

第 15 章

Ex.2 の補足: $p^{-1} + q^{-1} = 1$ とする. $\|\varphi\|_{\alpha\beta} = \|x^\alpha D^\beta \varphi\|$ だった. $g \in L^q(\mathbb{R})$ のとき

$$T_g(\varphi) = \int g(x)\varphi(x)dx$$

とすると

$$|T_g(\varphi)| \leq \pi^{1/p}((1 + 1/q)\|\varphi\|_{00} + \|\varphi\|_{20/p})\|g\|_{L^q}$$

となることを講義で示した. ゆえに, L^q で $g_n \rightarrow g$ のとき $T_{g_n}(\varphi) \rightarrow T_g(\varphi)$ が任意の $\varphi \in \mathcal{S}$ で成り立つので $L^q(\mathbb{R})$ は $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ に連続に埋め込まれている. つまり

$$L^q(\mathbb{R}) \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}).$$

補足 2: g を次で定める.

$$g(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

このとき, $T_g \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ である. なぜならば

$$|T_g(\varphi)| \leq \int_0^\infty |x\varphi(x)|dx \leq \|\varphi\|_{10}$$

となるので.

補足 3: 講義後にフレッシュ空間について寺田君から鋭い指摘を受けたので補足します. 完備で距離付け可能な局所凸空間をフレッシュ空間という. ここで, 局所凸空間とは, 線型空間で原点の近傍系が凸, 併呑, 均衡な集合族 $\{\nu_\alpha\}_\alpha$ によって与えられるものである. 実は, このとき, 半ノルムの族 $\{p_\alpha\}_\alpha$ が存在してこれから定義される位相と一致する. 実際

$$p_\alpha(u) = \inf\{\lambda > 0 \mid u \in \lambda\nu_\alpha\}$$

と定義すればよい. 逆に半ノルムの族 $\{p_\alpha\}_\alpha$ が存在するとき, これから定義される位相の原点の近傍系

$$U(\alpha, \varepsilon) = \{u \in X \mid p_\alpha(u) < \varepsilon\}$$

は凸, 併呑, 均衡な集合族になっている. なので, $(X, \{p_\alpha\}_\alpha)$ を局所凸空間と定義する流儀もある. 特に, 半ノルム $\{p_n\}_n$ の個数が可算個で

$$p_n(u) = 0 (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ ならば } u = 0$$

となるとき $(X, \{p_n\}_n)$ を可算半ノルム系という. 可算半ノルム系はハウスドルフ空間になる. さらに距離付け可能になる. 実際講義で示したとおり

$$d(u - v) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_n(u - v)}{1 + p_n(u - v)} \frac{1}{2^n}$$

とすればいい. 特に, $\{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n\}$ は可算半ノルム系である. 講義では「可算個の半ノルムがあれば距離付け可能」と主張したが誤りで, 一般にハウスドルフ空間にはならず, つまり距離付け可能にはならない. 実際は, 可算半ノルム系であれば距離付け可能になる.