汎関数積分による Nelson 模型の紫外切断のくりこみ

Fumio Hiroshima (廣島文生)
Faculty of Mathematics, Kyushu University
Fukuoka, 819-0395, Japan
hiroshima@math.kyushu-u.ac.jp

1 はじめに

この論文では N-粒子ネルソン模型を考える．この模型は N 個のスピンのない荷電粒子とスカラーボゾンの線形な相互作用を表す模型である．フォック表現ではそのハミルトニアンは

$$H = H_{\rm p}\otimes 1\!\!1 + 1\!\!1\otimes H_{\rm f} + \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_{\rm I}(x)dx \tag{1.1}$$

で与えられる，ヒルベルト空間 $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R}^{3N})\otimes\mathscr{F}$ 上の自己共役作用素である． ここで $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ は粒子の状態空間，$\mathscr{F}$ は $L^2(\mathbb{R}^3)$ 上のフォック空間でボゾンの状態空間を表す．フォック空間とは $\mathscr{F} = \bigoplus_{n=0}^\infty \mathscr{F}^{(n)}$ で定義される．ここで $\mathscr{F}^{(n)} = \otimes_{\rm sym}^n L^2(\mathbb{R}^3)$ は n-ボゾン部分空間を表す．ただし $\mathscr{F}^{(0)} = \mathbb{C}$．$\mathscr{F}$ 上のノルムは $\|F\|_{\mathscr{F}}^2 = \sum_{n=0}^\infty \|f_n\|^2_{\mathscr{F}^{(n)}}$ で与えられる．真空ベクトルを $1\!\!1_{\mathscr{F}} = 1\oplus 0\oplus 0\oplus\ldots\in\mathscr{F}$ で表し，混乱の危険がないときは簡単に $1\!\!1$ と書くことにする．N-粒子シュレディンガー作用素は

$$H_{\rm p} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \Delta_j + V$$

で与えられる．$V:\mathbb{R}^{3N}\to\mathbb{R}$ はポテンシャルでかけ算作用素とみなす．$\Delta_j = \Delta_{x_j}$ は 3 次元ラプラシアンである．$a^*(f)$ と $a(f)$, $f\in L^2(\mathbb{R}^3)$, は生成作用素と消滅作用素を表す．それらは正準交換関係 $[a(f), a^*(g)] = (\bar{f}, g)$, $[a(f), a(g)] = 0 = [a^*(f), a^*(g)]$ を満たす．形式的に $a^\sharp(f) = \int a^\sharp(k)\hat{f}(k)dk$ と書くこともある．$\omega(k)$ は dispersion relation を表す．この論文の大部分では $\omega(k) = |k|$ である．場の自由ハミルトニアンを $H_{\rm f}$ とかき，これは ω の第 2 量子化作用素で定義される．つまり $H_{\rm f}\prod_{j=1}^n a^*(f_j)1\!\!1 = \sum_{j=1}^n a^*(f_1)\cdots a^*(\omega f_j)\cdots a^*(f_n)1\!\!1$, $H_{\rm f}1\!\!1 = 0$ となる．形式的には $H_{\rm f} = \int\omega(k)a^*(k)a(k)dk$ と表される．相互作用は

$$H_{\rm I}(x) = g\sum_{j=1}^N\int\frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}}\left(\widehat{\varphi}(k)e^{ik\cdot x_j}a(k) + \widehat{\varphi}(-k)e^{-ik\cdot x_j}a^*(k)\right)dk \tag{1.2}$$

と定義される． 我々は $\mathscr{H}\cong L^2(\mathbb{R}^{3N};\mathscr{F})$ の同一視をする． つまり $F\in\mathscr{H}$ は $\mathbb{R}^{3N}\ni x\mapsto F(x)\in\mathscr{F}$ で $\int_{\mathbb{R}^{3N}}\|F(x)\|^2_{\mathscr{F}}dx<\infty$ となるもの全体である．この同一視で相互作用は $(H_{\rm I}F)(x) = H_{\rm I}(x)F(x)$ となる．関数 φ は荷電分布を表す．その結果 $\int_{\mathbb{R}^3}\varphi(x)dx = 1$．この関数はハミルトニアンが作用素として well defined になるために必要であり紫外切断の役割を担っている．g は結合定数である．仮定

$$\widehat{\varphi}/\omega^{1/2}, \widehat{\varphi}/\omega\in L^2(\mathbb{R}^3), \quad \overline{\widehat{\varphi}(k)} = \widehat{\varphi}(-k) \tag{1.3}$$

のもとで相互作用 H_I は well defined で対称かつ $1\!\!1 \otimes H_\mathrm{f}$ に関して無限小になる．よって Kato-Rellich の定理から H は $D(H_\mathrm{p} \otimes 1\!\!1) \cap D(1\!\!1 \otimes H_\mathrm{f})$ 上で自己共役になる．さらに赤外切断 (IR) が

$$\widehat{\varphi}/\omega^{3/2} \in L^2(\mathbb{R}^3), \tag{1.4}$$

によって導入されれば，スペクトルの下限に対する固有状態 $\Psi \in \mathscr{H}$ が存在する ([Spo98, BFS98, Ger00, Ara01, Sas05])．つまり基底状態が存在する．[LMS02, Hir06] で示されたように条件 (1.4) は基底状態存在の必要条件にもなっている．

この論文では H の荷電分布の 1 点極限を考える．つまり $\varphi(x) \to (2\pi)^{3/2}\delta(x)$ または $\widehat{\varphi}(k) \to 1$．この極限の存在は [Nel64a] で作用素論的な手法 (Appendix C) で示されているが，我々はこれを汎関数積分を使って証明する．紫外切断の除去に関する論文として [GHPS12, HHS05] を挙げておく．また Nelson 自身も [Nel64b] で汎関数積分によるくりこみを考えていたようである．

さてこの極限をとるために我々は紫外切断関数として $\widehat{\varphi}_\varepsilon(k) = \mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2/2}$ をとる．この関数によってハミルトニアン H_ε を定義し $\varepsilon > 0$ を UV パラメターとみなす．そして $H_\varepsilon - E_\varepsilon$ の $\varepsilon \downarrow 0$ 極限を考える．ここで E_ε はエネルギーくりこみ項である．これは具体的に後で与える．この論文の主定理は以下である．

(1) 汎関数積分をつかって E_ε をペア相互作用の対角成分として導きだす．

(2) $H_\mathrm{ren} = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(H_\varepsilon - E_\varepsilon)$ を熱半群の意味で示す．

(3) H_ren のペア相互作用を導く．

(4) H_ren の弱結合極限 (weak coupling limit) を求める．

2　パス測度によるエネルギーくりこみ

2.1　正則化されたハミルトニアンの汎関数積分表示

はじめに $\omega(k) = |k|$ としよう．いま $1\!\!1_\Lambda(k) = \begin{cases} 1, & \omega(k) < \Lambda \\ 0, & \omega(k) \geq \Lambda \end{cases}$ とし $1\!\!1_\Lambda^\perp(k) = 1\!\!1 - 1\!\!1_\Lambda(k)$ とおく．$\Lambda > 0$ を仮定する．これは (2.24), 補題 2.9 と系 2.21 で必要になる．簡単のために次の仮定をする:

仮定 2.1 ポテンシャル V は有界かつ連続関数．特に *Kato*-クラスである．つまり

$$\lim_{t\downarrow 0} \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x\left[\int_0^t |V(B_s)|ds\right] = 0. \tag{2.1}$$

紫外切断のくりこみでは V は全く本質的ではなく，$V \equiv 0$ としても構わない．Kato-クラスについては Appendix A で性質をまとめてある．Kato-クラスの性質はこの論文のいたるところで使う．カットオフ関数 $\widehat{\varphi}_\varepsilon(k) = \mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2/2}1\!\!1_\Lambda^\perp(k)$, $\varepsilon \geq 0$, を考えよう．正則化されたハミルトニアンを

$$H_\varepsilon = H_\mathrm{p} \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes H_\mathrm{f} + \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_\mathrm{I}^\varepsilon(x)dx, \quad \varepsilon > 0, \tag{2.2}$$

で定義する．ここで

$$H_{\mathrm{I}}^{\varepsilon}(x)=g\sum_{j=1}^{N}\int\frac{1}{\sqrt{2\omega(k)}}\left(\widehat{\varphi}_{\varepsilon}(k)\mathrm{e}^{ik\cdot x_j}a(k)+\widehat{\varphi}_{\varepsilon}(-k)\mathrm{e}^{-ik\cdot x_j}a^*(k)\right)dk \tag{2.3}$$

である．この論文の主目的は H_ε で $\varepsilon\downarrow 0$ の極限を考えることである．

$$E_\varepsilon=-\frac{g^2}{2}N\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2}}{\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_\Lambda^{\perp}(k)dk \tag{2.4}$$

としよう．ここで

$$\beta(k)=\frac{1}{\omega(k)+|k|^2/2}. \tag{2.5}$$

$E_\varepsilon\to-\infty$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ に注意せよ．主定理では $H_\varepsilon-E_\varepsilon$ が $\varepsilon\downarrow 0$ で非自明な自己共役作用素 H_{ren} に収束することを示す．その極限を UV 正則化ネルソンハミルトニアンとよぶ．

定理 2.2 次を満たす自己共役作用素 H_{ren} が存在する*:*

$$\mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon-E_\varepsilon)}=\mathrm{e}^{-tH_{\mathrm{ren}}},\quad t\geq 0. \tag{2.6}$$

我々はこの定理を汎関数積分をつかって証明する．$(B_t)_{t\in\mathbb{R}}=(B_t^1,...,B_t^N)_{t\in\mathbb{R}}$ をブラウン運動とする．ここで $(B_t^j)_{t\in\mathbb{R}}$, $j=1,...,N$, は独立な N 個の全実軸上で定義された $\mathbb{R}^3$-値ブラウン運動で, ウィナー測度を備えた連続パス空間上の確率過程である．$\mathbb{E}^x[\cdots]$ で時刻ゼロで x から出発するウィナー測度に関する期待値 (積分) を表す．$(F,\mathrm{e}^{-2TH_\varepsilon}G)$([LHB11, Theorem 6.3]) のファインマン・カッツ公式はよく知られている．特に, $F=f\otimes\mathbb{1}$ と $G=h\otimes\mathbb{1}$ に対しては次のようになる．

命題 2.3 $f,h\in L^2(\mathbb{R}^3)$ としよう．このとき

$$(f\otimes\mathbb{1},\mathrm{e}^{-2TH_\varepsilon}h\otimes\mathbb{1})=\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^{T}V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon}\right].$$

ここで $S_\varepsilon=\sum_{i,j=1}^{N}\int_{-T}^{T}ds\int_{-T}^{T}dtW_\varepsilon(B_t^i-B_s^j,t-s)$ はペア相互作用でペアポテンシャルは $W_\varepsilon(x,t)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2\omega(k)}\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2}\mathrm{e}^{-ik\cdot x}\mathrm{e}^{-\omega(k)|t|}\mathbb{1}_\Lambda^{\perp}(k)dk$ で与えられる．

2.2 くりこまれた作用

次の関数を考えよう．

$$\varphi_\varepsilon(x,t)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2}\mathrm{e}^{-ik\cdot x-\omega(k)|t|}}{2\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_\Lambda^{\perp}(k)dk,\quad\varepsilon\geq 0. \tag{2.7}$$

ここで $\beta(k)$ は (2.5) で与えられるものである．

命題 2.4 関数 S_0^{ren} で次を満たすものが存在する*:*

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}^x\left[\mathrm{e}^{-\int_{-T}^{T}V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}(S_\varepsilon-4NT\varphi_\varepsilon(0,0))}\right]=\mathbb{E}^x\left[\mathrm{e}^{-\int_{-T}^{T}V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}\right]. \tag{2.8}$$

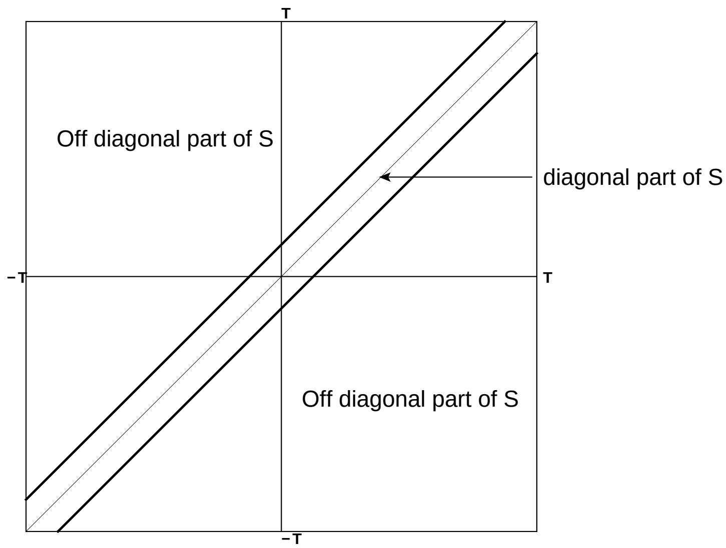

Figure 1: S_ε の対角成分と非対角成分

$W_\varepsilon(x,t)$ は滑らかで, $W_\varepsilon(x,t)\to W_0(x,t)$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ が $(x,t)\neq(0,0)$ で成り立つ. ここで

$$W_0(x,t)=\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2\omega(k)}\mathrm{e}^{-ik\cdot x}\mathrm{e}^{-\omega(k)|t|}\mathbb{1}_\Lambda^\perp(k)dk. \tag{2.9}$$

しかし $W_\varepsilon(0,0)\to\infty$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ である. つまり $W_0(x,t)$ は $(0,0)$ で特異性をもつ. (2.8) は非自明である. これを証明しよう.

今から $T>0$ を固定する. $\varepsilon\downarrow 0$ のとき相互作用の対角成分だけが特異な項である. また $0<\tau\le T$ を固定し, $[t]_T=-T\vee t\wedge T$ としよう. 正則化された相互作用を対角成分と非対角成分にわける: $S_\varepsilon=S_\varepsilon^{\mathrm{D}}+S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}$. ここで

$$S_\varepsilon^{\mathrm{D}}=2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_s^{[s+\tau]_T}dt\,W_\varepsilon(B_t^i-B_s^j,t-s) \tag{2.10}$$

そして

$$S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}=2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_{[s+\tau]_T}^T dtW_\varepsilon(B_t^i-B_s^j,t-s). \tag{2.11}$$

$S_\varepsilon^{\mathrm{D}}$ は S_ε を対角成分の近傍 $\{(t,t)\in\mathbb{R}^2||t|\le T\}$ で積分したもの, そして $S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}$ はそれ以外の部分を表す. $\tau=T$ のときは $S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}=0$ となる. 次の補題はすぐにわかる.

補題 2.5 パスごとに $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}=S_0^{\mathrm{OD}}$. ここで S_0^{OD} は $S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}\lceil_{\varepsilon=0}$ である.

確率積分をつかえば解析が困難な項 $S_\varepsilon^{\mathrm{D}}$ を評価できる.

補題 2.6 ε によらない定数 $c>0$ で次をみたすものがある:

$$|\nabla\varphi_\varepsilon(x,t)|\le c|t|^{-1},\quad t\neq 0$$
$$|\nabla\varphi_\varepsilon(x,t)|\le c|x|^{-1},\quad |x|\neq 0.$$

さらに $\varphi_0-\varphi_\varepsilon$ に対しても, 定数 $\mathrm{c}_\varepsilon>0$ で次を満たすものがある: $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathrm{c}_\varepsilon=0$ つまり

$$\begin{aligned}|\nabla\varphi_\varepsilon(x,t)-\nabla\varphi_0(x,t)|&\le \mathrm{c}_\varepsilon|t|^{-1},\quad t\neq 0,\\ |\nabla\varphi_\varepsilon(x,t)-\nabla\varphi_0(x,t)|&\le \mathrm{c}_\varepsilon|x|^{-1},\quad |x|\neq 0.\end{aligned}$$

証明. はじめの不等式は

$$|\nabla\varphi_\varepsilon(x,t)|\le\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{2(\omega(k)+|k|^2/2)}\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2}\mathrm{e}^{-\omega(k)|t|}1\!\!1_\Lambda^\perp(k)dk\le c\int_\Lambda^\infty \mathrm{e}^{-rt}dr$$

よりわかる. 次に第二の不等式を証明しよう. 角度変数で積分すると

$$\varphi_\varepsilon(x,t)=2\pi\int_\Lambda^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon r^2-r|t|}}{r(2+r)}\frac{\sin(r|x|)}{|x|}dr. \tag{2.12}$$

(2.12) の微分は

$$\nabla\varphi_\varepsilon(x,t)=\frac{2\pi x}{|x|^2}\int_\Lambda^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon r^2/|x|^2-|t|r/|x|}}{r(2|x|+r)}\left(r\cos r-\sin r\right)dr \tag{2.13}$$

となり, 右辺を評価すると

$$|\nabla\varphi_\varepsilon(x,t)|\le\int_0^1\frac{Cr^3}{r^2}dr+\left|\int_1^\infty\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon r^2/|x|^2-|t|r/|x|}}{(2|x|+r)}\cos r dr\right|+\int_1^\infty\frac{1}{r^2}dr.$$

ここで全ての $r\in[0,1]$ で $|r\cos r-\sin r|\le Cr^3$ をつかった. 真ん中の項の積分は有界なので補題が示せた. □

補題 2.7 もし $\varepsilon>0$ ならば

$$\begin{aligned}S_\varepsilon^{\mathrm{D}}&=2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varphi_\varepsilon(B_s^i-B_s^j,0)ds-2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i-B_s^j,[s+\tau]_T-s)ds\\ &\quad+2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_s^{[s+\tau]_T}\nabla\varphi_\varepsilon(B_t^i-B_s^j,t-s)\cdot dB_t^i.\end{aligned} \tag{2.14}$$

証明. $\varphi_\varepsilon(x,t)$ は次の方程式の解である:

$$\left(\partial_t+\frac{1}{2}\Delta\right)\varphi_\varepsilon(x,t)=-W_\varepsilon(x,t),\qquad x\in\mathbb{R}^3,\quad t\ge 0. \tag{2.15}$$

i と j を固定する. このとき伊藤の公式から

$$\begin{aligned}&\varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i-B_s^j,[s+\tau]_T-s)-\varphi_\varepsilon(B_s^i-B_s^j,0)\\ &=\int_s^{[s+\tau]_T}\nabla\varphi_\varepsilon(B_t^i-B_s^j,t-s)\cdot dB_t^i+\int_s^{[s+\tau]_T}\left(\partial_t+\frac{1}{2}\Delta\right)\varphi_\varepsilon(B_t^i-B_s^j,t-s)dt.\end{aligned} \tag{2.16}$$

よって (2.15) から

$$\int_s^{[s+\tau]_T} W_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)dt$$
$$= \varphi_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0) - \varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s) + \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla\varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)\cdot dB_t^i \tag{2.17}$$

が従う．これを $S_\varepsilon^{\mathrm{D}}$ に代入すれば主張が示せる． □

の右辺第一項の $i=j$ の部分 $=4NT\varphi_\varepsilon(0,0)$ がまさに発散項になっているので，くりこまれた作用を次のように定義することが示唆される:

$$S_\varepsilon^{\mathrm{ren}} = S_\varepsilon - 4NT\varphi_\varepsilon(0,0), \quad \varepsilon > 0. \tag{2.18}$$

これは $S_\varepsilon^{\mathrm{ren}} = S_\varepsilon^{\mathrm{OD}} + X_\varepsilon + Y_\varepsilon + Z_\varepsilon$ のように表せる．ここで

$$X_\varepsilon = 2\sum_{i\neq j}^N \int_{-T}^T \varphi_\varepsilon(B_s^i - B_s^j, 0)ds, \tag{2.19}$$

$$Y_\varepsilon = 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_s^{[s+\tau]_T} \nabla\varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)\cdot dB_t^i, \tag{2.20}$$

$$Z_\varepsilon = -2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i - B_s^j, [s+\tau]_T - s)ds. \tag{2.21}$$

補題 2.8 ある定数 c_z と c_s が存在して $|Z_\varepsilon| \le c_z T$ と $|S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}| \le c_s T^2$ がパスと $\varepsilon \ge 0$ に一様に成立する．

証明.

$$|Z_\varepsilon| \le 4\pi N^2 \left(\int_{-T}^{T-\tau} ds \int_\Lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-r\tau}}{1+r/2}dr + \int_{T-\tau}^T ds \int_\Lambda^\infty \frac{\mathrm{e}^{-r(T-s)}}{1+r/2}dr \right) \le c_z T$$

が適当な $c_z > 0$ で成り立つ．不等式 $|S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}| \le c_s T^2$ も同じようにして得られる． □

補題 2.9 $\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x[|X_\varepsilon|] < \infty$ が全ての $\varepsilon \ge 0$ で成立する．

証明.

$$X_\varepsilon = \sum_{i\neq j}^N \int_{-T}^T ds \frac{2\pi}{|B_s^i - B_s^j|} \int_\Lambda^\infty \frac{\sin\sqrt{r|B_s^i - B_s^j|}}{r + r^2/2} \mathrm{e}^{-\varepsilon r^2} dr, \quad \varepsilon \ge 0 \tag{2.22}$$

に注意しよう．その結果

$$\mathbb{E}^x[|X_\varepsilon|] \le \sum_{i\neq j}^N \int_{-T}^T ds \mathbb{E}^x\left[\frac{2\pi}{|B_s^i - B_s^j|}\right] \int_\Lambda^\infty \frac{1}{r+r^2/2}dr. \tag{2.23}$$

仮定 $\Lambda > 0$ から

$$\int_\Lambda^\infty \frac{1}{r+r^2/2}dr < \infty. \tag{2.24}$$

$\sum_{i\neq j}^N |x^i - x^j|^{-1}$ は $L^2(\mathbb{R}^{3N})$ (Appendix A を参照せよ) 上の Kato-クラスなので,

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x\left[\sum_{i\neq j}^N \int_{-T}^T \frac{ds}{|B_s^i - B_s^j|}\right] < \infty.$$

よって (2.23) は有界となり補題が従う. □

補題 2.10 $\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon|] < \infty$ が全ての $\varepsilon \geq 0$ で成立し, $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon - Y_0|] = 0$ となる.

証明. Fubini の定理より確率積分とルベーグ積分が交換できて Y_ε は

$$Y_\varepsilon = 2\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left(\int_{[t-\tau]_T}^t \nabla\varphi_\varepsilon(B_t^i - B_s^j, t-s)ds\right)\cdot dB_t^i \tag{2.25}$$

と表せる. これは $\varepsilon \geq 0$ ごとに確率変数である. 伊藤のアイソメトリーから

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^x\left[|Y_\varepsilon - Y_0|^2\right] \\
&= 4\sum_{i=1}^N \int_{-T}^T \mathbb{E}^0\left[\left|\sum_{j=1}^N \int_{[t-\tau]_T}^t (\nabla\varphi_\varepsilon - \nabla\varphi_0)(B_t^i - B_s^j + x^i - x^j, t-s)ds\right|^2\right] dt \\
&\leq 4\mathrm{c}_\varepsilon\sqrt{N}\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \mathbb{E}^0\left[\left(\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-\theta}|t-s|^{-(1-\theta)}ds\right)^2\right] dt.
\end{aligned}$$

ここで補題 2.6 と不等式 $|\nabla\varphi_\varepsilon(x,t) - \nabla\varphi_0(x,t)| \leq \mathrm{c}_\varepsilon |x|^{-\theta}|t|^{-(1-\theta)}$, $\theta \in [0,1]$ をえるために補間をつかった. ここで $\mathrm{c}_\varepsilon \to 0$ $(\varepsilon \downarrow 0)$ に注意せよ. 適当な $\frac{1}{2} < \theta < 1$ で Schwarz 不等式から

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon - Y_0|^2] \\
&\leq 4\mathrm{c}_\varepsilon\sqrt{N}\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \mathbb{E}^0\left[\int_{[t-\tau]_T}^t |B_t^i - B_s^j + x^i - x^j||^{-2\theta}ds\right]\left(\int_{[t-\tau]_T}^t |t-s|^{-2(1-\theta)}ds\right)dt \\
&\leq 4\mathrm{c}_\varepsilon\tau^{2\theta-1}\sqrt{N}\sum_{i,j=1}^N \int_{-T}^T \left(\int_{[t-\tau]_T}^t \mathbb{E}^0[|B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta}]ds\right)dt.
\end{aligned} \tag{2.26}$$

$x^i - x^j = X$ とおく. このとき

$$\begin{aligned}
\int_{-T}^T dt \int_{\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3} |u - v + X|^{-2\theta} p_t(u)p_s(v)dudv &\leq \int_{-\infty}^\infty dt \int_{\mathbb{R}^3} |u|^{-2\theta}p_{t+s}(u-X)du \\
&= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|u-X|}\frac{1}{|u|^{2\theta}}du.
\end{aligned}$$

また $|x|^{-2\theta}\in L^p(\mathbb{R}^3)+L^\infty(\mathbb{R}^3)$ が $p>3/2$ で成立するから, $|x|^{-2\theta}$ は Kato-クラスなので

$$\sup_{X\in\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{|u-X|}\frac{1}{|u|^{2\theta}}du<\infty.$$

Appendix A を参照せよ．この結果 $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\int_{-T}^T dt\int_{[t-\tau]_T}^t ds\mathbb{E}^x[|B_t^i-B_s^j|^{-2\theta}]<\infty$ が従う．ゆえに

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon-Y_0|^2]\to 0\quad(\varepsilon\downarrow 0) \tag{2.27}$$

が (2.26) と $\mathrm{c}_\varepsilon\to 0$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ からえられる．さらに $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon|]<\infty$ が不等式

$$\mathbb{E}^x[|Y_\varepsilon|^2]\le 4c\tau^{2\theta-1}\sqrt{N}\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T dt\int_{[t-\tau]_T}^t \mathbb{E}^x[|B_t^i-B_s^j+x^i-x^j|^{-2\theta}]ds$$

から従う． □

$x=(x^1,...,x^N)\in\mathbb{R}^{3N}$ に対して

$$S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)=2\sum_{i\neq j}^N\int_0^{2T}ds\int_{[s+\tau]_T}^T W_\varepsilon(B_t^i-B_s^j+x^i-x^j,t-s)dt,$$

$$X_\varepsilon^T(x)=2\sum_{i,j=1}^N\int_0^{2T}\varphi_\varepsilon(B_s^i-B_s^j+x^i-x^j,0)ds,$$

$$Y_\varepsilon^T(x)=2\sum_{i,j=1}^N\int_0^{2T}ds\int_s^{[s+\tau]_T}\nabla\varphi_\varepsilon(B_t^i-B_s^j+x^i-x^j,t-s)\cdot dB_t^i,$$

$$Z_\varepsilon^T(x)=-2\sum_{i,j=1}^N\int_0^{2T}\varphi_\varepsilon(B_{[s+\tau]_T}^i-B_s^j+x^i-x^j,[s+\tau]_T-s)ds.$$

補題 2.11 $\alpha\in\mathbb{R}$ としよう．このとき定数 $c_U(\alpha)>0$($\varepsilon\ge 0$ に依っていない)で

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{\alpha U_\varepsilon^T(x)}]<c_U(\alpha),\quad \varepsilon\ge 0,\qquad U=S^{\mathrm{OD}},X,Y,Z \tag{2.28}$$

となるものがある．

証明. $U=X$ としよう．不等式 $|X_\varepsilon^T(x)|\le C\sum_{i\neq j}^N\int_0^{2T}|B_s^i-B_s^j|^{-1}ds$ と $\sum_{i\neq j}^N|x^i-x^j|^{-1}$ が Kato-クラスであることから

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left|\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{\alpha X_\varepsilon^T(x)}]\right|\le\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x\left[\mathrm{e}^{|\alpha|\sum_{i\neq j}\int_0^{2T}|B_s^i-B_s^j|^{-1}ds}\right]<\infty. \tag{2.29}$$

$U=Y$ としよう．$\Phi_t=\Phi_t(x)=(\Phi_t^1,\ldots,\Phi_t^N)$ とし,

$$\Phi_t^i=\Phi_t^i(x)=2\sum_{j=1}^N\int_{[t-\tau]_T}^t\nabla\varphi_\varepsilon(B_t^i-B_s^j+x^i-x^j,t-s)ds$$

としよう．このとき $Y_\varepsilon^T(x)$ は次のように表せる

$$Y_\varepsilon^T(x) = \int_0^{2T} \Phi_t \cdot dB_t. \tag{2.30}$$

Girsanov 定理から $\mathbb{E}^0\left[e^{2\alpha\int_0^{2T}\Phi_t\cdot dB_t - \frac{1}{2}(2\alpha)^2\int_0^{2T}|\Phi_t|^2dt}\right] = 1$ と不等式

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}^0\left[e^{\alpha Y_\varepsilon^T(x)}\right]\right)^2 &\le \mathbb{E}^0\left[e^{2\alpha\int_0^{2T}\Phi_t\cdot dB_t - \frac{1}{2}(2\alpha)^2\int_0^{2T}|\Phi_t|^2dt}\right]\mathbb{E}^0\left[e^{2\alpha^2\int_2^{2T}|\Phi_t|^2dt}\right]\\ &= \mathbb{E}^0\left[e^{2\alpha^2\int_0^{2T}|\Phi_t|^2dt}\right]\end{aligned}$$

をえる．(2.26) と同様に $\int_0^{2T}|\Phi_t|^2dt \le 4c\tau^{2\theta-1}\sqrt{N}Q(x)$．ここで c は補題 2.6 の定数である．これは ε によっていない．そして

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^N \int_0^{2T} ds \int_s^{[s+\tau]_T} |B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta}dt.$$

$\frac{1}{2} < \theta < 1$ に注意する．よって $\left(\mathbb{E}^0\left[e^{\alpha Y_\varepsilon^T(x)}\right]\right)^2 \le \mathbb{E}^0\left[e^{\gamma Q(x)}\right]$．ここで $\gamma = 8c\sqrt{N}\alpha^2\tau^{2\theta-1}$．
Jensen 不等式から

$$\mathbb{E}^0\left[e^{\gamma Q(x)}\right] \le \int_0^{2T}\frac{ds}{2T}\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_s^{[s+\tau]_T}|B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta}dt}\right]. \tag{2.31}$$

(2.31) の右辺を $\int_0^{2T} = \int_0^{2T-\tau} + \int_{2T-\tau}^{2T}$ とわける．最初の項を考える．$[s+\tau]_T = s+\tau$ だから，

$$\begin{aligned}&\int_0^{2T-\tau}\frac{ds}{2T}\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_s^{[s+\tau]_T}|B_t^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta}dt}\right]\\ &\quad= \int_0^{2T-\tau}\frac{ds}{2T}\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_0^\tau|B_{s+t}^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta}dt}\right].\end{aligned} \tag{2.32}$$

$\mathscr{F}_s = \sigma(B_r^j; 0 \le r \le s,\ j = 1, ..., N)$ を自然な filtration とする．条件付き期待値をとって，マルコフ性を使うと

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_0^\tau|B_{s+t}^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta}dt}\right] &= \mathbb{E}^0\left[\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_0^\tau|B_{s+t}^i - B_s^j + x^i - x^j|^{-2\theta}dt}|\mathscr{F}_s\right]\right]\\ &= \mathbb{E}^0\left[\mathbb{E}^{B_s}\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i - B_0^j + x^i - x^j|^{-2\theta}dt}\right]\right].\end{aligned}$$

さらに計算すると

$$\begin{aligned}&= (2\pi s)^{-3N/2}\int_{\mathbb{R}^{3N}} e^{-|y|^2/2s}\mathbb{E}^y\left[e^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i - B_0^j + x^i - x^j|^{-2\theta}dt}\right]dy\\ &= (2\pi s)^{-3N/2}\int_{\mathbb{R}^{3N}} e^{-|y|^2/2s}\prod_{i=1}^N\mathbb{E}^0\left[e^{2T\gamma\sum_{j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i + (x+y)^i - (x+y)^j|^{-2\theta}dt}\right]dy.\end{aligned}$$

$|x|^{-2\theta}$ が Kato-クラスなので

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[e^{\beta\int_0^\tau|B_s^i + x|^{-2\theta}ds}] = \sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x[e^{\beta\int_0^\tau|B_s^i|^{-2\theta}ds}] < \infty$$

が全ての $\beta\in\mathbb{R}$ (Appendix A を参照せよ) で成り立つ．これから

$$\sup_{x,y\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{2T\gamma\sum_{j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i+(x+y)^i-(x+y)^j|^{-2\theta}dt}\right]<\infty. \tag{2.33}$$

特に

$$\begin{aligned}&\int_0^{2T-\tau}\frac{1}{2T}\mathbb{E}^x\left[\mathrm{e}^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_s^{[s+\tau]_T}|B_t^i-B_s^j+x^i-x^j|^{-2\theta}dt}\right]ds\\&\leq\frac{2T-\tau}{2T}\sup_{x,y\in\mathbb{R}^3}\prod_{i=1}^N\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{2T\gamma\sum_{j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i+(x+y)^i-(x+y)^j|^{-2\theta}dt}\right]<\infty.\end{aligned} \tag{2.34}$$

次に第 2 項を考える．$[s+\tau]_T=2T$．上と同様に

$$\begin{aligned}&\int_{2T-\tau}^{2T}\frac{1}{2T}\mathbb{E}^x\left[\mathrm{e}^{2T\gamma\sum_{i,j=1}^N\int_s^{[s+\tau]_T}|B_t^i-B_s^j+x^i-x^j|^{-2\theta}dt}\right]ds\\&\leq\frac{\tau}{2T}\sup_{x,y\in\mathbb{R}^3}\prod_{i=1}^N\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{2T\gamma\sum_{j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i+(x+y)^i-(x+y)^j|^{-2\theta}dt}\right]<\infty.\end{aligned} \tag{2.35}$$

よって (2.34) と (2.35) から

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{2\alpha Y_\varepsilon^T(x)}]\leq\left(\sup_{x,y\in\mathbb{R}^3}\prod_{i=1}^N\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{2T\gamma\sum_{j=1}^N\int_0^\tau|B_t^i+(x+y)^i-(x+y)^j|^{-2\theta}dt}\right]\right)^{1/2}<\infty. \tag{2.36}$$

最後に $U=Z$ と $U=S^{\mathrm{OD}}$ の場合を考える．$|Z_\varepsilon^T(x)|\leq c_zT$ と $|S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)|\leq cT^2$ から $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\alpha Z_\varepsilon^T(x)}]<\infty$ と $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{OD}T}(x)}]<\infty$ がわかる． □

補題 2.12 $\alpha\in\mathbb{R}$ とし $f,h\in L^2(\mathbb{R}^3)$ としよう．このとき

$$\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x[f(B_{-T})h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^TV(B_s)ds}\mathrm{e}^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}]<\infty$$

が全ての $\varepsilon\geq0$ で成り立つ．

証明．分解 $S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}=S_\varepsilon^{\mathrm{OD}}+X_\varepsilon+Y_\varepsilon+Z_\varepsilon$ を思い出そう．Schwarz 不等式から

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x[|f(B_{-T})h(B_T)|\mathrm{e}^{\alpha S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}]\\&\leq\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^0\left[|f(x)h(B_{2T}+x)|\mathrm{e}^{-\int_0^{2T}V(B_s+x)ds}\mathrm{e}^{\alpha(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right]\\&\leq\|f\|\|h\|\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{-2\int_0^{2T}V(B_s+x)ds}\mathrm{e}^{2\alpha(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right]\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{2.37}$$

補題 2.11 と V が Kato-クラスより

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{-2\int_0^{2T}V(B_s+x)ds}\mathrm{e}^{2\alpha(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right]<\infty,$$

そして補題が示せた． □

2.3 くりこまれたハミルトニアン

補題 2.13 もし $\alpha\in\mathbb{R}$ ならば

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}^0\left[|\mathrm{e}^{\alpha X_\varepsilon^T(x)}-\mathrm{e}^{\alpha X_0^T(x)}|\right]=0,\quad x\in\mathbb{R}^{3N}. \tag{2.38}$$

証明. $|X_\varepsilon^T(x)|\le\int_0^{2T}V_C(B_s^1+x^1,....,B_s^N+x^N)ds$ と

$$\mathbb{E}^0\left[|\mathrm{e}^{\alpha X_\varepsilon^T(x)}-\mathrm{e}^{\alpha X_0^T(x)}|\right]\le 2\mathbb{E}^0\left[|\mathrm{e}^{\alpha\int_{-T}^T V_C(B_s^1+x^1,....,B_s^N+x^N)ds}\right]<\infty$$

がわかる. x ごとに $X_\varepsilon^T(x)\to X_0^T(x)$ a.s. なのでルベーグの優収束定理より (2.38) がわかる. □

補題 2.14 もし $\alpha\in\mathbb{R}$ ならば

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[|\mathrm{e}^{\alpha U_\varepsilon^T(x)}-\mathrm{e}^{\alpha U_0^T(x)}|]=0,\quad U=S^{\mathrm{OD}},Y,Z. \tag{2.39}$$

証明. $U=Y$ としよう. $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left[|\mathrm{e}^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x)-Y_0^T(x))}-1|\right]\to 0$ を示せば十分である.

$$\mathbb{E}^0\left[\left(\mathrm{e}^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x)-Y_0^T(x))}-1\right)^2\right]=\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{2\alpha(Y_\varepsilon^T(x)-Y_0^T(x))}\right]+1-2\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x)-Y_0^T(x))}\right] \tag{2.40}$$

はわかる. 以下で $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x)-Y_0^T(x))}]=1$ を示そう. 確率変数 $\delta\Phi_t=\delta\Phi_t(x)=(\delta\Phi_t^1,\ldots,\delta\Phi_t^N)$ と

$$\delta\Phi_t^i=\delta\Phi_t^i(x)=2\sum_{j=1}^N\int_{[t-\tau]_T}^t(\nabla\varphi_\varepsilon-\nabla\varphi_0)(B_t^i-B_s^j+x^i-x^j,t-s)ds$$

を定義すれば

$$Y_\varepsilon^T(x)-Y_0^T(x)=\int_0^{2T}\delta\Phi_t(x)dt.$$

Girsanov の定理から $1=\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{\alpha\int_0^{2T}\delta\Phi_t\cdot dB_t-\frac{\alpha^2}{2}\int_0^{2T}|\delta\Phi_t|^2dt}]$ が $\alpha\in\mathbb{R}$ ごとに成り立つから

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{\alpha(Y_\varepsilon^T(x)-Y_0^T(x))}\right]-1\right)^2\le\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{2\alpha\int_0^{2T}\delta\Phi_t\cdot dB_t}\right]\mathbb{E}^0\left[\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}\int_0^{2T}|\delta\Phi_t|^2dt}\right)^2\right]. \tag{2.41}$$

再び $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{2\alpha\int_0^{2T}\delta\Phi_t\cdot dB_t}\right]\le\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{4\alpha^2\int_0^{2T}|\delta\Phi_t|^2dt}\right]\right)^{1/2}$. さらに

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left[\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{\alpha^2}{2}\int_0^{2T}|\delta\Phi_t|^2dt}\right)^2\right]\le\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0\left[\left|\frac{\alpha^2}{2}\int_0^{2T}|\delta\Phi_t|^2dt\right|^2\right]\to 0 \tag{2.42}$$

$(\varepsilon\downarrow 0)$. よって (2.42) が補題 2.10 からわかる. $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{4\alpha^2\int_0^{2T}|\delta\Phi_t|^2dt}\right]\right)^{1/2}$ は ε に関して一様有界である. これは補題 2.12 と同じようにして示せる. よって (2.41) は $\varepsilon\downarrow 0$ のときゼロに収束し $U=Y$ に対して (2.39) が示せた.

$U=Z$ としよう．$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x\left[|\mathrm{e}^{\alpha(Z_\varepsilon-Z_0)}-1|\right]\to 0$ を示せばいい．

$$\begin{aligned}
&Z_\varepsilon(x)-Z_0(x)\\
&=2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{e}^{-ik\cdot(B^i_{[s+\tau]_T-s}+x^i-B^j_{[s+\tau]_T-s}-x^j)}\mathrm{e}^{-([s+\tau]_T-s)\omega(k)}}{\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}^\perp_\Lambda(k)(1-\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2})dk
\end{aligned}$$

がわかる．$\eta_\varepsilon(x)=\alpha(Z_\varepsilon(x)-Z_0(x))$ としよう．直接 $|\eta_\varepsilon(x)|^n\le c^n\alpha^nT^n\varepsilon^n$ が x に依っていないある定数 c で成り立つことがわかる．よって $\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{\eta_\varepsilon(x)}]=1+\sum_{n\ge1}\frac{1}{n!}\mathbb{E}^0[\eta_\varepsilon(x)^n]$．そして

$$\sum_{n\ge1}\frac{1}{n!}\mathbb{E}^0[|\eta_\varepsilon(x)|^n]\le\sum_{n\ge1}\frac{1}{n!}c^nT^n\varepsilon^n\to0$$

$(\varepsilon\downarrow0)$ が x に一様に成り立つ．よって (2.39) が $U=Z$ のとき成り立つ．$U=S^{\mathrm{OD}}$ のときも (2.39) と同様にわかる． □

補題 2.15 $\alpha\in\mathbb{R}$ とし $f,h\in L^2(\mathbb{R}^3)$ としよう．このとき

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\downarrow0}\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x[f(B_{-T})h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^TV(B_s)ds}\mathrm{e}^{\alpha S^{\mathrm{ren}}_\varepsilon}]\\
&\quad=\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x[f(B_{-T})h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^TV(B_s)ds}\mathrm{e}^{\alpha S^{\mathrm{ren}}_0}]. \qquad (2.43)
\end{aligned}$$

証明．$A_\varepsilon=A_\varepsilon(x)=\alpha(S^{\mathrm{OD},T}_\varepsilon(x)+Y^T_\varepsilon(x)+Z^T_\varepsilon(x))$ とおこう．そうすると $dxdP^x$ のもとでの ブラウン運動のシフト不変性と telescoping から

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x\left[f(B_{-T})h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^TV(B_s)ds}\left(\mathrm{e}^{\alpha S^{\mathrm{ren}}_\varepsilon}-\mathrm{e}^{\alpha S^{\mathrm{ren}}_0}\right)\right]\right|\\
&\le\ \mathrm{e}^{2T\|V\|_\infty}\int_{\mathbb{R}^3}dx|f(x)|\mathbb{E}^0\left[|h(B_{2T}+x)|\left(\mathrm{e}^{A_\varepsilon(x)+\alpha X^T_\varepsilon(x)}-\mathrm{e}^{A_0(x)+\alpha X^T_0(x)}\right)\right]\\
&\le\ \mathrm{e}^{2T\|V\|_\infty}\|f\|\|h\|\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0[|\mathrm{e}^{A_\varepsilon(x)}-\mathrm{e}^{A_0(x)}|^4]\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{4\alpha X^T_\varepsilon(x)}]\right)^{1/4}\\
&\qquad+\mathrm{e}^{2T\|V\|_\infty}\int_{\mathbb{R}^3}dx|f(x)|E_\varepsilon(x)\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0[|\mathrm{e}^{4A_0}]\right)^{1/4}.
\end{aligned}$$

ここで $E_\varepsilon(x)=\left(\mathbb{E}^0[|h(B_{2T}+x)|^2]\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}^0[(\mathrm{e}^{\alpha X^T_\varepsilon(x)}-\mathrm{e}^{\alpha X^T_0(x)})^4]\right)^{1/4}$．右辺の各項がゼロに収束することを示す．$\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{4\alpha X^T_\varepsilon(x)}]$ と $\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{4A_0}]$ の両方は ε に関して一様有界が補題 2.11 からわかる．補題 2.14 で $\lim_{\varepsilon\downarrow0}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^0[|\mathrm{e}^{A_\varepsilon(x)}-\mathrm{e}^{A_0(x)}|^4]=0$ が示されているので最初の項はゼロは収束する．さらに

$$E_\varepsilon(x)\le\left(\mathbb{E}^0[|h(B_{2T}+x)|^2]\right)^{1/2}\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0\left[(\mathrm{e}^{\alpha X^T_\varepsilon(x)}-\mathrm{e}^{\alpha X^T_0(x)})^4\right]\right)^{1/4}\in L^1(\mathbb{R}^{3N}).$$

補題 2.13 から $\mathbb{E}^0[(\mathrm{e}^{\alpha X^T_\varepsilon(x)}-\mathrm{e}^{\alpha X^T_0(x)})^4]\to0$ $(\varepsilon\downarrow0)$ が全ての $x\in\mathbb{R}^{3N}$ でなりたつ．よってルベーグ優収束定理から第 2 項がゼロに収束することがわかる． □

補題 2.16 次が成り立つ:

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(f\otimes \mathbb{1}, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}h\otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}\right]dx. \tag{2.44}$$

ここで

$$\begin{aligned}S_0^{\mathrm{ren}} &= 2\sum_{i\neq j}^N\int_{-T}^T\varphi_0(B_s^i-B_s^j,0)ds+2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_s^T\nabla\varphi_0(B_t^i-B_s^j,t-s)\cdot dB_t\\ &\quad -2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varphi_0(B_T^i-B_s^j,T-s)ds,\end{aligned} \tag{2.45}$$

そして S_0^{ren} の被積分関数は

$$\begin{aligned}\varphi_0(X,t) &= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{e^{-ikX}e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_\Lambda^\perp(k)dk,\\ \nabla\varphi_0(X,t) &= \int_{\mathbb{R}^3}\frac{-ike^{-ikX}e^{-|t|\omega(k)}}{2\omega(k)}\beta(k)\mathbb{1}_\Lambda^\perp(k)dk.\end{aligned}$$

証明.

$$(f\otimes \mathbb{1}, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}h\otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}\right]dx \tag{2.46}$$

である．右辺は $\int_{\mathbb{R}^3}\mathbb{E}^x[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}]dx$ $(\varepsilon\downarrow 0)$ に収束する．よって (2.44) がわかる．また

$$\begin{aligned}S_0^{\mathrm{ren}} &= 2\sum_{i\neq j}^N\int_{-T}^T\varphi_0(B_s^i-B_s^j,0)ds+2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_s^{[s+\tau]_T}\nabla\varphi_0(B_t^i-B_s^j,t-s)\cdot dB_t\\ &\quad -2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varphi_0(B_{[s+\tau]_T}^i-B_s^j,[s+\tau]_T-s)ds\end{aligned} \tag{2.47}$$

なので $\tau=T$ とすれば (2.45) がわかる． $\square$

さて $f\otimes\mathbb{1}$ からもっと一般的なベクトル $f\otimes F(\phi(\underset{\sim}{f_1}),\ldots,\phi(\underset{\sim}{f_n}))\mathbb{1}$ へ拡張する．ここで $F\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^3)$, $\phi(f)$ はスカラー場を表す: $\frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(\hat{f})+a(\underset{\sim}{\hat{f}}))$. ここで $\underset{\sim}{\hat{f}}(k)=\hat{f}(-k)$. そのために $\mathrm{e}^{-2TH_\varepsilon}$ のファインマン・カッツ公式を紹介しておく．

$$H_{-k}(\mathbb{R}^n)=\{f\in\mathscr{S}'_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n)\,|\,\widehat{f}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), |\cdot|^{-k/2}\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

とし，ノルムを $\|f\|^2_{H_{-k}(\mathbb{R}^n)}=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|\widehat{f}(x)|^2|x|^{-k}dx$ で与える．ユークリッド場は確率空間 $(Q_{\mathrm{E}},\Sigma_{\mathrm{E}},\mu_{\mathrm{E}})$ 上のガウス型確率変数族 $\{\phi_{\mathrm{E}}(F),\,F\in H_{-1}(\mathbb{R}^4)\}$ である．写像 $F\mapsto\phi_{\mathrm{E}}(F)$ は線形で平均ゼロ，分散は $\mathbb{E}_{\mu_{\mathrm{E}}}[\phi_{\mathrm{E}}(F)\phi_{\mathrm{E}}(G)]=\frac{1}{2}(F,G)_{H_{-1}(\mathbb{R}^4)}$. ユークリッド場の性質は Appendix B にまとめておく．以下，$\mathscr{H}$ と $\mathscr{F}$-値 L^2 関数の集合 $L^2(\mathbb{R}^{3N};\mathscr{F})$ を同一視する．つまり $F\in\mathscr{H}$ は $\mathbb{R}^{3N}\ni x\mapsto F(x)\in\mathscr{F}$ とみなされ，$\int_{\mathbb{R}^{3N}}\|F(x)\|^2_{\mathscr{F}}dx<\infty$.

命題 2.17 $F, G \in \mathscr{H}$ としよう．このとき

$$(F, \mathrm{e}^{-2TH_\varepsilon}G)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds} \mathbb{E}_{\mu_\mathrm{E}} \left[J_{-T}F(B_{-T}) \cdot \mathrm{e}^{-\phi_\mathrm{E}(\int_{-T}^T \sum_{j=1}^N \delta_s \otimes \tilde{\varphi}(\cdot - B_s^j)ds)} J_T G(B_T)\right]\right]. \tag{2.48}$$

ここで $\tilde{\varphi}_\varepsilon(x) = \left(\mathrm{e}^{-\varepsilon|\cdot|^2/2} 1\!\!1_\Lambda^\perp / \sqrt{\omega}\right)^\vee (x)$．そして $\delta_s(x) = \delta(x-s)$ は s に重みのあるデルタ関数である．

証明．証明は [LHB11, Theorem 6.3] を参照せよ． □

補題 2.18 $\rho_j \in H_{-1/2}(\mathbb{R}^3), j = 1, 2,\ f, h \in L^2(\mathbb{R}^{3N}),\ \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ としよう．このとき

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0}(f \otimes \mathrm{e}^{\alpha\phi(\rho_1)} 1\!\!1, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N \varphi_\varepsilon(0,0))} h \otimes \mathrm{e}^{\beta\phi(\rho_2)} 1\!\!1)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) \mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds} \mathrm{e}^{\frac{g^2}{2} S_0^{\mathrm{ren}} + \frac{1}{4}\xi}\right] dx. \tag{2.49}$$

ここで

$$\xi = \xi(g) = \bar{\alpha}^2 \|\rho_1/\sqrt{\omega}\|^2 + \beta^2 \|\rho_2/\sqrt{\omega}\|^2 + 2\bar{\alpha}\beta(\rho_1/\sqrt{\omega}, \mathrm{e}^{-2T\omega}\rho_2/\sqrt{\omega})$$
$$+ 2\bar{\alpha} g \sum_{j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{\widehat{\rho}_1(k)}{\sqrt{\omega(k)}} 1\!\!1_\Lambda^\perp(k) \mathrm{e}^{-|s-T|\omega(k)} \mathrm{e}^{-ikB_s^j}$$
$$+ 2\beta g \sum_{j=1}^N \int_{-T}^T ds \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{\widehat{\rho}_2(k)}{\sqrt{\omega(k)}} 1\!\!1_\Lambda^\perp(k) \mathrm{e}^{-|s+T|\omega(k)} \mathrm{e}^{-ikB_s^j}.$$

証明．汎関数積分表示 (2.48) から

$$(f \otimes \mathrm{e}^{\alpha\phi(\rho_1)} 1\!\!1, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N\varphi_\varepsilon(0,0))} h \otimes \mathrm{e}^{\beta\phi(\rho_2)} 1\!\!1) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \Big[\bar{f}(B_{-T}) h(B_T) \mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}$$
$$\times \mathbb{E}_{\mu_E}[\mathrm{e}^{\bar{\alpha}\phi_E(\delta_{-T}\otimes\rho_1)} \mathrm{e}^{\beta\phi_E(\delta_T \otimes \rho_2)} \mathrm{e}^{g\phi_E(-\sum_{j=1}^N \int_{-T}^T \delta_s \otimes \tilde{\varphi}_\varepsilon(\cdot - B_s^j)ds)}]\Big] \mathrm{e}^{-2Tg^2 N\varphi_\varepsilon(0,0)}.$$

すぐに

$$\mathbb{E}_{\mu_E}\left[\mathrm{e}^{\bar{\alpha}\phi_E(\delta_{-T}\otimes\rho_1)} \mathrm{e}^{\beta\phi_E(\delta_T\otimes\rho_2)} \mathrm{e}^{g\phi_E(-\sum_{j=1}^N \int_{-T}^T \delta_s \otimes \tilde{\varphi}_\varepsilon(\cdot - B_s^j)ds)}\right] \mathrm{e}^{-2Tg^2N\varphi_\varepsilon(0,0)} = \mathrm{e}^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon^{\mathrm{ren}} + \frac{1}{4}\xi_\varepsilon}.$$

ここで ξ_ε は ξ で $1\!\!1_\Lambda^\perp(k)$ を $1\!\!1_\Lambda^\perp(k)\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2/2}$ に置換えたもである．よって

$$(f \otimes \mathrm{e}^{\alpha\phi(\rho_1)} 1\!\!1, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon + g^2 N\varphi_\varepsilon(0,0))} h \otimes \mathrm{e}^{\beta\phi(\rho_2)} 1\!\!1)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\overline{f(B_{-T})} h(B_T) \mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds} \mathrm{e}^{\frac{g^2}{2} S_\varepsilon^{\mathrm{ren}} + \frac{1}{4}\xi_\varepsilon}\right].$$

適当な定数 C が存在して $\xi_\varepsilon \le C$ がパスと $\varepsilon \ge 0$ に一様に成り立つ．その結果補題 2.16 と同様にしてこの補題も証明できる． □

稠密な部分空間 $\mathscr{D}\subset\mathscr{H}$ を次で定義しよう:

$$\mathscr{D}=\mathrm{L.H.}\{f\otimes 1\!\!1\,|\,f\in L^2(\mathbb{R}^{3N})\}\cup \\ \left\{f\otimes F(\phi(f_1),\dots,\phi(f_n))1\!\!1\,|\,F\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n),f_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3),1\le j\le n,n\in\mathbb{N},f\in L^2(\mathbb{R}^{3N})\right\}.$$

補題 2.18 から次の結果が即座に従う:

補題 2.19 $\Phi=f\otimes F(\phi(u_1),\dots,\phi(u_n))1\!\!1$, $\Psi=h\otimes G(\phi(v_1),\dots,\phi(v_m))1\!\!1\in\mathscr{D}$ としよう. このとき

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(\Phi,\mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}\Psi)=(2\pi)^{-(n+m)/2}\int_{\mathbb{R}^{n+m}}dK_1dK_2\overline{\widehat{F}(K_1)}\widehat{G}(K_2) \\ \times\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}+\frac{1}{4}\xi(K_1,K_2)}\right].\tag{2.50}$$

ここで

$$\xi(K_1,K_2)=-\|K_1\cdot u/\sqrt{\omega}\|^2-\|K_2\cdot v/\sqrt{\omega}\|^2-2(K_1\cdot u/\sqrt{\omega},\mathrm{e}^{-2T\omega}K_2\cdot v/\sqrt{\omega}) \\ -2ig\sum_{j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_{\mathbb{R}^3}dk\frac{K_1\cdot\widehat{u}(k)}{\sqrt{\omega(k)}}1\!\!1_\Lambda^\perp(k)\mathrm{e}^{-|s-T|\omega(k)}\mathrm{e}^{-ikB_s^j} \\ +2ig\sum_{j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_{\mathbb{R}^3}dk\frac{K_2\cdot\widehat{v}(k)}{\sqrt{\omega(k)}}1\!\!1_\Lambda^\perp(k)\mathrm{e}^{-|s+T|\omega(k)}\mathrm{e}^{-ikB_s^j},$$

$u=(u_1,...,u_n)$, $v=(v_1,...,v_m)$.

証明. $F(\phi(f_1),\dots,\phi(f_n))1\!\!1=(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n}\widehat{F}(K)\mathrm{e}^{i\phi(K\cdot f)}1\!\!1dK$ に気をつければ

$$(\Phi,\mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}\Psi) \\ =\frac{1}{(2\pi)^{(n+m)/2}}\int_{\mathbb{R}^{m+n}}dK_1dK_2\overline{\widehat{F}(K_1)}\widehat{G}(K_2)(f\otimes\mathrm{e}^{-i\phi(K_1\cdot f)}1\!\!1,\mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}h\otimes\mathrm{e}^{-i\phi(K_2\cdot h)}1\!\!1).$$

よって主張は補題 2.18 から従う. □

この論文の最も本質的な部分が $H_\varepsilon-g^2N\varphi_\varepsilon(0,0)$ の下からの一様有界性を示すことにある.

系 2.20 ε に依らない定数 C があって

$$\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x[f(B_{-T})h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}]\le C\|f\|\|h\|\tag{2.51}$$

が $f,h\in L^2(\mathbb{R}^3)$, $\varepsilon\ge 0$, に対して成り立ち,

$$C\le\sup_{x\in\mathbb{R}^3}\left(\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{-2\int_0^{2T}V(B_s+x)ds}\mathrm{e}^{2(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}]\right)^{1/2}.\tag{2.52}$$

証明. これは (2.37) からしたがう. $\square$

系 2.21 定数 $C \in \mathbb{R}$ があって $H_\varepsilon + g^2 N\varphi_\varepsilon(0,0) > C$ が $\varepsilon > 0$ に一様に成り立つ.

証明. この証明で a_j, b_j は正の定数で $\varepsilon \geq 0$ と T に依らない. すぐに

$$\mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)}] \leq a_1 \mathrm{e}^{b_1 T} \quad \text{and} \quad \mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{Z_\varepsilon^T(x)}] \leq a_2 \mathrm{e}^{b_2 T}$$

がわかる. (2.29) と (2.36) から

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{X_\varepsilon^T(x)}] \leq a_3 \mathrm{e}^{b_3 T} \quad \text{and} \quad \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0[\mathrm{e}^{Y_\varepsilon^T(x)}] \leq a_4 \mathrm{e}^{b_4 \tau T}$$

がわかる. Appendix A) を参照せよつ.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{2(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right] \\
&\leq \left(\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{4S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)}\right]\right)^{1/2}\left(\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{8X_\varepsilon^T(x)}\right]\right)^{1/4}\left(\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{16Y_\varepsilon^T(x)}\right]\right)^{1/8}\left(\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{32Z_\varepsilon^T(x)}\right]\right)^{1/16}
\end{aligned}$$

なので定数 a_5 と b_5 が存在して

$$\left(\mathbb{E}^0\left[\mathrm{e}^{2(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right]\right)^{1/2} \leq a_5 \mathrm{e}^{b_5 T} \tag{2.53}$$

が全ての $T > 0$ で成立する. 関数

$$W(x^1, ..., x^N) = \sum_{j=1}^N |x^j|^2$$

を考えよう. H_ε で V を δW に置換えたものを $H_\varepsilon(\delta)$ と表す. もちろん $\delta \geq 0$. そうすれば $-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \Delta_j + \delta W$, $\delta > 0$, はコンパクトレゾルベントをもつので $H_\varepsilon(\delta)$ $(\delta > 0)$ は一意的な基底状態 $\Psi_{\mathrm{g}}(\delta)$ をもつことが [Spo98, Ger00] で示されている. 注意 2.22 を参照せよ. ファインマン・カッツ公式から $\mathrm{e}^{-TH_\varepsilon(\delta)}$ は正値改良型作用素である. よって $\Psi_{\mathrm{g}}(\delta) > 0$ となる. 特に $(f \otimes 1\!\!1, \Psi_{\mathrm{g}}(\delta)) \neq 0$ が任意の $0 \leq f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ. ここで $f \not\equiv 0$. その結果

$$\inf\sigma\left(H_\varepsilon(\delta) + g^2 N\varphi_\varepsilon(0,0)\right) = -\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\log(f\otimes 1\!\!1, \mathrm{e}^{-T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))} f\otimes 1\!\!1) \tag{2.54}$$

が $0 \leq f \in L^2(\mathbb{R}^{3N})$ で成り立つ. (2.51) と (2.53) から

$$\begin{aligned}
&(f\otimes 1\!\!1, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))} f\otimes 1\!\!1) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x[f(B_{-T})f(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T \delta W(B_s)ds}\mathrm{e}^{S_\varepsilon^{\mathrm{ren}}}] \\
&\leq \|f\|^2 \sup_{x\in\mathbb{R}^3} \mathbb{E}^0\left(\left[\mathrm{e}^{2(S_\varepsilon^{\mathrm{OD},T}(x)+X_\varepsilon^T(x)+Y_\varepsilon^T(x)+Z_\varepsilon^T(x))}\right]\right)^{1/2} \leq \|f\|^2 a_5 \mathrm{e}^{b_5 T}.
\end{aligned}$$

これは (2.54) から

$$\inf\sigma\left(H_\varepsilon(\delta) + g^2 N\varphi_\varepsilon(0,0)\right) + \frac{b_5}{2} \geq 0, \quad \delta > 0, \tag{2.55}$$

を意味する．大事なことは b_5 が δ に依っていないことである．よって

$$|(F, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}G)| \le \|F\|\|G\|\mathrm{e}^{b_5T} \tag{2.56}$$

が従う．$F, G \in \mathscr{H}$ としよう．ファインマン・カッツ公式 (2.48) から

$$(F, \mathrm{e}^{-2TH_\varepsilon(\delta)}G)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x \left[\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T \delta W(B_s)ds} \mathbb{E}_{\mu_\mathrm{E}} \left[J_{-T}F(B_{-T}) \cdot \mathrm{e}^{-\phi_\mathrm{E}(\int_{-T}^T \sum_{j=1}^N \delta_s \otimes \tilde{\varphi}(\cdot - B_s^j)ds)} J_T G(B_T) \right] \right].$$

ルベーグ優収束定理から

$$\lim_{\delta\downarrow 0}(F, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon(\delta)+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}G) = (F, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon(0)+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}G).$$

(2.56) の両辺の極限 $\delta \downarrow 0$ をとれば

$$|(F, \mathrm{e}^{-2T(H_\varepsilon(0)+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}G)| \le \|F\|\|G\|\mathrm{e}^{b_5T}. \tag{2.57}$$

これは (2.55) が $\delta = 0$ でも従うことをいっている．$H_\varepsilon = H_\varepsilon(0) + V$ かつ V は有界なので

$$\inf \sigma(H_\varepsilon + g^2N\varphi_\varepsilon(0,0)) + \frac{b_5}{2} + \|V\|_\infty \ge 0.$$

$C = -\frac{b_5}{2} - \|V\|_\infty$ とおけば系が従う．□

注意 2.22 Σ を自己共役作用素 $-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \Delta_j + V$ の本質的スペクトルの下限とし $E = \inf \sigma(-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N \Delta_j + V)$ とする．このとき [Spo98] で汎関数積分をつかって

$$\Sigma - E > \frac{N^2}{4} \int_{\mathbb{R}^3} \mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2} \beta(k) \mathbb{1}_\Lambda^\perp(k) dk$$

のとき H_ε は一意的な基底状態をもつことが示された ([LHB11, Theorem 6.6] も参照せよ)．特に $V(x^1, ..., x^N) = \delta \sum_{j=1}^N |x^j|^2$ のとき H_ε は一意的な基底状態を全ての $\varepsilon > 0$ と $\delta > 0$ でもつ．なぜならば $\Sigma - E = \infty$ なので．

主定理の証明をする．

定理 *2.2* の証明: $F, G \in \mathscr{H}$,$C_\varepsilon(F,G) = (F, \mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}G)$ としよう．補題 2.18 によって $F, G \in \mathscr{D}$ に対して $C_\varepsilon(F,G)$ が $\varepsilon \downarrow 0$ で収束することがわかる．系 2.21 で示された一様な不等式

$$\|\mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}\| < \mathrm{e}^{-tC}$$

と $\mathscr{D}$ が $\mathscr{H}$ で稠密ということから $\{C_\varepsilon(F,G)\}_\varepsilon$ がコーシー列となる．$C_0(F,G) = \lim_{\varepsilon\downarrow 0} C_\varepsilon(F,G)$ とする．そうすれば $|C_0(F,G)| \le \mathrm{e}^{-tC}\|F\|\|G\|$．Riesz の定理より有界作用素 T_t で

$$C_0(F,G) = (F, T_tG), \quad F, G \in \mathscr{H}$$

となるものが存在する．よって $\mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))} = T_t$．さらに

$$\mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}\mathrm{e}^{-s(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))} = \mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0} \mathrm{e}^{-(t+s)(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))} = T_{t+s}.$$

左辺 は $T_t T_s$ なので T_t 半群性が従う．$\mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon+g^2N\varphi_\varepsilon(0,0))}$ は対称なので, T_t も対称．また汎関数積分表示 (2.50) から $(F, T_t G)$ は $t=0$ で $F, G \in \mathscr{D}$ に対して連続になることもわかる．$\mathscr{D}$ は $\mathscr{H}$ で稠密, $\|T_t\|$ は $t=0$ の近傍で一様に有界なので, T_t は $t=0$ で強連続になる．半群版 Stone 定理 [LHB11, Proposition 3.26] によって下から有界な自己共役作用素 H_{ren} で $T_t = \mathrm{e}^{-tH_{\mathrm{ren}}}$, $t \geq 0$, となるものが存在することがわかる．$E_\varepsilon = -g^2 N\varphi_\varepsilon(0,0)$ と置けば証明完了． □

上でみたようにくりこまれたハミルトニアン H_{ren} が存在することが示せた．そこで H_{ren} に対するペアポテンシャルも求める．

系 2.23 H_{ren} のペアポテンシャルは $\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}$ である．

証明．補題 2.16 によって

$$(f\otimes \mathbb{1}, \mathrm{e}^{-2TH_{\mathrm{ren}}}h\otimes \mathbb{1}) = \int_{\mathbb{R}^3} dx \mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_0^{\mathrm{ren}}}\right]. \tag{2.58}$$

□

3 弱結合極限における実行ポテンシャル

この章ではカットオフ関数を $\varphi_\varepsilon(k) = (2\pi)^{-3/2}\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2/2}$ とする．そして dispersion relation は $\omega_\nu(k) = \sqrt{|k|^2+\nu^2}$ とする．ここで $\nu > 0$ である．そうするとハミルトニアンは $L^2(\mathbb{R}^{3N})\otimes\mathscr{F}$ 上に

$$H_\varepsilon = H_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1} + \mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}} + H_{\mathrm{I}}$$

で与えらる．ここで $H_{\mathrm{p}} = \sum_{j=1}^N(-\frac{1}{2}\Delta_j) + V(x_1, ..., x_N)$ は N-体シュレディンガー作用素で, $H_{\mathrm{f}} = \int_{\mathbb{R}^3}\omega_\nu(k)a^*(k)a(k)dk$ は自由ハミルトニア．H_ε をスケーリングする．生成消滅作用素を κa と κa^* とする．このとき H_ε は

$$H_\varepsilon(\kappa) = H_{\mathrm{p}}\otimes\mathbb{1} + \kappa^2\mathbb{1}\otimes H_{\mathrm{f}} + \kappa H_{\mathrm{I}} \tag{3.1}$$

となる．このスケーリングは変換 $\omega\mapsto\kappa^2\omega$, $\widehat{\varphi}\mapsto\kappa^2\widehat{\varphi}$ を導きだす．一方エネルギーくりこみ項は

$$E_\varepsilon(\kappa) = -g^2N\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{e}^{-\varepsilon|k|^2}}{2(2\pi)^3\omega_\nu(k)}\frac{\kappa^2}{\kappa^2\omega_\nu(k)+|k|^2/2}dk \tag{3.2}$$

のようにスケーリングされる．定理 2.2 から自己共役作用素 $H_{\mathrm{ren}}(\kappa)$ で

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}(f\otimes\mathbb{1}, \mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon(\kappa)-E_\varepsilon(\kappa))}h\otimes\mathbb{1}) = (f\otimes\mathbb{1}, \mathrm{e}^{-tH_{\mathrm{ren}}(\kappa)}h\otimes\mathbb{1}) \tag{3.3}$$

となるものがある．次の命題は [Dav79, Hir99] で示されている．

命題 3.1

$$\mathrm{s-}\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\lim_{\kappa\to\infty}\mathrm{e}^{-t(H_\varepsilon(\kappa)-E_\varepsilon(\kappa))} = \mathrm{e}^{-th_{\mathrm{eff}}}\otimes P_\Omega.$$

ここで P_Ω は $\{z\mathbb{1}\,|\,z\in\mathbb{C}\}\subset\mathscr{F}$ への射影で, 実行ハミルトニアンは

$$h_{\mathrm{eff}} = -\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N\Delta_j + V(x^1, ..., x^N) - \frac{g^2}{4\pi}\sum_{i<j}\frac{\mathrm{e}^{-\nu|x_i-x_j|}}{|x_i-x_j|}.$$

さて，くりこまれたハミルトニアン $H_{\rm ren}(\kappa)$ のスケーリングを考えてみよう．定理 2.2 からつぎの補題が従う:

補題 3.2 $f,h\in L^2(\mathbb{R}^3)$ のとき

$$\lim_{\kappa\to\infty}(f\otimes 1\!\!1, \mathrm{e}^{-tH_{\rm ren}(\kappa)}h\otimes 1\!\!1)=(f,\mathrm{e}^{-th_{\rm eff}}h). \tag{3.4}$$

証明．補題 2.18 から

$$(f\otimes 1\!\!1, \mathrm{e}^{-2TH_{\rm ren}(\kappa)}h\otimes 1\!\!1)=\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_0^{\rm ren}(\kappa)}\right]. \tag{3.5}$$

ここで

$$\begin{aligned}S_0^{\rm ren}(\kappa)=&2\sum_{i\neq j}^N\int_{-T}^T\varphi_0(B_s^i-B_s^j,0,\kappa)ds+2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T ds\int_s^T\nabla\varphi_0(B_t-B_s,t-s,\kappa)\cdot dB_t\\ &-2\sum_{i,j=1}^N\int_{-T}^T\varphi_0(B_T-B_s,T-s,\kappa)ds,\end{aligned} \tag{3.6}$$

そして

$$\varphi_0(x,t,\kappa)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{\mathrm{e}^{-ik\cdot x}\mathrm{e}^{-\kappa^2\omega(k)|t|}}{2\omega(k)}\frac{\kappa^2}{\kappa^2\omega(k)+|k|^2/2}1\!\!1_\Lambda^\perp(k)dk. \tag{3.7}$$

特に $t=0$ のとき

$$g^2\sum_{i\neq j}^N\varphi_0(x^i-x^j,0,\kappa)ds\ \to\ \frac{g^2}{4\pi}\sum_{i<j}\frac{\mathrm{e}^{-\nu|x^i-x^j|}}{|x^i-x^j|},$$

$t\neq 0$ のとき，

$$|\nabla\varphi_0(X,t,\kappa)|\to 0,\quad |\varphi_0(X,t,\kappa)|\to 0$$

$(\kappa\to\infty)$ が各点ごとに示せる．補題 2.16 と同様にして

$$\begin{aligned}&\lim_{\kappa\to\infty}\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{2}S_0^{\rm ren}(\kappa)}\right]\\ &=\int_{\mathbb{R}^3}dx\mathbb{E}^x\left[\overline{f(B_{-T})}h(B_T)\mathrm{e}^{-\int_{-T}^T V(B_s)ds}\mathrm{e}^{\frac{g^2}{4\pi}\sum_{i<j}\int_{-T}^T\frac{\mathrm{e}^{-\nu|B_s^i-B_s^j|}}{|B_s^i-B_s^j|}ds}\right].\end{aligned}$$

□

系 3.3 $F,G\in\mathscr{D}$ のとき

$$\lim_{\kappa\to\infty}(F,\mathrm{e}^{-tH_{\rm ren}(\kappa)}G)=(F,\mathrm{e}^{-th_{\rm eff}}\otimes P_\Omega G). \tag{3.8}$$

証明．これは補題 2.18 と補題 3.2 から従う． □

A　Kato-クラス

$\mathscr{K}_d$ は次を満たす V 全体である:

$$\lim_{t\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^x\left[\int_0^t |V(B_s)|ds\right]=0. \tag{A.1}$$

$\mathscr{K}_d$ を Kato-クラスという.

命題 A.1 もし $V\in\mathscr{K}_d$ ならば $W(x)=\sum_{i\neq j}^N V(x^i-x^j)\in\mathscr{K}_{dN}$. ここで $x=(x^1,...,x^N)\in\mathbb{R}^{dN}$ である.

例えば [CFKS08, p.7] を参照せよ. Kato-クラスの同値な定義が知られている. $V\in\mathscr{K}_d$ であるための必要十分条件は

$$\lim_{r\downarrow 0}\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{|x-y|<r}|g(x-y)V(y)|dy=0 \quad \text{with} \quad g(x)=\begin{cases}|x| & d=1\\ -\log|x| & d=2\\ |x|^{2-d} & d\geq 3.\end{cases} \tag{A.2}$$

この定義から次が導ける.

命題 A.2 もし $V\in\mathscr{K}_d$ ならば $\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d}|g(x-y)V(y)|dy<\infty$.

Kato-クラスポテンシャルの例をあげる. (1) $d=3$ で $|x|^{-(2-\varepsilon)}(\varepsilon>0)$, (2) $V\in L^p(\mathbb{R}^d)+L^\infty(\mathbb{R}^d)$. ここで $p=1$ $(d=1)$, $p>d/2(d\geq 2)$. また Kato-クラスポテンシャル V に対して, $e^{\int_0^t V(B_s)ds}$ がウィナー測度に関して可積分であることもわかる.

命題 A.3 $0\leq V\in\mathscr{K}_d$ としよう. このとき $\beta,\gamma>0$ で次を満たすものが存在する:

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d}\mathbb{E}^x[e^{\int_0^t V(B_s)ds}]<\gamma e^{t\beta}. \tag{A.3}$$

特に, もし $V\in L^p(\mathbb{R}^d)$ $(p=1(d=1),\ p>d/2(d\geq 2))$ ならば $\beta=C\|V\|_p$ となる C が存在する.

証明. [LHB11, Lemma 3.38] を参照せよ. □

B　シュレディンガー表現とユークリッド場

ボゾンフォック空間 $\mathscr{F}$ が $L^2(Q,\mu)$ とユニタリー同値なことはよく知られている. ここで (Q,Σ,μ) 上のガウス型確率変数族 $\{\phi_0(f),\ f\in H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)\}$ で $\phi_0(f)$ は f に関して線形, 平均ゼロ, 分散が $\mathbb{E}_\mu[\phi_0(f)\phi_0(g)]=\frac{1}{2}(f,g)_{H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)}$ で与えられるものを考える. このとき真空 $\mathbb{1}_{\mathscr{F}}$ は $\mathbb{1}_{L^2(Q)}\in L^2(Q)$ と, スカラー場 $\phi(f)$ は $\phi_0(f)$ とユニタリー同値になる. ここで $\phi_0(f)$ はかけ算作用素とみている. ウィック積 $:\prod_{j=1}^n\phi_0(f_j):$ によって生成される有限線形和全体は $L^2(Q)$ で稠密になる. ここでウィック積は帰納的に

$$\begin{aligned}&:\phi_0(f):\ =\phi_0(f),\\ &:\phi_0(f)\prod_{j=1}^n\phi_0(f_j):\ =\phi_0(f):\prod_{j=1}^n\phi_0(f_j):-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n(f,f_i)_{H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)}:\prod_{j\neq i}^n\phi_0(f_j):\end{aligned}$$

のように定義される．これによって $\mathscr{F}$ と $L^2(Q)$ を同一視する．ファインマン・カッツ公式を導くためにユークリッド場が必要である．ガウス型確率変数族 $\{\phi_{\mathrm{E}}(F),\, F\in H_{-1}(\mathbb{R}^4)\}$ で平均ゼロで分散　$\mathbb{E}_{\mu_E}[\phi_E(F)\phi_E(G)]=\frac{1}{2}(F,G)_{H_{-1}(\mathbb{R}^4)}$ となるものを確率測度空間 (Q_E,Σ_E,μ_E) 上に定義する．$f\in H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)$ に対して関係 $\delta_t\otimes f\in H_{-1}(\mathbb{R}^4)$ と $\|\delta_t\otimes f\|_{H_{-1}(\mathbb{R}^4)}=\|f\|_{H_{-1/2}(\mathbb{R}^3)}$ が成立する．ここで $\delta_t(x)=\delta(x-t)$ は t に重みをもつデルタ関数である．(2.48) の中の等長作用素族 $J_t: L^2(Q)\to L^2(Q_{\mathrm{E}})$, $t\in\mathbb{R}$, は次で定義される:

$$J_t\mathbb{1}_{L^2(Q)}=\mathbb{1}_{L^2(Q_{\mathrm{E}})}\quad\text{and}\quad J_t\colon\prod_{j=1}^m\phi(f_j):\;=\;:\prod_{j=1}^m\phi_{\mathrm{E}}(\delta_t\otimes f_j):$$

$\mathscr{F}\cong L^2(Q)$ の同一視のもと $(J_tF,J_sG)_{L^2(Q_{\mathrm{E}})}=(F,\mathrm{e}^{-|t-s|H_{\mathrm{f}}}G)_{\mathscr{F}}$ となる．詳しいことは [LHB11, Chapter 5] をみよ．

C　作用素論的なくりこみ

Nelson[Nel64a] で示されたくりこみ理論を復習しておこう．いま場の作用素を

$$\phi_{\widehat{\varphi}}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(a^*(k)e^{-ikx}\frac{\widehat{\varphi}(-k)}{\sqrt{\omega}}+a(k)e^{ikx}\frac{\widehat{\varphi}(k)}{\sqrt{\omega}}\right)dk$$

とし, その運動量作用素を

$$\pi_{\widehat{\varphi}}(x)=\frac{i}{\sqrt{2}}\int\left(a^*(k)e^{-ikx}\sqrt{\omega}\widehat{\varphi}(-k)-a(k)e^{ikx}\sqrt{\omega}\widehat{\varphi}(k)\right)dk$$

とする．このとき交換関係が従う:

$$[\phi_{\widehat{\varphi}}(x),\pi_{\hat{\lambda}}(y)]=i\int e^{ik(y-x)}\widehat{\varphi}(-k)\hat{\lambda}(k)dk,\tag{C.1}$$

$$[H_{\mathrm{f}},\phi_{\widehat{\varphi}}(x)]=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\left(a^*(k)e^{-ikx}\sqrt{\omega}\widehat{\varphi}(-k)-a(k)e^{ikx}\sqrt{\omega}\widehat{\varphi}(k)\right)dk=-i\pi_{\widehat{\varphi}}(x),\tag{C.2}$$

$$[H_{\mathrm{f}},\pi_{\widehat{\varphi}}(x)]=\frac{i}{\sqrt{2}}\int\left(a^*(k)e^{-ikx}\sqrt{\omega}\omega\widehat{\varphi}(-k)+a(k)e^{ikx}\sqrt{\omega}\omega\widehat{\varphi}(k)\right)dk=i\phi_{\omega^2\widehat{\varphi}}(x).\tag{C.3}$$

Nelson 模型のハミルトニアン

$$H_N=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^N P_j^2+H_{\mathrm{f}}+\sum_{j=1}^N\phi(x_j)$$

の Gross 変換を考えよう．

$$\pi(x)=\sum_{j=1}^N\frac{i}{\sqrt{2}}\int\left(a^*(k)e^{-ikx_j}\beta(k)\widehat{\varphi}(-k)-a(k)e^{ikx_j}\beta(k)\widehat{\varphi}(k)\right)dk$$

とする．ここで $\beta(k)=\frac{1}{\omega+|k|^2/2}\frac{1}{\sqrt{\omega}}$. (2.5) で β を定義したが, この章では [Nel64a] にならって β をこのように定義する．このとき

$$e^{-i\pi}P_je^{i\pi}=P_j+A_j+A_j^*.$$

ここで

$$A_j^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \int a^*(k) e^{-ikx_j} k\beta(k)\widehat{\varphi}(-k)dk, \quad A_j = \frac{1}{\sqrt{2}} \int a(k) e^{ikx_j} k\beta(k)\widehat{\varphi}(k)dk. \tag{C.4}$$

さらに $(P_j + A_j + A_j^*)^2$ を展開すると

$$\begin{aligned}(P_j + A_j + A_j^*)^2 =& P_j^2 + 2P_jA_j + 2A_j^*P_j + A_j^2 + 2A_j^*A_j + A_j^{*2} \\ &+ [P_j, A_j^*] + [A_j, P_j] + [A_j, A_j^*].\end{aligned}$$

ここに現れた交換子を計算すると

$$\begin{aligned}[P_j, A_j^*] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int a^*(k) e^{-ikx_j} k^2 \beta(k)\widehat{\varphi}(-k)dk, \\ [A_j, P_j] &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \int a(k) e^{ikx_j} k^2 \beta(k)\widehat{\varphi}(-k)dk, \\ [A_j, A_j^*] &= \frac{1}{2} \int |k|^2 \beta^2(k)\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk\end{aligned}$$

となる. 次に

$$\begin{aligned}e^{-i\pi}\left(\sum_{j=1}^N \phi(x_j)\right)e^{i\pi} &= \sum_{j=1}^N \phi(x_j) + \sum_{i,j}^N [\phi(x_i), \pi(x_j)] \\ &= \sum_{j=1}^N \phi(x_j) - \sum_{i,j}^N \int e^{ik(x_j - x_i)} \frac{\beta(k)}{\sqrt{\omega}} \widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk.\end{aligned}$$

さらに

$$\begin{aligned}e^{-i\pi} H_{\mathrm{f}} e^{i\pi} &= H_{\mathrm{f}} + [H_{\mathrm{f}}, i\pi] + \frac{1}{2}[[H_{\mathrm{f}}, i\pi], i\pi] \\ &= H_{\mathrm{f}} - \sum_{j=1}^N \frac{1}{\sqrt{2}} \int \Big(a^*(k) e^{-ikx_j} \omega\beta(k)\widehat{\varphi}(-k) + a(k)e^{ikx_j}\omega\beta(k)\widehat{\varphi}(k) \Big) dk \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j}^N \int \omega\beta^2(k) e^{ik(x_j - x_i)} \widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk.\end{aligned}$$

全て合わせると

$$
\begin{aligned}
&e^{-i\pi}He^{i\pi}\\
&=P_j^2+2P_jA_j+2A_j^*P_j+A_j^2+2A_j^*A_j+A_j^{*2}+\sum_j\phi(x_j)+H_{\mathrm{f}}\\
&-\sum_{j=1}^N\frac{1}{\sqrt{2}}\int(a^*(k)e^{-ikx_j}\widehat{\varphi}(-k)+a(k)e^{ikx_j}\widehat{\varphi}(k))\omega\beta(k)dk \qquad (C.5)\\
&-\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_j\int\left(a^*(k)e^{-ikx_j}k^2\beta(k)\widehat{\varphi}(-k)+a(k)e^{ikx_j}k^2\beta(k)\widehat{\varphi}(-k)\right)dk \qquad (C.6)\\
&-\sum_{i,j}^N\int e^{ik(x_i-x_j)}\frac{\beta}{\sqrt{\omega}}\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk \qquad (C.7)\\
&+\frac{1}{2}\sum_{i,j}^N\int e^{ik(x_i-x_j)}\omega\beta^2(k)\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk \qquad (C.8)\\
&+\frac{1}{4}N\int|k|^2\beta^2(k)\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk \qquad (C.9)
\end{aligned}
$$

となる．β の定義より $(C.5)+(C.6)+\sum_j\phi(x_j)=0$ がわかる．また $(C.7)-(C.9)$ の対角成分を足し合わせると

$$
\begin{aligned}
&-N\int\frac{\beta}{\sqrt{\omega}}\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk+\frac{1}{2}N\int\omega\beta^2(k)\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk+N\frac{1}{4}\int|k|^2\beta^2(k)\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk\\
&=-\frac{1}{2}N\int\frac{\beta}{\sqrt{\omega}}\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk.
\end{aligned}
$$

よって

$$
\begin{aligned}
e^{-i\pi}He^{i\pi}&=P_j^2+2P_jA_j+2A_j^*P_j+A_j^2+2A_j^*A_j+A_j^{*2}+H_{\mathrm{f}} \qquad (C.10)\\
&-\sum_{i\neq j}\int e^{ik(x_i-x_j)}\left(\frac{\beta}{\sqrt{\omega}}+\omega\beta^2(k)\right)\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk \qquad (C.11)\\
&-\frac{1}{2}N\int\frac{\beta}{\sqrt{\omega}}\widehat{\varphi}(-k)\widehat{\varphi}(k)dk \qquad (C.12)
\end{aligned}
$$

をえる．(C.10) は 2 次形式の項, (C.11) は実行ポテンシャル項, そして (C.12) はくりこまれる項である．Nelson[Nel64a] では, $\widehat{\varphi}(k)=\mathbb{1}_{|k|<\Lambda}$ として, $\Lambda\to\infty$ の極限で, この右辺から (C.12) を引き去ったものが 2 次形式の意味で, 一様に収束すること, および $e^{i\pi(x)}$ が強収束することを示している．

D 実行質量

Gross 変換したハミルトニアン H_G の実行質量 (effective mass) を求めてみよう．粒子数を 1 とし, その裸の質量を m, 場と粒子の結合定数を $g\in\mathbb{R}$ とおく．そうすると外場ポテンシャ

ルを $V=0$ とおいた Nelson ハミルトニアンは

$$H_N = -\frac{1}{2m}\Delta + H_{\mathrm{f}} + g\phi(x)$$

となる．これを Gross 変換したものを H_G と書くことにする．形式的な計算をする．$V=0$ なので H_G は並行移動不変 (i.e., $[-i\nabla_j \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes P_{f,j}, H_G] = 0$) となり，$H_G$ を全運動量 $-i\nabla_j \otimes 1\!\!1 + 1\!\!1 \otimes P_{f,j}$ のスペクトルで分解できる．その結果

$$H_G = \int_{\mathbb{R}^3}^{\oplus} H_G(P)dP$$

となる．ここで $H_G(P)$ はフォック空間上の自己共役作用素で, 次で与えられる:

$$H_G(P) = \frac{1}{2m}(P-P_f)^2 + H_{\mathrm{f}} + \frac{g}{m}((P-P_f)A + A^*(P-P_f)) + \frac{g^2}{2}\frac{1}{m}(A^2 + 2A^*A * A^*A^*).$$

また $P_{f,j} = \int k_j a^*(k)a(k)dk$ は場の運動量作用素である． $H_G(P)$ の基底状態エネルギー $E(P)$ を

$$E(P) = E(0) + \frac{1}{2m_{\mathrm{eff}}}|P|^2 + O(|P|^3)$$

と展開して $|P|^2$ の係数の逆数を実行質量 m_{eff} と定義する．これを形式的に結合定数 g で展開しよう．$H_G(P)\Phi(P) = E(P)\Phi(P)$ の両辺を形式的に $P = 0 \in \mathbb{R}^3$ で 2 回微分して, 公式

$$\frac{m}{m_{\mathrm{eff}}} = 1 - \frac{2}{3m}\frac{((P_f - g(A+A^*))\Phi(0), (H_G(0)-E(0))^{-1}(P_f - g(A+A^*))\Phi(0))}{(\Phi(0),\Phi(0))}$$

をえる．摂動理論から g が十分小さければ

$$\frac{m_{\mathrm{eff}}}{m} = 1 + \frac{2}{3m}g^2(P_f A^*\Omega, \frac{1}{H_0}P_f A^*\Omega) + O(|g|^3)$$

となる．ここで $H_0 = \frac{1}{2m}P_f^2 + H_{\mathrm{f}}$ である．よって

$$m_{\mathrm{eff}} = m + g^2\frac{2}{3}\int \frac{|\widehat{\varphi}(k)|^2}{2\omega}\frac{|k|^2}{(|k|^2/2m+\omega)^3}dk + O(|g|^3)$$

となり, 紫外切断を外すとき, m_{eff} の g^2 の係数が収束することがわかる．

References

[Ara01] A. Arai, Ground state of the massless Nelson model without infrared cutoff in a non-Fock representation, *Rev. Math. Phys.* **13** (2001), 1075–1094.

[BFS98] V. Bach, J. Fröhlich and I. M. Sigal, Quantum electrodynamics of confined non-relativistic particles, *Adv. Math.* **137** (1998), 299–395.

[CFKS08] H. L. Cycon, R. G. Frose, W. Kirsch and B. Simon, *Schrödinger Operators*, 2nd ed., Springer 2008.

[Dav79] E. B. Davies, Particle-boson interactions and weak coupling limit, *J. Math. Phys.* **20** (1979), 345–351.

[Ger00] C. Gérard, On the existence of ground states for massless Pauli-Fierz Hamiltonians, *Ann. Henri Poincaré* **1** (2000), 443–459.

[GHPS12] C. Gérard, F. Hiroshima, A. Panati and A. Suzuki, Removal of UV cutoff for the Nelson model with variable coefficients, *Lett. Math. Phys.* **101** (2012), 305–322.

[Hir06] M. Hirokawa, Infrared catastrophe for Nelson's model — non-existence of ground state and soft-boson divergence, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **42** (2006), 897–922.

[HHS05] M. Hirokawa, F. Hiroshima and H. Spohn, Ground state for point particles interacting through a massless scalar bose field, *Adv. Math.* **191** (2005), 339–392.

[Hir99] F. Hiroshima, Weak coupling limit removing an ultraviolet cut-off for a Hamiltonian of particles interacting with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **40** (1999), 1215–1236.

[LHB11] J. Lőrinczi, F. Hiroshima and V. Betz, *Feynman-Kac-Type Theorems and Gibbs Measures on Path Space*, de Gruyter Studies in Mathematics **34**, 2011.

[LMS02] J. Lőrinczi, R.A. Minlos and H. Spohn, The infrared behavior in Nelson's model of a quantum particle coupled to a massless scalar field, *Ann. Henri Poincaré* **3** (2002), 1–28.

[Nel64a] E. Nelson, Interaction of nonrelativistic particles with a quantized scalar field, *J. Math. Phys.* **5** (1964), 1190–1197.

[Nel64b] E. Nelson, Schrödinger particles interacting with a quantized scalar field, in: *Proc. Conference on Analysis in Function Space*, W. T. Martin and I. Segal (eds.), p. 87, MIT Press, 1964.

[Sas05] I. Sasaki, Ground state of the massless Nelson model in a non-Fock representation, *J. Math. Phys.* **46** (2005), 102107.

[Spo98] H. Spohn, Ground state of quantum particle coupled to a scalar boson field, *Lett. Math. Phys.* **44** (1998), 9–16.