4) の $J_sJ_s^*$ は省いてもいいので

$$\left(e^{-sH}\mathbb{1}_A e^{-tH}\Phi\right)(\sigma)=e^{s+t}\mathbb{E}_P\left[J_0^* e^{-\alpha\Phi_{\mathrm{E}}(\int_0^{s+t}\sigma_r j_r h dr)}\mathbb{1}_A(\sigma_s)J_{t+s}\Phi(\sigma_{t+s})\right].$$

その結果

$$\begin{aligned}&(\Phi,\mathbb{1}_{A_0}e^{-sH}\mathbb{1}_{A_1}e^{-tH}\mathbb{1}_{A_2}\Psi)\\&=e^{s+t}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^{\sigma}\left[\mathbb{1}_{A_0}(X_0)\mathbb{1}_{A_1}(X_s)\mathbb{1}_{A_2}(X_{s+t})\left(J_0\Phi(X_0),e^{-\alpha\Phi_{\mathrm{E}}(\int_0^{s+t}X_r j_r h dr)}J_{t+s}\Psi(X_{t+s})\right)\right].\end{aligned}$$

これを繰り返せば

$$\begin{aligned}&(\Phi,\mathbb{1}_{A_0}e^{-(t_1-t_0)H}\mathbb{1}_{A_1}e^{-(t_2-t_1)H}\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})H}\mathbb{1}_{A_n}\Psi)\\&=e^{t_n-t_0}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^{\sigma}\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[\left(\prod_{j=0}^n\mathbb{1}_{A_j}(X_{t_j-t_0})\right)\overline{\Phi(X_0)}Q_{[0,t_n-t_0]}\Psi(X_{t_n-t_0})\right]\end{aligned}\tag{4.5}$$

となる. σ_t のシフト不変性から系が従う. **終**

系 4.3 $-\infty<t_0\le t_1\le\ldots\le t_n<\infty$, $A_0,...,A_n\in\mathscr{B}$ としよう. このとき

$$\begin{aligned}&(\mathbb{1}_{A_0},e^{-(t_1-t_0)H}\mathbb{1}_{A_1}e^{-(t_2-t_1)H}\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})H}\mathbb{1}_{A_n})\\&=e^{t_n-t_0}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^{\sigma}\left[e^{\frac{\alpha^2}{2}\int_{t_0}^{t_n}dt\int_{t_0}^{t_n}dsW(X_s,X_t,t-s)}\prod_{j=0}^n\mathbb{1}_{A_j}(X_{t_j})\right].\end{aligned}\tag{4.6}$$

ここで $W(x,y,t)=\dfrac{xy}{2}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^d}e^{-|t|\omega(k)}|\hat{h}(k)|^2dk.$

証明: 系 4.2 から (4.6) の左辺 $=e^{t_n-t_0}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^{\sigma}\left[\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[Q_{[t_0,t_n]}\right]\prod_{j=0}^n\mathbb{1}_{A_j}(X_{t_j})\right]$. よって系が従う. **終**

$\hat{h}/\omega\in L^2(\mathbb{R}^d)$ を仮定する. このとき基底状態 $\varphi_{\mathrm{g}}\in\mathscr{H}$ が存在する. $\mathscr{G}_{[-T,T]}=\sigma(X_t,t\in[-T,T])$ とし $\mathcal{F}=\bigcup_{T\ge0}\mathscr{G}_{[-T,T]}$ としよう. 確率測度 μ_T を $(\mathscr{X},\sigma(\mathcal{F}))$ の上に次で定義する:

$$\mu_T(A)=\frac{e^{2T}}{Z_T}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^{\sigma}\left[\mathbb{1}_A e^{\frac{\alpha^2}{2}\int_{-T}^T dt\int_{-T}^T dsW(X_t,X_s,t-s)}\right],\quad A\in\sigma(\mathcal{F}).\tag{4.7}$$

ここで Z_T は正規化定数である. 後で示すようにこれは有限体積ギブス測度になる. μ_T がある測度 μ_∞ に収束することを示したい.

定義 4.4 μ_∞ を $(\mathscr{X}, \sigma(\mathcal{F}))$ 上の確率測度としよう．μ_T が μ_∞ に局所弱収束 (local weak convergnece) するとは $\lim_{n\to\infty} \mu_T(A) = \mu_\infty(A)$ が任意の $A \in \mathscr{G}_{[-t,t]}$ と $t \geq 0$ で成り立つことである．

この定義により $\mu_T \to \mu_\infty$(局所弱収束) のとき $\lim_{T\to\infty} \mathbb{E}_{\mu_T}[f] = \mathbb{E}_{\mu_\infty}[f]$ が任意の有界な $\mathscr{G}_{[-t,t]}$-可測関数 f に対していえる．

少し議論が込み入っているので, アウトラインを示す．μ_T は $(\mathscr{X}, \sigma(\mathcal{F}))$ 上の確率測度だった．ここで ρ_T という $(\mathscr{X}, \mathscr{G}_{[-T,T]})$ 上の確率測度を定義して, $\mu_T(A) = \rho_T(A)$, $A \in \mathscr{G}_{[-T,T]}$, を有限次元分布を比べてコルモゴロフの拡張定理を使って示す．さらに $\rho_T(A) \to \mu(A)$ となることを基底状態の存在を使って示す．ここで μ は加法的集合族 $(\mathscr{X}, \mathcal{F})$ 上の加法的集合関数で, 基底状態を用いて定義される．Hopf の拡張定理より μ の拡大である確率測度 μ_∞ が $(\mathscr{X}, \sigma(\mathcal{F}))$ 上に存在することが示せるから, 結局 $\mu_T(A) \to \mu_\infty(A)$ が任意の $A \in \mathcal{F}$ で示せたことになる．

有限次元分布

$$\mu_T^\Lambda(A_0 \times \cdots \times A_n) = \frac{e^{2T}}{Z_T} \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_{\mathscr{W}}^\sigma \left[\left(\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(X_{t_j}) \right) e^{\frac{\alpha^2}{2} \int_{-T}^T dt \int_{-T}^T ds W(X_t, X_s, t-s)} \right] \tag{4.8}$$

は $(\mathbb{Z}_2^\Lambda, \mathscr{B}^\Lambda)$ 上の確率測度になる．ここで $\mathbb{Z}_2^\Lambda = \times_{j=1}^n \mathbb{Z}_2^{t_j}$, $\mathscr{B}^\Lambda = \times_{j=1}^n \mathscr{B}^{t_j}$ $(\Lambda = \{t_1, ..., t_n\})$, そして $\mathbb{Z}_2^{t_j}$ と $\mathscr{B}^{t_j}$ は 各々$\mathbb{Z}_2$ と $\mathscr{B}$ のコピーである．$\mathcal{F}$ は有限加法族であり, $(\mathscr{X}, \mathcal{F})$ 上の加法的集合関数を次で定義する:

$$\mu(A) = e^{2Et} e^{2t} \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_{\mathscr{W}}^\sigma \left[\mathbb{1}_A (\varphi_{\mathrm{g}}(X_{-t}), Q_{[-t,t]} \varphi_{\mathrm{g}}(X_t))_{\mathscr{H}} \right], \quad A \in \mathscr{G}_{[-t,t]}. \tag{4.9}$$

注意 4.5 $(1)\mu(\mathscr{X}) = (\varphi_{\mathrm{g}}, e^{-2t(H-E)}\varphi_{\mathrm{g}}) = 1$ に注意せよ．(2) μ は well defined である．I.e.,

$$\begin{aligned} \mu(A) &= e^{2Et} e^{2t} \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_{\mathscr{W}}^\sigma \left[\mathbb{1}_A (\varphi_{\mathrm{g}}(X_{-t}), Q_{[-t,t]} \varphi_{\mathrm{g}}(X_t))_{\mathscr{H}} \right] \\ &= e^{2Es} e^{2s} \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_{\mathscr{W}}^\sigma \left[\mathbb{1}_A (\varphi_{\mathrm{g}}(X_{-s}), Q_{[-s,s]} \varphi_{\mathrm{g}}(X_s))_{\mathscr{H}} \right] \end{aligned}$$

が $A \in \mathscr{G}_{[-t,t]} \subset \mathscr{G}_{[s,-s]}$ で示せる．

補題 4.6 $(\mathscr{X}, \sigma(\mathcal{F}))$ 上の確率測度 μ_∞ で $\mu_\infty\lceil_{\mathcal{F}} = \mu$ となるものが存在する．特に $\mu_\infty(A) = \mu(A)$ が任意の $A \in \mathscr{G}_{[-t,t]}$ *$(t \in \mathbb{R})$* に対して成り立つ．

証明: $\cup_{j=1}^\infty A_j \in \mathcal{F}$ かつ $A_i \cap A_j = \emptyset$ $(i \neq j)$ としよう．このとき, ある $t > 0$ が存在して $\cup_{j=1}^\infty A_j \in \mathscr{G}_{[-t,t]}$. よって

$$\mu(\cup_{j=1}^\infty A_j) = e^{2Et} e^{2t} \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_{\mathscr{W}}^\sigma [\mathbb{1}_{\cup_{j=1}^\infty A_j} (\varphi_{\mathrm{g}}(X_{-t}), Q_{[-t,t]} \varphi_{\mathrm{g}}(X_t))] = \sum_{j=1}^\infty \mu(A_j)$$

がルベーグの優収束定理から従う．よって μ は $(\mathscr{X}, \mathcal{F})$ 上の完全加法的集合関数になり, Hopf の拡張定理から一意的な測度 μ_∞ が $(\mathscr{X}, \sigma(\mathcal{F}))$ 上に存在し $\mu_\infty\lceil_{\mathcal{F}} = \mu$ をみたす． **終**

$\mu_T(A) \to \mu_\infty(A)$ $(A \in \mathscr{G}_{[-t,t]})$ を示すためにもう一つの確率測度 ρ_T を $(\mathscr{X}, \mathscr{G}_{[-T,T]})$ 上に次のように定める: $A \in \mathscr{G}_{[-t,t]}$ $(t \leq T)$ に対して

$$\rho_T(A) = e^{2Et} e^{2t} \sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_{\mathscr{W}}^\sigma \left[\mathbb{1}_A \left(\frac{\Phi_{T-t}(X_{-t})}{\|\Phi_T\|}, Q_{[-t,t]} \frac{\Phi_{T-t}(X_t)}{\|\Phi_T\|} \right) \right]. \tag{4.10}$$

注意 4.7 ρ_T も μ_T 同様に well defined であることが示せる. I.e.,

$$
\begin{aligned}
\rho_T(A) &= e^{2Et}e^{2t}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}^\sigma_{\mathcal{W}}\left[\mathbb{1}_A\left(\frac{\Phi_{T-t}(X_{-t})}{\|\Phi_T\|}, Q_{[-t,t]}\frac{\Phi_{T-t}(X_t)}{\|\Phi_T\|}\right)\right]\\
&= e^{2Es}e^{2s}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}^\sigma_{\mathcal{W}}\left[\mathbb{1}_A\left(\frac{\Phi_{T-s}(X_{-s})}{\|\Phi_T\|}, Q_{[-s,s]}\frac{\Phi_{T-s}(X_s)}{\|\Phi_T\|}\right)\right]
\end{aligned}
$$

が $A\in\mathscr{G}_{[-t,t]}\subset\mathscr{G}_{[-s,s]}\subset\mathscr{G}_{[-T,T]}$ で示せる.

$\Lambda=\{t_0,...,t_n\}\subset[-T,T]$ をインデックスにもつ $(\mathbb{Z}_2^\Lambda,\mathscr{B}^\Lambda)$ 上の確率測度の族 ρ_T^Λ を次で定義する:

$$
\rho_T^\Lambda(A_0\times\cdots\times A_n) = e^{2Et}e^{2t}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}^\sigma_{\mathcal{W}}\left[\left(\prod_{j=0}^n\mathbb{1}_{A_j}(X_{t_j})\right)\left(\frac{\Phi_{T-t}(X_{-t})}{\|\Phi_T\|}, Q_{[-t,t]}\frac{\Phi_{T-t}(X_t)}{\|\Phi_T\|}\right)\right]. \tag{4.11}
$$

補題 4.8 $\Lambda=\{t_0,t_1,...,t_n\}$, $A_0\times\ldots\times A_n\in\mathscr{B}^\Lambda$ とする. このとき

$$
\mu_T^\Lambda(A_0\times\cdots\times A_n)=\rho_T^\Lambda(A_0\times\cdots\times A_n).
$$

証明: 系 4.2 によって

$$
\mu_T^\Lambda(A_0\times\cdots\times A_n)=\frac{1}{\|\Phi_T\|^2}(\mathbb{1}_{\mathscr{H}}, e^{-(t_0+T)H}\mathbb{1}_{A_0}e^{-(t_1-t_0)H}\mathbb{1}_{A_1}\cdots\mathbb{1}_{A_n}e^{-(T-t_n)H}\mathbb{1}_{\mathscr{H}}).
$$

Φ_{T-t} の定義によって

$$
\mu_T^\Lambda(A_0\times\cdots\times A_n)=\frac{e^{2Et}}{\|\Phi_T\|^2}(\Phi_{T-t}, e^{-(t_0+t)H}\mathbb{1}_{A_0}e^{-(t_1-t_0)H}\mathbb{1}_{A_1}\cdots\mathbb{1}_{A_n}e^{-(t-t_n)H}\Phi_{T-t})
$$

となる. また系 4.2 によってさらに

$$
\begin{aligned}
\mu_T^\Lambda(A_0\times\cdots\times A_n) &= e^{2Et}e^{2t}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}^\sigma_{\mathcal{W}}\left[\prod_{j=0}^n\mathbb{1}_{A_j}(X_{t_j})\left(\frac{\Phi_{T-t}}{\|\Phi_T\|}(X_{-t}), Q_{[-t,t]}\frac{\Phi_{T-t}(X_t)}{\|\Phi_T\|}\right)\right]\\
&= \rho_T^\Lambda(A_0\times\cdots\times A_n).
\end{aligned}
$$

よって補題が示せた. **終**

$\mathbb{Z}_2$-値パス全体を $\mathbb{Z}_2^{(-\infty,\infty)}=\{\omega:(-\infty,\infty)\to\mathbb{Z}_2\}$ としよう.

補題 4.9 $t\le T$ とし $A\in\mathscr{G}_{[-t,t]}$ とする. このとき $\mu_T(A)=\rho_T(A)$.

証明: 確率測度の族 μ_T^Λ, $\Lambda\in\mathbb{R}$, がコルモゴロフの consistency 条件:

$$
\mu_T^{\{t_0,\ldots,t_n,s_1,\ldots,s_m\}}(A_0\times\cdots\times A_n\times\prod^m\mathbb{Z}_2)=\mu_T^{\{t_0,\ldots,t_n\}}(A_0\times\cdots\times A_n)
$$

を満たすことが分かる. いま射影 $\pi_\Lambda:\mathbb{Z}_2^{(-\infty,\infty)}\to\mathbb{Z}_2^\Lambda$ を $\pi_\Lambda(\omega)=(\omega(t_1),\ldots,\omega(t_n))$ ($\Lambda=\{t_1,\ldots,t_n\}$) によって定義する. このとき $\mathscr{A}_T=\{\pi_\Lambda^{-1}(E)\,|\,\Lambda\subset[-T,T],\#\Lambda<\infty,E\in\mathscr{B}^\Lambda\}$

は有限加法族になる．よってコルモゴロフの拡張定理によって $(\mathbb{Z}_2^{(-\infty,\infty)},\sigma(\mathscr{A}_T))$ 上の確率測度 $\mu_T^{(-\infty,\infty)}$ で

$$\mu_T^{(-\infty,\infty)}(\pi_\Lambda^{-1}(A_0\times\cdots\times A_n))=\mu_T^\Lambda(A_0\times\cdots\times A_n) \tag{4.12}$$

となるものが一意的に存在する．$\mathbb{Z}_2^{(-\infty,\infty)}=\mathscr{X}$ と $\sigma(\mathscr{A}_T)=\mathscr{G}_{[-T,T]}$ に注意せよ．一方

$$\mu_T(\pi_\Lambda^{-1}(A_0\times\cdots\times A_n))=\mu_T^\Lambda(A_0\times\cdots\times A_n)$$

となり，さらに $\mu_T\lceil_{\mathscr{G}_{[-T,T]}}$ は $(\mathscr{X},\mathscr{G}_{[-T,T]})$ 上の確率測度．よって $\mu_T^{(-\infty,\infty)}=\mu_T\lceil_{\mathscr{G}_{[-T,T]}}$ がコルモゴロフの拡張定理の一意性よりわかる．補題 4.8 から

$$\mu_T^\Lambda(A_0\times\cdots\times A_n)=\rho_T^\Lambda(A_0\times\cdots\times A_n)=\rho_T(\pi_\Lambda^{-1}(A_0\times\cdots\times A_n))$$

がわるので，$\rho_T(A)=\mu_T^{(-\infty,\infty)}(A)$ $(A\in\mathscr{G}_{[-t,t]})$ もコルモゴロフの拡張定理の一意性よりわかる．よって $\mu_T^{(-\infty,\infty)}=\mu_T\lceil_{\mathscr{G}_{[-T,T]}}$ とあわせれば $\mu_T(A)=\rho_T(A)$ $(A\in\mathscr{G}_{[-t,t]})$ がわかる． **終**

定理 4.10 $\hat{h}/\omega\in L^2(\mathbb{R}^d)$ を仮定する．このとき $(\mathscr{X},\sigma(\mathcal{F}))$ 上の確率測度 μ_T は $T\to\infty$ で μ_∞ へ局所弱収束する．

証明: 補題 4.9 によって $\lim_{T\to\infty}\rho_T(A)=\mu_\infty(A)$ $(A\in\mathscr{G}_{[-T,T]})$ を示せば十分．$\Phi_{T-t}/\|\Phi_T\|\to\varphi_{\rm g}$ $(T\to\infty)$ なので，$\Phi_{T-t}(\sigma)/\|\Phi_T\|\to\varphi_{\rm g}(\sigma)$ がわかる．$Q_{[-t,t]}$ は有界作用素なので，

$$\begin{aligned}\lim_{T\to\infty}\rho_T(A)&=\lim_{T\to\infty}e^{2t}e^{2Et}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^\sigma\left[\left(\frac{\Phi_{T-t}(X_{-t})}{\|\Phi_T\|},Q_{[-t,t]}\frac{\Phi_{T-t}(X_t)}{\|\Phi_T\|}\right)\mathbb{1}_A\right]\\&=e^{2t}e^{2Et}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^\sigma\left[\left(\varphi_{\rm g}(X_{-t}),Q_{[-t,t]}\varphi_{\rm g}(X_t)\right)\mathbb{1}_A\right]=\mu_\infty(A)\end{aligned}$$

となり，定理が従う． **終**

4.2 一般の ε の場合の局所弱収束

$\varepsilon>0$ としよう．$tH=\varepsilon t\left(-\sigma_x\otimes\mathbb{1}+\mathbb{1}\otimes\frac{1}{\varepsilon}H_{\rm f}+\frac{\alpha}{\varepsilon}\sigma_z\otimes\phi(\hat{h})\right)$ となるから

$$(\Phi,e^{-tH}\Psi)_{\mathscr{H}}=e^{\varepsilon t}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^\sigma\mathbb{E}_{\mu_{\rm E}}\left[\overline{J_0^\varepsilon\Phi(X_0)}e^{-(\alpha/\varepsilon)\Phi_{\rm E}\left(\int_0^{\varepsilon t}X_sj_s^\varepsilon hds\right)}J_t^\varepsilon\Psi(X_{\varepsilon t})\right]. \tag{4.13}$$

ここで J_t^ε と j_t^ε は ω を ω/ε に置換えたものである．$(\mathscr{X},\sigma(\mathcal{F}))$ 上の確率測度 μ_T^ε を

$$\mu_T^\varepsilon(A)=\frac{e^{2\varepsilon T}}{Z_{\varepsilon T}}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^\sigma\left[\mathbb{1}_Ae^{\frac{\alpha^2}{2}\int_{-T}^Tdt\int_{-T}^TdsW(X_{\varepsilon t},X_{\varepsilon s},t-s)}\right],\quad A\in\sigma(\mathcal{F}), \tag{4.14}$$

で定める．$(\mathscr{X},\mathcal{F})$ 上の加法的集合関数を次で定める:

$$\mu^\varepsilon(A)=e^{2E\varepsilon t}e^{2\varepsilon t}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^\sigma[\mathbb{1}_A(\varphi_{\rm g}(X_{-\varepsilon t}),Q_{[-\varepsilon t,\varepsilon t]}^{(\varepsilon)}\varphi_{\rm g}(X_{\varepsilon t})_{\mathscr{H}}],\quad A\in\mathscr{G}_{[-\varepsilon t,\varepsilon t]}.$$

ここで $Q_{[-\varepsilon t,\varepsilon t]}^{(\varepsilon)}=J_{-\varepsilon t}^{\varepsilon*}e^{\Phi_{\rm E}(-(\alpha/\varepsilon)\int_{-\varepsilon t}^{\varepsilon t}X_sj_s^\varepsilon hds)}J_{\varepsilon t}^\varepsilon$．補題 4.6 と同様にして $(\mathscr{X},\sigma(\mathcal{F}))$ 上に一意的に確率測度 μ_∞^ε で $\mu_\infty^\varepsilon\lceil_{\mathcal{F}}=\mu^\varepsilon$ となるものが存在する．さらに定理 4.10 と同様に $\lim_{T\to\infty}\mu_T^\varepsilon(A)=\mu_\infty^\varepsilon(A)$ $(A\in\mathscr{G}_{[-t,t]})$ が示せる．まとめると

定理 4.11 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき $(\mathscr{X}, \sigma(\mathcal{F}))$ 上の確率測度 μ_T^ε は $T \to \infty$ で μ_∞^ε に局所弱収束する．

4.3 ギブス測度

この章ではギブス測度の定義を与える．$(\Omega, \mathscr{F}, Q)$ を確率測度空間とし $(Y_t)_{t\in\mathbb{R}}$ は càdlàg パスをもった確率過程とする．$\mathscr{F}_T = \sigma(Y_r, -T \le r \le T)$, $\mathscr{T}_T = \sigma(Y_r, r \in [-T, T]^c)$ としよう．$\mathscr{V} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, $\mathscr{W} : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ はボレル可測関数で外場ポテンシャルとペアポテンシャルと呼ばれている．$\mathscr{V}$ が任意の有界区間 I に対して $0 < \mathbb{E}_Q[e^{-\int_I \mathscr{V}(Y_s)ds}] < \infty$ のとき admissible 外場ポテンシャルといわれる．さらに $\mathscr{W}$ は $\int_{-\infty}^{\infty} \sup_{x,y\in\mathbb{R}^d} |\mathscr{W}(x, y, s)| ds < \infty$ のとき admissible ペアポテンシャルといわれる．Admissible ポテンシャル $\mathscr{V}, \mathscr{W}$, $0 < S \le T$ に対して関数

$$\mathscr{E}_T = \int_{-T}^{T} \mathscr{V}(Y_t)dt + \left(\int_{\mathbb{R}} ds \int_{-T}^{T} dt + \int_{-T}^{T} ds \int_{\mathbb{R}} dt\right) \mathscr{W}(Y_t, Y_s, |t-s|), \tag{4.15}$$

$$\mathscr{E}_{S,T} = \int_{-T}^{T} \mathscr{V}(Y_t)dt + \left(\int_{-S}^{S} ds \int_{-T}^{T} dt + \int_{-T}^{T} ds \int_{-S}^{S} dt\right) \mathscr{W}(Y_t, Y_s, |t-s|) \tag{4.16}$$

を定義し，さらに $Y \in \Omega$ に対して $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の測度 Q_T^Y で $\mathbb{E}_{Q_T^Y}[fg] = \mathbb{E}_Q[f|\mathscr{T}_T](Y)g(Y)$ を満たすものを定める．ここで f は有界 $\mathscr{F}_T$-可測関数，g は有界 $\mathscr{T}_T$-可測間数である，i.e., $Q_T^Y[A] = \mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_A|\mathscr{T}_T](Y)$.

定義 4.12 $\mathscr{V}$ と $\mathscr{W}$ は admissible ポテンシャルとする．

(1) $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の確率測度 P_T は次を満たすとき，区間 $[-T, T]$ に対する，reference 測度 Q とポテンシャル $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ をもつ有限体積ギブス測度といわれる．

  (i) $P_T\lceil_{\mathscr{F}_T} \ll Q\lceil_{\mathscr{F}_T}$

  (ii) 有界 $\mathscr{F}$-可測関数 f に対して $\mathbb{E}_{P_T}[f|\mathscr{T}_S](Y) = \dfrac{\mathbb{E}_{Q_S^Y}[fe^{-\mathscr{E}_{S,T}}]}{\mathbb{E}_{Q_S^Y}[e^{-\mathscr{E}_{S,T}}]}$, P_T-a.s.

(2) $(\Omega, \mathscr{F})$ 上の確率測度 P は次を満たすとき，reference 測度 Q とポテンシャル $\mathscr{V}, \mathscr{W}$ をもつギブス測度といわれる．確率測度 P は**ギブス測度** といわれる．

  (i) $P\lceil_{\mathscr{F}_T} \ll Q\lceil_{\mathscr{F}_T}$

  (ii) 有界 $\mathscr{F}$-可測関数 f に対して $\mathbb{E}_P[f|\mathscr{T}_T](Y) = \dfrac{\mathbb{E}_{Q_T^Y}[fe^{-\mathscr{E}_T}]}{\mathbb{E}_{Q_t^Y}[e^{-\mathscr{E}_T}]}$, P-a.s.

命題 4.13 $\mathscr{V}$ と $\mathscr{W}$ を *admissible* なポテンシャルとしよう．

(1) $T > 0$ に対して $dP_T = \frac{1}{Z_T} e^{-\mathscr{E}_{T,T}} dQ$ は有限体積ギブス測度になる．ここで Z_T は正規化定数．

(2) $P_T(A) \to P_\infty(A)$ *(*$T \to \infty$*)* が任意の $A \in \mathscr{F}_t$ で成り立ち，かつ $P_\infty\lceil_{\mathscr{F}_T} \ll Q\lceil_{\mathscr{F}_T}$ が全ての T で成立するとき確率測度 P_∞ はギブス測度になる．

証明: (1) は [LHB11] の Proposition 4.1, (2) は [LHB11] の Proposition 4.2 を参照せよ. **終**

$\mathbb{Z}_2$ 上の Bernoulli 測度 $\nu(\sigma) = \frac{1}{2}(\delta_{-1}(\sigma) + \delta_{+1}(\sigma))$ によって $(\mathscr{X}, \sigma(\mathcal{F}))$ 上の確率測度 $\mathscr{N}$ を $\mathscr{N}(A) = \mathbb{E}_\nu \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^\sigma[\mathbb{1}_A]$ によって定義する.

定理 4.14 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ を仮定する. このとき μ_∞^ε は $(\mathscr{X}, \sigma(\mathcal{F}))$ 上のギブス測度になる. ここで *reference* 測度は $\mathscr{N}$, 外場ポテンシャルはなし, ペアポテンシャルは $W(X_{\varepsilon t}, X_{\varepsilon s}, |t-s|) = \frac{1}{2} X_{\varepsilon t} X_{\varepsilon s} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-|t-s|\omega(k)} |\hat{h}(k)|^2 dk$ である.

証明: 確率測度 μ_T^ε は有限体積ギブス測度になることが命題 4.13 の (1) と (4.14) からわかる. 定理 4.11 から $\mu_T^\varepsilon(A) \to \mu_\infty^\varepsilon(A)$ $(T \to \infty)$ が任意の $A \in \mathscr{G}_{[-t,t]}$ で成り立つことがわかる. さらに $A \in \mathscr{G}_{[-t,t]}$ に対して,

$$\begin{aligned}\mu_\infty^\varepsilon(A) &= e^{2E\varepsilon t} e^{2\varepsilon t} \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^\sigma \left[\left(\varphi_{\mathrm{g}}(X_{-\varepsilon t}), Q_{[-\varepsilon t, \varepsilon t]}^{(\varepsilon)} \varphi_{\mathrm{g}}(X_{\varepsilon t}) \right) \mathbb{1}_A \right] \\ &\leq 2 e^{2E\varepsilon t} e^{2\varepsilon t} \| Q_{[-\varepsilon t, \varepsilon t]}^{(\varepsilon)} \|_{L^1(Q)} \mathscr{N}(A) \leq 2 e^{2E\varepsilon t} e^{2\varepsilon t} e^{\alpha^2 t^2 \|h\|^2} \mathscr{N}(A)\end{aligned}$$

となる. よって $\mu_\infty^\varepsilon \lceil_{\mathscr{F}_t} \ll \mathscr{N} \lceil_{\mathscr{F}_t}$ が 任意の $t > 0$ に対して成り立つので命題 4.13 の (2) から定理が従う. **終**

5 基底状態の性質

5.1 $\xi(\sigma)F(\phi(f))$ の期待値

定理 5.1 f は $\mathscr{X}$ 上の $\mathscr{G}_{[-\varepsilon t, \varepsilon t]}$-可測関数とする. このとき

$$\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}[f] = e^{2E\varepsilon t} e^{2\varepsilon t} \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^\sigma \left[\left(\varphi_{\mathrm{g}}(X_{-\varepsilon t}), Q_{[-\varepsilon t, \varepsilon t]}^{(\varepsilon)} \varphi_{\mathrm{g}}(X_{\varepsilon t}) \right) f \right]. \tag{5.1}$$

証明: $A \in \mathscr{G}_{[-\varepsilon t, \varepsilon t]}$ に対して $\mu_\infty^\varepsilon(A) = e^{2\varepsilon t} e^{2E\varepsilon t} \sum_{\sigma \in \mathbb{Z}_2} \mathbb{E}_{\mathcal{W}}^\sigma \left[\left(\varphi_{\mathrm{g}}(X_{-\varepsilon t}), Q_{[-\varepsilon t, \varepsilon t]}^{(\varepsilon)} \varphi_{\mathrm{g}}(X_{\varepsilon t}) \right) \mathbb{1}_A \right]$ なので (5.1) が従う. **終**

定理 5.1 からすぐに次が従う.

系 5.2 $f_j : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}$, $j = 0, ..., n$, は有界関数とする. このとき

$$\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon} \left[\prod_{j=0}^n f_j(X_{\varepsilon t_j}) \right] = (\varphi_{\mathrm{g}}, f_0 e^{-(t_1 - t_0)(H-E)} f_1 \cdots e^{-(t_n - t_{n-1})(H-E)} f_n \varphi_{\mathrm{g}}). \tag{5.2}$$

特に任意の有界関数 ξ, f と g に対して

$$\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon} [\xi(X_0)] = (\varphi_{\mathrm{g}}, \xi(\sigma) \varphi_{\mathrm{g}}), \tag{5.3}$$

$$\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon} [f(X_t) g(X_s)] = (f(\sigma) \varphi_{\mathrm{g}}, e^{-|t-s|(H-E)} g(\sigma) \varphi_{\mathrm{g}}). \tag{5.4}$$

証明: $A_j \in \mathscr{B}$, $j=0,1,...,n$, に対して, 次が従う:

$$\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(X_{\varepsilon t_j})\right] = e^{2\varepsilon t}e^{2E\varepsilon t}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^\sigma\left[\left(\varphi_{\mathrm{g}}(X_{-\varepsilon t}), Q_{[-\varepsilon t,\varepsilon t]}^{(\varepsilon)}\varphi_{\mathrm{g}}(X_{\varepsilon t})\right)\prod_{j=0}^n \mathbb{1}_{A_j}(X_{\varepsilon t_j})\right]$$
$$= (\varphi_{\mathrm{g}}, \mathbb{1}_{A_0}e^{-(t_1-t_0)(H-E)}\mathbb{1}_{A_1}\cdots e^{-(t_n-t_{n-1})(H-E)}\mathbb{1}_{A_n}\varphi_{\mathrm{g}}).$$

よって (5.2) が得られる. **終**

補題 5.3 F は実数値有界関数, $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\xi:\mathbb{Z}_2\to\mathbb{C}$ は有界としよう. このとき

$$(e^{-TH}\mathbb{1}_{\mathscr{H}}, \xi(\sigma)F(\phi(f))e^{-TH}\mathbb{1}_{\mathscr{H}}) = e^{2\varepsilon T}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^\sigma\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[\xi(X_0)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Phi_{\mathrm{E}}(\int_{-\varepsilon T}^{\varepsilon T}X_s j_s h ds)}F(\Phi_{\mathrm{E}}(j_0 f))\right].$$

証明: 汎関数積分表示から

$$(e^{-TH}\xi(\sigma)F(\phi(f))e^{-TH}\mathbb{1}_{\mathscr{H}})(\sigma) = e^{2\varepsilon T}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^\sigma\left[Q_{[-\varepsilon T,0]}^{(\varepsilon)}\xi(X_0)F(\phi(f))\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^{X_0}\left[Q_{[0,\varepsilon T]}^{(\varepsilon)}\mathbb{1}_{\mathscr{H}}(X_{\varepsilon T})\right]\right].$$

ここで $Q_{[S,T]}^{(\varepsilon)} = J_S^{\varepsilon *}e^{\Phi_{\mathrm{E}}(-\frac{\alpha}{\varepsilon}\int_S^T X_s j_s^\varepsilon h ds)}J_T^\varepsilon$. よって系 4.2 の証明と同様にして, $(N_t)_{t\in\mathbb{R}}$ のマルコフ性から補題が従う. **終**

定理 5.4 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f\in L^2(\mathbb{R}^d)$ は実数値関数, $\xi:\mathbb{Z}_2\to\mathbb{C}$ は有界関数, そして $\beta\in\mathbb{R}$ としよう. このとき

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, \xi(\sigma)e^{i\beta\phi(f)}\varphi_{\mathrm{g}}) = e^{-\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2}\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[\xi(X_0)e^{i\beta K(f)}\right]. \tag{5.5}$$

ここで $K(f) = -\frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^\infty (e^{-|r|\omega}\hat{h},\hat{f})X_{\varepsilon r}dr$ は $(\mathscr{X},\sigma(\mathcal{F}))$ 上の確率変数である.

証明: $(\varphi_{\mathrm{g}}, \xi(\sigma)e^{i\beta\phi(f)}\varphi_{\mathrm{g}}) = \lim_{T\to\infty}(\frac{\Phi_T}{\|\Phi_T\|}, \xi(\sigma)e^{i\beta\phi(f)}\frac{\Phi_T}{\|\Phi_T\|})$ に注意せよ. また補題 5.3 から

$$\left(\frac{\Phi_T}{\|\Phi_T\|}, \xi(\sigma)e^{i\beta\phi(f)}\frac{\Phi_T}{\|\Phi_T\|}\right) = \frac{1}{Z_{\varepsilon T}}e^{2\varepsilon T}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^\sigma\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}\left[\xi(X_0)e^{-\frac{\alpha}{\varepsilon}\Phi_{\mathrm{E}}(\int_{-\varepsilon T}^{\varepsilon T}X_s j_s h ds)}e^{i\beta\Phi_{\mathrm{E}}(j_0 f)}\right].$$

μ_{E} に関する期待値は厳密に計算できて

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, \xi(\sigma)e^{i\beta\phi(f)}\varphi_{\mathrm{g}})$$
$$= \lim_{T\to\infty}e^{-\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2}\frac{1}{Z_{\varepsilon T}}e^{2T}\sum_{\sigma\in\mathbb{Z}_2}\mathbb{E}_{\mathcal{W}}^\sigma\left[\xi(X_0)e^{\frac{\alpha^2}{2}\int_{-T}^T dt\int_{-T}^T W(X_{\varepsilon t},X_{\varepsilon s},t-s)ds}e^{i\frac{\alpha\beta}{2}\int_{-T}^T ds(e^{-|s|\omega}\hat{h},\hat{f})X_{\varepsilon s}}\right]$$
$$= \lim_{T\to\infty}e^{-\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2}\mathbb{E}_{\mu_T^\varepsilon}\left[\xi(X_0)e^{i\frac{\alpha\beta}{2}\int_{-T}^T ds(e^{-|s|\omega}\hat{h},\hat{f})X_{\varepsilon s}}\right].$$

$|\int_{-\infty}^\infty ds X_{\varepsilon s}(e^{-|s|\omega}\hat{h},\hat{f})| \le 2\|\hat{h}/\omega\|\|\hat{f}\| < \infty$ に注意せよ. μ_T は局所弱収束するので, 後ほど述べる補題 5.12 の telescoping と同じようにすれば補題が従う. **終**

定理 5.4 から関数 $(\varphi_{\mathrm{g}}, \xi(\sigma)F(\phi(f))\varphi_{\mathrm{g}})$ はパス測度 μ_∞^ε の平均で表せる. F が多項式かシュワルツテスト関数の場合を考えよ. $\varphi_{\mathrm{g}}\in D(e^{+\beta N})$ が任意の $\beta>0$ で成立することを後ほど系 5.14 で示すことを注意しておく. 特に $\varphi_{\mathrm{g}}\in D(\phi(f)^n)$ が全ての $n\in\mathbb{N}$ で成り立つ.

系 5.5 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は実数値, そして $\xi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}$ は有界関数としよう．また $h_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$ は n 次のエルミート多項式とする．このとき

$$(\varphi_{\rm g}, \xi(\sigma)\phi(f)^n \varphi_{\rm g}) = i^n \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon} \left[\xi(X_0) h_n \left(\frac{-iK(f)}{\|f\|/\sqrt{2}} \right). \right] (\|f\|/\sqrt{2})^n, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{5.6}$$

証明:

$$e^{-\beta^2\|f\|^2/4} e^{i\beta K(f)} = \sum_{n=0}^\infty h_n \left(\frac{-iK(f)}{\|f\|/\sqrt{2}} \right) \frac{(-\beta\|f\|/\sqrt{2})^n}{n!}. \tag{5.7}$$

よって

$$\frac{1}{i^n} \frac{d^n}{d\beta^n} e^{-\beta^2|f|^2/4} e^{i\beta K(f)} \Big\lceil_{\beta=0} = i^n h_n \left(\frac{-iK(f)}{\|f\|/\sqrt{2}} \right) (\|f\|/\sqrt{2})^n \tag{5.8}$$

が従う．(5.8) と $(\varphi_{\rm g}, \xi(\sigma)\phi(f)^n \varphi_{\rm g}) = \frac{1}{i^n} \frac{d^n}{d\beta^n} e^{-\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2} \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon} [\xi(X_0) e^{i\beta K(f)}] \Big\lceil_{\beta=0}$ から (5.6) が従う．
終

系 5.6 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は実数値, $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, そして $\xi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}$ は有界関数とする． このとき $(\varphi_{\rm g}, \xi(\sigma)F(\phi(f))\varphi_{\rm g}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon} [\xi(X_0) G_f (K(f))]$． ここで $G_f = \check{F} * \check{g}$, $g(\beta) = e^{-\beta^2\|f\|^2/4}$.

証明: $F(\phi(f)) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^\infty \check{F}(\beta) e^{i\beta\phi(f)} d\beta$ なので,

$$(\varphi_{\rm g}, \xi(\sigma)F(\phi(f))\varphi_{\rm g}) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^\infty \check{F}(\beta) e^{-\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2} \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon} \left[\xi(X_0) e^{i\beta K(f)} \right] d\beta. \tag{5.9}$$

よって系が従う． **終**

$e^{i\beta\phi(h)}$ の正規化を $[e^{i\beta\phi(h)}]_{\rm ren} = \frac{e^{i\beta\phi(h)}}{(\mathbb{1}, e^{i\beta\phi(h)}\mathbb{1})} = e^{+\beta^2\|h\|^2/4} e^{i\beta\phi(h)}$ によって定義する．$F_{\rm ren}(\phi(h))$ を $F_{\rm ren}(\phi(h)) = (2\pi)^{-1/2} \int \check{F}(\beta)[e^{i\beta\phi(h)}]_{\rm ren} d\beta$ によって定義する．定理 5.4 と系 5.6 によって次に系が従う．

系 5.7 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は実数値, $F \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ そして $\xi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}$ は有界関数としよう．このとき $(\varphi_{\rm g}, \xi(\sigma)F_{\rm ren}(\phi(f))\varphi_{\rm g}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon} [\xi(X_0) F (K(f))]$．

5.2 ガウス domination と指数モーメント

調和振動子の任意の固有ベクトルは $e^{-|x|^2/2}$ のオーダーで減衰することは, 固有ベクトルがエルミート多項式 $\times e^{-|x|^2/2}$ で与えられることから分かる．スピン・ボゾンハミルトニアンの固有ベクトルも同様にガウス型に減衰することが予想される．

補題 5.8 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は実数値関数としよう．このとき全ての $\beta > 0$ に対して,

$$(\varphi_{\rm g}, e^{-\beta\phi(f)^2} \varphi_{\rm g}) = \frac{1}{\sqrt{1+\beta\|f\|^2}} \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon} \left[e^{-\frac{\beta K^2(f)}{1+\beta\|f\|^2}} \right]. \tag{5.10}$$

証明: 定理 5.4 によって

$$(\varphi_{\rm g}, e^{-(\beta^2/2)\phi(f)^2}\varphi_{\rm g}) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-k^2/2}(\varphi_{\rm g}, e^{i\beta k\phi(f)}\varphi_{\rm g})dk$$
$$= (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-k^2/2}e^{-k^2\|f\|^2/4}\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[e^{i\beta kK(f)}\right]dk = \frac{1}{\sqrt{1+\beta^2\|f\|^2/2}}\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[e^{-\frac{\beta^2K^2(f)/2}{1+\beta^2\|f\|^2/2}}\right]$$

がわかる. $\beta^2/2$ を β に置き換えれば補題が示せる. **終**

定理 5.9 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は実数値関数としよう. $|\beta| < 1/\|f\|^2$ を仮定する. このとき $\varphi_{\rm g} \in D(e^{(\beta/2)\phi(f)^2})$ かつ

$$\|e^{(\beta/2)\phi(f)^2}\varphi_{\rm g}\|^2 = \frac{1}{\sqrt{1-\beta\|f\|^2}}\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[e^{\frac{\beta K^2(f)}{1-\beta\|f\|^2}}\right]. \tag{5.11}$$

証明: 証明は [Hir04, Theorem 10.12] と殆ど同じ. $B = \{z \in \mathbb{C} | |z| < 1/\|f\|^2\}$, $\mathbb{C}_+ = \{z | \Re z > 0\}$ そして $\mathbb{C}_- = \{z | \Re z < 0\}$ としよう.

$$\rho(z) = \frac{1}{\sqrt{1+z\|f\|^2}}\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[e^{-\frac{zK^2(f)}{1+z\|f\|^2}}\right], (z > 0) \tag{5.12}$$

とおく. このとき $\rho(z)$ は $\mathbb{C}_+ \cup B$ へ解析接続できる. なぜなら $|K(f)| \le \alpha\|f\|\|\hat{h}/\omega\|$ がパスに一様に成り立つので. この解析接続された関数を $\bar{\rho}(z)$ で表す. $w \in \mathbb{R} \cap B$ とし $B_\delta(w) = \{z \in \mathbb{C} | |z-w| < \delta\}$ は半径 δ の $\mathbb{C}$ 上の球とする. 任意の δ で $\delta < 1/\|f\|^2$ となるものをとり, そして w が $B_\delta(w) \cap \mathbb{C}_- \cap B \neq \emptyset$ をみたすとする. $\bar{\rho}(z)$ を次のように級数展開する

$$\bar{\rho}(z) = \sum_{n=0}^\infty (z-w)^n b_n(w), \quad z \in B_\delta(w) \cap B. \tag{5.13}$$

一方 $\mathbb{C}_+ \ni z \mapsto (\varphi_{\rm g}, e^{-z\phi(f)^2}\varphi_{\rm g}) \in \mathbb{C}$ は $\mathbb{C}_+$ 上で微分可能, なぜなら $\varphi_{\rm g} \in D(\phi(f)^2)$. よってそれは $\mathbb{C}_+$ 上で解析的である. 次を得る:

$$(\varphi_{\rm g}, e^{-z\phi(f)^2}\varphi_{\rm g}) = \sum_{n=0}^\infty (z-w)^n \frac{1}{n!}\int_0^\infty (-\lambda)^n e^{-w\lambda}dE_\lambda, \quad z \in \mathbb{C}_+. \tag{5.14}$$

ここで E は $\varphi_{\rm g}$ に関する $\phi(f)^2$ のスペクトル測度. (5.13), (5.14) と $\bar{\rho}(z) = (\varphi_{\rm g}, e^{-z\phi(f)^2}\varphi_{\rm g})$ $(z \in \mathbb{C}_+)$ を比べれば,

$$b_n(w) = \frac{1}{n!}\int_0^\infty (-\lambda)^n e^{-w\lambda}dE_\lambda \tag{5.15}$$

がわかる. (5.15) を (5.13) へ代入すれば,

$$\bar{\rho}(z) = \sum_{n=0}^\infty (z-w)^n \frac{1}{n!}\int_0^\infty (-\lambda)^n e^{-w\lambda}dE_\lambda, \quad z \in B_\delta(w) \cap B, \tag{5.16}$$

がわかり, さらに右辺が絶対収束することもわかる i.e.,

$$\sum_{n=0}^\infty |z-w|^n \frac{1}{n!}\left|\int_0^\infty (-\lambda)^n e^{-w\lambda}dE_\lambda\right| < \infty \tag{5.17}$$

$(z \in B_\delta(w) \cap B)$. よって $z \in B_\delta(w) \cap B \cap \mathbb{R}$ に対して,

$$\begin{aligned}
&\int_0^M e^{-z\lambda} dE_\lambda \leq \sum_{n=0}^\infty |z-w|^n \frac{1}{n!} \left| \int_0^M (-\lambda)^n e^{-w\lambda} dE_\lambda \right| \\
&= \sum_{n=0}^\infty |z-w|^n \frac{1}{n!} \left| \int_0^M \lambda^n e^{-w\lambda} dE_\lambda \right| \leq \sum_{n=0}^\infty |z-w|^n \frac{1}{n!} \left| \int_0^\infty \lambda^n e^{-w\lambda} dE_\lambda \right| \\
&= \sum_{n=0}^\infty |z-w|^n \frac{1}{n!} \left| \int_0^\infty (-\lambda)^n e^{-w\lambda} dE_\lambda \right| < \infty
\end{aligned}$$

が (5.17) から従う. これは $\lim_{M\to\infty} \int_0^M e^{-z\lambda} dE_\lambda < \infty$ $(z \in B_\delta(w) \cap B \cap \mathbb{R})$ を意味する. 単調収束定理から $\int_0^\infty e^{-z\lambda} dE_\lambda < \infty$. よって $\varphi_{\rm g} \in D(e^{-(z/2)\phi(f)^2})$. そして

$$\|e^{-(z/2)\phi(f)^2} \varphi_{\rm g}\|^2 = \bar{\rho}(z), \quad z \in B_\delta(w) \cap B \cap \mathbb{R}, \tag{5.18}$$

となる. いま, 任意の $\delta < 1/\|f\|^2$ に対して, $w \in \mathbb{R} \cap B$ で $\mathbb{C}_- \cap B \cap B_\delta(w) \neq \emptyset$ となるものが存在するので, 定理が示せた. **終**

定理 5.9 から $\|e^{(\beta/2)\phi(f)^2} \varphi_{\rm g}\|$ の極限を調べることが出来る.

系 5.10 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とし $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は実数値関数ならば $\lim_{\beta \to 1/\|f\|^2+} \|e^{(\beta/2)\phi(f)^2} \varphi_{\rm g}\| = \infty$ となる.

証明: これは (5.11) から簡単にえられる. **終**

定理 5.9 から $\|e^{(\beta/2)\phi(f)^2} \varphi_{\rm g}\| < \infty$ がわかった. これから場の作用素の指数モーメントを求めることが出来る.

系 5.11 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とし $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は実数値関数とする. このとき $\varphi_{\rm g} \in D(e^{\beta\phi(f)})$ かつ

$$(\varphi_{\rm g}, e^{\beta\phi(f)} \varphi_{\rm g}) = (\varphi_{\rm g}, \cosh(\beta\phi(f)) \varphi_{\rm g}) = e^{\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2} \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon} \left[e^{\beta K(f)} \right], \tag{5.19}$$

$$(\varphi_{\rm g}, \sigma e^{\beta\phi(f)} \varphi_{\rm g}) = (\varphi_{\rm g}, \sigma \sinh(\beta\phi(f)) \varphi_{\rm g}) = e^{\frac{\beta^2}{4}\|f\|^2} \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon} \left[X_0 e^{\beta K(f)} \right]. \tag{5.20}$$

証明: 簡単のために βf を f に置き換える. 母関数 $e^{xy - \frac{1}{2}y^2} = \sum_{n=0}^\infty h_n(x) \frac{y^n}{n!}$ と和 (5.6) から

$$\lim_{M\to\infty} (\varphi_{\rm g}, \sum_{n=0}^M \frac{1}{n!} \phi(f)^n \varphi_{\rm g}) = e^{\frac{1}{4}\|f\|^2} \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon} \left[e^{K(f)} \right] \tag{5.21}$$

がわかる. 左辺が $(\varphi_{\rm g}, e^{\phi(f)} \varphi_{\rm g})$ に収束することを示す必要がある. $(\varphi_{\rm g}, \phi(f)^n \varphi_{\rm g}) = 0$ が奇数 n に対して成り立つことを注意しよう. この結果 $(\varphi_{\rm g}, \sum_{n=0}^M \frac{1}{(2n)!} \phi(f)^{2n} \varphi_{\rm g})$ の $M \to \infty$ を調べれば十分である. 定理 5.9 から $\|e^{\phi(f)^2/(4\|f\|^2)} \varphi_{\rm g}\| < \infty$. E を $\varphi_{\rm g}$ に関する $\phi(f)$ のスペクトル測度とする. このとき

$$(\varphi_{\rm g}, \sum_{n=0}^M \frac{1}{(2n)!} \phi(f)^{2n} \varphi_{\rm g}) = \int_{\mathbb{R}} \sum_{n=0}^M \frac{1}{(2n)!} \lambda^{2n} e^{-\lambda^2/(4\|f\|^2)} e^{\lambda^2/(4\|f\|^2)} dE_\lambda.$$

$e^{\lambda^2/(4\|f\|^2)}$ は定理 5.9 によってスペクトル測度 E_λ に関して可積分. $\displaystyle\sum_{n=0}^{M}\frac{1}{(2n)!}\lambda^{2n}e^{-\lambda^2/(4\|f\|^2)}$ は $\cosh(\lambda)e^{-\lambda^2/(4\|f\|^2)}$ $(M\uparrow\infty)$ へ単調増加, そして $\cosh(\lambda)e^{-\lambda^2/(4\|f\|^2)}$ は有界, よって

$$\lim_{M\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\sum_{n=0}^{M}\frac{1}{n!}\lambda^n dE_\lambda=\int_{\mathbb{R}}e^{\lambda}dE_\lambda<\infty$$

が単調収束定理よりわかる. これは $\varphi_{\mathrm{g}}\in D(e^{\phi(f)})$ と (5.19) を意味する. (5.20) もまた (5.19) と同様に示せる. **終**

5.3 第 2 量子化作用素の期待値

[GHPS12, Section 3.2] と同様に次が示せる:

$$\frac{(\Phi_T,\xi(\sigma)e^{-\beta d\Gamma(\rho)}\Phi_T)}{\|\Phi_T\|^2}=\mathbb{E}_{\mu_T^{\varepsilon}}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2\int_{-T}^{0}dt\int_0^T W^{\rho,\beta}(X_{\varepsilon t},X_{\varepsilon s},t-s)ds}\right]. \tag{5.22}$$

ここで $W_\infty^{\rho,\beta}=\int_{-\infty}^{0}dt\int_0^\infty W^{\rho,\beta}(X_{\varepsilon t},X_{\varepsilon s},t-s)ds$ でペアポテンシャルは

$$W^{\rho,\beta}(x,y,T)=\frac{xy}{2}\int_{\mathbb{R}^d}|\hat{h}(k)|^2e^{-|T|\omega(k)}(1-e^{-\beta\rho(k)})dk.$$

$|W_\infty^{\rho,\beta}|\le\|\hat{h}/\omega\|^2/2<\infty$ がパスに一様に成立することに注意しよう.

定理 5.12 $\hat{h}/\omega\in L^2(\mathbb{R}^d)$ としよう. $\xi:\mathbb{Z}_2\to\mathbb{C}$ は有界関数とする. このとき

$$(\varphi_{\mathrm{g}},\xi(\sigma)e^{-\beta d\Gamma(\rho)}\varphi_{\mathrm{g}})=\mathbb{E}_{\mu_\infty^{\varepsilon}}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_\infty^{\rho,\beta}}\right],\quad \beta>0. \tag{5.23}$$

証明: 簡単のために $W_T^{\rho,\beta}=\int_{-T}^{0}ds\int_0^T W^{\rho,\beta}(X_{\varepsilon t},X_{\varepsilon s},t-s)dt$ とおく. 任意の $\delta>0$ に対して, ある S_δ で $|W_T^{\rho,\beta}-W_\infty^{\rho,\beta}|\le\delta$ $(\forall T>S_\delta)$ がパスに一様に成立するものが存在する.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_T}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_T^{\rho,\beta}}\right]-\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_\infty^{\rho,\beta}}\right]&=\mathbb{E}_{\mu_T}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_T^{\rho,\beta}}\right]-\mathbb{E}_{\mu_T}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_\infty^{\rho,\beta}}\right]\\&\quad+\mathbb{E}_{\mu_T}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_\infty^{\rho,\beta}}\right]-\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_\infty^{\rho,\beta}}\right]\end{aligned}$$

と分解する. まず

$$\left|\mathbb{E}_{\mu_T}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_T^{\rho,\beta}}\right]-\mathbb{E}_{\mu_T}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_\infty^{\rho,\beta}}\right]\right|\le C\delta \tag{5.24}$$

となる定数 C がある. 第 2 項は次のように評価できる

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}_{\mu_T}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_\infty^{\rho,\beta}}\right]-\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_\infty^{\rho,\beta}}\right]\right|\\&\le\left|\mathbb{E}_{\mu_T}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_\infty^{\rho,\beta}}\right]-\mathbb{E}_{\mu_T}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_{S_\delta}^{\rho,\beta}}\right]\right| &(5.25)\\&\quad+\left|\mathbb{E}_{\mu_T}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_{S_\delta}^{\rho,\beta}}\right]-\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_{S_\delta}^{\rho,\beta}}\right]\right| &(5.26)\\&\quad+\left|\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_{S_\delta}^{\rho,\beta}}\right]-\mathbb{E}_{\mu_\infty}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2W_\infty^{\rho,\beta}}\right]\right|. &(5.27)\end{aligned}$$

(5.25) と (5.27) に対して再度 (5.24) と同じ上限をえる．定理 4.10 によって (5.26) は $T \to \infty$ のときゼロに収束する． **終**

以下で特別な場合について述べる．

系 5.13 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とし $\xi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}$ は有界関数とする．このとき

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, \xi(\sigma)e^{-\beta N}\varphi_{\mathrm{g}}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[\xi(X_0)e^{-\alpha^2(1-e^{-\beta})W_\infty}\right], \tag{5.28}$$

ここで $W_\infty = \int_{-\infty}^0 dt \int_0^\infty W(X_{\varepsilon t}, X_{\varepsilon s}, t-s)ds$.

証明: 定理 5.12 で ρ を $\mathbb{1}$ におきかえればいい． **終**

系 5.14 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ とする．このとき $\varphi_{\mathrm{g}} \in D(e^{\beta N})$ が全ての $\beta \in \mathbb{C}$ で成立し

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{\beta N}\varphi_{\mathrm{g}}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[e^{-\alpha^2(1-e^{\beta})W_\infty}\right] \tag{5.29}$$

となる．特に $\varphi_{\mathrm{g}} \in D(e^{+\beta N})$ が全ての $\beta > 0$ で成り立つ．

証明: 証明は定理 5.9 の証明と同じ **終**

この系の主張は, 結合定数がゼロの場合は, その基底状態のボゾン数はゼロであるが, 結合定数が非零であっても基底状態のボゾン数が期待値の意味で非常に少ないということをいっている．

系 5.15 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ としよう．このとき

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, (-1)^N\varphi_{\mathrm{g}}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[e^{-2\alpha^2 W_\infty}\right], \tag{5.30}$$

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, \xi(\sigma)(-1)^N\varphi_{\mathrm{g}}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[\xi(X_0)e^{-2\alpha^2 W_\infty}\right]. \tag{5.31}$$

特に

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, (-1)^N\varphi_{\mathrm{g}}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[e^{-2\alpha^2 W_\infty}\right] \geq e^{-\alpha^2\|\hat{h}/\omega\|^2} > 0, \tag{5.32}$$

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, \sigma(-1)^N\varphi_{\mathrm{g}}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[X_0 e^{-2\alpha^2 W_\infty}\right] = -1 < 0. \tag{5.33}$$

証明: (5.30) と (5.31) は (5.28) から従い, (5.32) は (5.31) の右辺から従う．$\varphi_{\mathrm{SB}} \in \mathscr{H}_-$ に注意すれば, $P\varphi_{\mathrm{SB}} = \sigma_x(-1)^N\varphi_{\mathrm{SB}} = -\varphi_{\mathrm{SB}}$ をえる．特に $\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[X_0 e^{-2\alpha^2 W_\infty}\right] = (\varphi_{\mathrm{g}}, \sigma(-1)^N\varphi_{\mathrm{g}}) = (\varphi_{\mathrm{SB}}, P\varphi_{\mathrm{SB}}) = -1$. **終**

系 5.16 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ としよう．このとき

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, N^m\varphi_{\mathrm{g}}) = \sum_{r=1}^m a_r(m)\alpha^{2r}\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[W_\infty^r\right], \tag{5.34}$$

ここで $a_r(m) = \frac{(-1)^r}{r!}\sum_{s=1}^r (-1)^s \binom{r}{s} s^m$.

証明: (5.34) $= (-1)^m \frac{d^m(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{-\beta N}\varphi_{\mathrm{g}})}{d\beta^m}\lceil_{\beta=0}$ であるから,

$$\frac{d^m e^{-a(1-e^{-\beta})}}{d\beta^m} = (-1)^m \sum_{r=1}^m a_r(m)e^{-r\beta}(-a)^r e^{-a(1-e^{-\beta})}$$

と系 5.13 から系が従う． **終**

5.4 $\sigma\phi(f)$ と N の期待値

系 5.17 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ は実数値関数, $\xi : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{C}$ は有界関数としよう．このとき

$$(\varphi_{\rm g}, \xi(\sigma)\phi(f)\varphi_{\rm g}) = \alpha \int_{\mathbb{R}^d} (\xi(\sigma)\varphi_{\rm g}, (H - E + \omega(k))^{-1}\sigma\varphi_{\rm g})\overline{\hat{h}}(k)\hat{f}(k)dk. \tag{5.35}$$

特に

$$(\varphi_{\rm g}, \sigma\phi(h)\varphi_{\rm g}) = \alpha \int_{\mathbb{R}^d} \|(H - E + \omega(k))^{-1/2}\sigma\varphi_{\rm g}\|^2 |\hat{h}(k)|^2 dk. \tag{5.36}$$

証明: 定理 5.4 によって

$$(\varphi_{\rm g}, \xi(\sigma)\phi(f)\varphi_{\rm g}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}[\xi(X_0)K(f)] = \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dr (e^{-|r|\omega}\hat{h}, \hat{f})\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}[\xi(X_0)X_{\varepsilon r}].$$

系 5.2 からさらに

$$\begin{aligned}
&= \frac{\alpha}{2}\int_{-\infty}^{\infty} dr \int dk (\xi(\sigma)\varphi_{\rm g}, e^{-|r|(H-E+\omega(k))}\sigma\varphi_{\rm g})\overline{\hat{h}(k)}\hat{f}(k) \\
&= \alpha \int_{\mathbb{R}^d} (\xi(\sigma)\varphi_{\rm g}, (H - E + \omega(k))^{-1}\sigma\varphi_{\rm g})\overline{\hat{h}(k)}\hat{f}(k)dk.
\end{aligned}$$

終

一般に $(\Phi, (\sigma\phi(f))^2\Phi) \le \frac{\|f\|^2}{2}(\Phi, (N + \mathbb{1})\Phi)$ という不等式が成立するのはよく知られている．しかし系 5.17 から次の不等式を得る:

系 5.18 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ としよう．このとき

$$(\varphi_{\rm g}, N\varphi_{\rm g}) \le \frac{\alpha}{2}(\varphi_{\rm g}, \sigma\phi(h/\omega)\varphi_{\rm g}) \le \frac{\alpha^2}{2}\|\hat{h}/\omega\|^2. \tag{5.37}$$

証明: $(\varphi_{\rm g}, N\varphi_{\rm g}) = \frac{\alpha^2}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{h}(k)|^2 \int_{-\infty}^0 dt \int_0^\infty ds e^{-|t-s|\omega(k)}\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}[X_{\varepsilon t}X_{\varepsilon s}]$,

$$\mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}[X_{\varepsilon s}X_{\varepsilon t}] = (\sigma\varphi_{\rm g}, e^{-|t-s|(H-E)}\sigma\varphi_{\rm g})$$

なので系 5.2 から

$$(\varphi_{\rm g}, N\varphi_{\rm g}) = \frac{\alpha^2}{2}\int_{\mathbb{R}^d} |\hat{h}(k)|^2 \|(H - E + \omega(k))^{-1}\sigma\varphi_{\rm g}\|^2 dk. \tag{5.38}$$

最初の不等式は (5.38) と (5.36) から得られる．第 2 の不等式は (5.36) から導かれる． **終**

(5.38) は pull-through 公式といわれることがある．$|(\varphi_{\rm g}, \sigma\phi(f)\varphi_{\rm g})| \le C\|f\|$ となる定数 C が存在する．Riesz の表現定理から $G \in L^2(\mathbb{R}^d)$ で $(\varphi_{\rm g}, \sigma\phi(f)\varphi_{\rm g}) = (\hat{G}, \hat{f})_{L^2(\mathbb{R}^d)}$ となるものが存在する．

系 5.19 もし $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ ならば $\hat{G}(k) = \frac{\alpha}{2}(\sigma\varphi_{\rm g}, (H - E + \omega(k))^{-1}\sigma\varphi_{\rm g})\hat{h}(k)$.

証明: これは系 5.17 から従う． **終**

6　スピン・ボゾン模型の van Hove 表現

Van Hove ハミルトニアンは $H_{\mathrm{vH}}(g) = H_{\mathrm{f}} + \phi(g)$ で定義されるフォック空間 $\mathscr{F}$ 上の自己共役作用素だった. $\pi(g) = \frac{i}{\sqrt{2}} \int \big(a^\dagger(k)\hat{g}(k)/\omega(k) - a(k)\hat{g}(-k)/\omega(k)\big)\, dk$ とすれば

$$e^{i\pi(g)} H_{\mathrm{vH}}(g) e^{-i\pi(g)} = H_{\mathrm{f}} - \frac{1}{2}\|\hat{g}/\sqrt{\omega}\|^2 \tag{6.1}$$

となり, $H_{\mathrm{vH}}(g)$ の基底状態は $\varphi_{\mathrm{vH}}(g) = e^{-i\pi(g)}\mathbb{1}$ で与えられることがわかる. 一方 $\varepsilon = 0$ のとき $H = \begin{bmatrix} H_{\mathrm{f}} + \alpha\phi(h) & 0 \\ 0 & H_{\mathrm{f}} - \alpha\phi(h) \end{bmatrix}$ となるので, このとき H の基底状態は $\varphi_{\mathrm{g}} = \begin{bmatrix} \varphi_{\mathrm{vH}}(\alpha h) \\ \varphi_{\mathrm{vH}}(-\alpha h) \end{bmatrix}$ と表せる. ここで $\varphi_{\mathrm{vH}}(\pm\alpha h) = e^{\pm i\alpha\pi(h)}\mathbb{1}$. 特に $\varepsilon = 0$ のとき

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{i\beta\phi(f)}\varphi_{\mathrm{g}}) = \frac{1}{2}\sum_{\sigma=\pm 1} (\varphi_{\mathrm{vH}}(\sigma\alpha h), e^{i\beta\phi(f)}\varphi_{\mathrm{vH}}(\sigma\alpha h)).$$

さらにこの右辺は $(\mathbb{1}, e^{i\beta(\phi(f)+\alpha(\hat{h}/\omega,\hat{f}))}\mathbb{1}) = e^{-\beta^2\|f\|^2/4 + i\beta\alpha(\hat{h}/\omega,\hat{f})}$ となる. $\varepsilon \neq 0$ の場合を考えてみよう. ランダムな場の作用素を $\Psi(f) = \phi(f) + K(f)$ で定義する. そうすると $(\mathbb{1}, \Psi(f)\mathbb{1}) = K(f)$, $(\mathbb{1}, \Psi(f)^2\mathbb{1}) - (\mathbb{1}, \Psi(f)\mathbb{1})^2 = \|f\|^2/2$. いま

$$\chi = \alpha\frac{1}{2}\omega(k)\hat{h}(k)\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|s|\omega(k)} X_{\varepsilon s} ds$$

としよう. $\varepsilon = 0$ のとき $\chi = \sigma\alpha\hat{h}$ である. ランダムな van Hove ハミルトニアンを $H_{\mathrm{vH}}(\chi)$ で定義すれば $\varphi_{\mathrm{vH}}(\chi)$ が H_{vH} の基底状態になり $\varphi_{\mathrm{vH}}(\chi) = e^{i\pi(\chi)}\mathbb{1}$. で与えられる.

定理 6.1 $\hat{h}/\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$ としよう. このとき

$$(\varphi_{\mathrm{g}}, e^{i\beta\phi(f)}\varphi_{\mathrm{g}}) = \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[(\mathbb{1}, e^{i\beta\Psi(f)}\mathbb{1})\right] = \mathbb{E}_{\mu_\infty^\varepsilon}\left[(\varphi_{\mathrm{vH}}(\chi), e^{i\beta\phi(f)}\varphi_{\mathrm{vH}}(\chi))\right]. \tag{6.2}$$

証明: 最初の等式は直接の計算による. 第 2 の等式は $e^{i\pi(\chi)}\Psi(f)e^{-i\pi(\chi)} = \phi(f)$ から導かれる. **終**

Acknowledgments: この論文は Grant-in-Aid for Science Research (B) 20340032 の経済的援助を受けています.

参考文献

[Abd12] A. Abdesselam, The ground state energy of the massless spin-boson model, *Ann. Henri Poincaré* **12** (2011), 1321–1347.

[AMRZ08] N. Angelescu, R. A. Minlos, J. Ruiz and V. Zagrebnov, Lower spectral branches of spin-boson model, *J. Math. Phys.* **49** (2008), 102105.

[AH97] A. Arai and M. Hirokawa, On the existence and uniqueness of ground states of generalized spin-boson model, *J. Funct. Anal.* **151** (1997), 455–503.

[BS98] A. Boutet de Monvel and J. Sahbani, On the spectral properties of the spin-boson Hamiltonians, *Lett. Math. Phys.* **44** (1998), 23–33.

[BH09] V. Betz and F. Hiroshima, Gibbs measures with double stochastic integrals on path space, *Infinite Dimensional Analysis, Quantum Probability and Related Topics* **12** (2009), 135–152.

[BHLMS02] V. Betz, F. Hiroshima, J. Lőrinczi, R.A. Minlos and H. Spohn, Ground state properties of the Nelson Hamiltonian: a Gibbs measure-based approach, *Rev. Math. Phys.* **14**, 173–198.

[GHPS12] C. Gérard, A. Panati and A. Suzuki, Absence of ground state of the Nelson model with variable coefficients, *J. Funct. Anal.* **262** (2012), 273–299.

[FN88] M. Fannes and B. Nachtergaele, Translating the spin-boson model into a classical system, *J. Math. Phys.* **29** (1988), 2288–2293.

[Ger00] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. Henri Poincaré* **1** (2000), 443–459, *and* A remark on the paper: "On the existence of ground states for Hamiltonians", mp-arc 06-146 (2006).

[HH10] D. Hasler and I. Herbst, Ground states in the spin boson model, arXiv:1003.5923v2 [math-ph], 2010.

[Hir99] M. Hirokawa, An expression of the ground state energy of the Spin-Boson model, *J. Funct. Anal.* **162** (1999), 178–218.

[Hir01] M. Hirokawa, Remarks on the ground state energy of the spin-boson model. An application of the Wigner-Weisskopf model, *Rev. Math. Phys.* **13** (2001), 221–251.

[Hir02] M. Hirokawa, Ground state transition for two-level system coupled with Bose field, *Phys. Lett. A* **294** (2002), 13–18.

[HHL12] M. Hirokawa, F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Spin-boson model through a Poisson-driven stochastic process, preprint 2012.

[Hir04] F. Hiroshima, Analysis of ground states of atoms interacting with a quantized radiation field, *Topics in the Theory of Schrödinger operators*, H. Araki and H. Ezawa (eds.), World Scientific, 2004, 145–272.

[Hir13] F. Hiroshima, Functional integral approach to semi-relativistic Pauli-Fierz model, preprint 2013.

[HIL12a] F. Hiroshima, T. Ichinose, J. Lőrinczi: Path integral representation for Schrödinger operators with Bernstein functions of the Laplacian, *Rev. Math. Phys.* **24** (2012), 1250013 (40 pages).

[HIL12b] F. Hiroshima, T. Ichinose and J. Lőrinczi, Probabilistic representation and fall-off of bound states of relativistic Schrödinger operators with spin 1/2, to appear in *Publ. RIMS.*

[HL08] F. Hiroshima and J. Lőrinczi, Functional integral representation of the Pauli-Fierz Hamiltonian with spin 1/2, *J. Funct. Anal.* **254** (2008), 2127–2185.

[HS95] M. Hübner and H. Spohn, Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **62** (1995), 289–323.

[LHB11] J. Lőrinczi, F. Hiroshima and V. Betz, *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space*, de Gruyter Studies in Mathematics **34**, 2011.

[LMS02] J. Lőrinczi, R.A. Minlos and H. Spohn, The infrared behavior in Nelsons model of a quantum particle coupled to a massless scalar field, *Ann. Henri Poincaré* **3** (2002), 1–28.

[Spo89] H. Spohn, Ground state(s) of the spin-boson Hamiltonian, *Commun. Math. Phys.* **123** (1989), 277–304.

[SD85] H. Spohn and R. Dümcke, Quantum tunneling with dissipation and the Ising model over $\mathbb{R}$, *J. Stat. Phys.* **41** (1985), 389–423.

[SSW90] H. Spohn, R. Stück and W. Wreszińki, Localisation for the spin J-boson Hamiltonian, *Ann. Inst. Henri Poincaré* **53** (1990), 225–244.