

第 12 章

$\mathfrak{M}(\mathbb{R})$ を $\mathbb{R}$ 上の複素数値ボレル可測関数の集合とする． A をヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素とする． $F, G \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ に対して $F(A)$, $G(A)$ を其々 T_F , T_G とおく． A に付随したスペクトル測度を E とする．つまり $(f, F(A)g) = \int F(\lambda)d(f, E_\lambda g)$ と表せる．講義では E_λ を $E(\lambda)$ と書いた．

定理 12.6 $F, G \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ に対して次が成り立つ．

- (1) $T_F^* = T_{\bar{F}}$
- (2) F が実関数であれば T_F は自己共役作用素である．
- (3) $D(T_F + T_G) = D(T_{F+G}) \cap D(T_G)$ で $T_F + T_G \subset T_{F+G}$
- (4) $D(T_F T_G) = D(T_{FG}) \cap D(T_G)$ で $T_F T_G \subset T_{FG}$

証明 (1) と (2) は講義で示した．

(3) F, G が有界関数のときは, $D(T_F + T_G) = D(T_{F+G}) = \mathcal{H}$ で $T_F + T_G = T_{F+G}$ になることに注意しよう．一般の $F, G \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ に対しては $D(T_F + T_G) = D(T_F) \cap D(T_G)$ なので, $f \in D(T_F + T_G)$ は $\int_{\mathbb{R}} |F(\lambda)|^2 d\|E_\lambda f\|^2 < \infty$ かつ $\int_{\mathbb{R}} |G(\lambda)|^2 d\|E_\lambda f\|^2 < \infty$ と同値である．さらに,

$$\frac{1}{2}|F(\lambda)|^2 - |G(\lambda)|^2 \leq |F(\lambda) + G(\lambda)|^2 \leq 2|F(\lambda)|^2 + 2|G(\lambda)|^2$$

から, $f \in D(T_F + T_G)$ は $f \in D(T_{F+G}) \cap D(T_G)$ と同値であることがわかる．ゆえに, $D(T_F + T_G) = D(T_{F+G}) \cap D(T_G)$ となる． $T_F + T_G \subset T_{F+G}$ を示そう． F_n を次で定める． $F_n(\lambda) = F(\lambda)(|\lambda| \leq n)$ かつ $F_n(\lambda) = 0(|\lambda| > n)$ ．このとき F_n は有界である． G_n も同様に定める．

$$f \in D(T_F) \cap D(T_G) (= D(T_{F+G}) \cap D(T_G))$$

とする． F_n と G_n の有界性から導かれる $T_{F_n} + T_{G_n} = T_{F_n+G_n}$ と, $T_{F_n}f \rightarrow T_F f$, $T_{G_n}f \rightarrow T_G f$, $T_{F_n+G_n}f \rightarrow T_{F+G}f$ ($n \rightarrow \infty$) から

$$\begin{aligned} \|(T_F + T_G - T_{F+G})f\| &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \|(T_F + T_G - T_{F_n} - T_{G_n})f\| \\ &\quad + \|(T_{F_n} + T_{G_n} - T_{F_n+G_n})f\| + \|(T_{F_n+G_n} - T_{F+G})f\| \} = 0 \end{aligned}$$

なので $T_F f + T_G f = T_{F+G} f$ が従う。よって (3) が従う。

(4) $f \in \mathcal{D}(T_G)$ とする。2 つの測度 $\|E(\cdot)T_G f\|^2$ と $\|E(\cdot)f\|^2$ について考える。

$$\|T_{\mathbb{1}_S} T_{G_n} f\|^2 = \|T_{\mathbb{1}_S G_n} f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_S(\lambda) |G_n(\lambda)|^2 d\|E_\lambda f\|^2$$

なので, $n \rightarrow \infty$ の極限をとれば

$$\|E(S)T_G f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_S(\lambda) |G(\lambda)|^2 d\|E_\lambda f\|^2$$

となるから $\|E(\cdot)T_G f\|^2 \ll \|E(\cdot)f\|^2$ で, ラドン-ニコディム導関数は

$$\frac{d\|E_\lambda T_G f\|^2}{d\|E_\lambda f\|^2} = |G(\lambda)|^2$$

である。つまり, $f \in \mathcal{D}(T_{FG}) \cap \mathcal{D}(T_G)$ のとき

$$\infty > \int |F(\lambda)G(\lambda)|^2 d\|E_\lambda f\|^2 = \int |F(\lambda)|^2 d\|E_\lambda T_G f\|^2$$

となる。これは, $T_G f \in \mathcal{D}(T_F)$ を意味するので $f \in \mathcal{D}(T_F T_G)$ となる。逆向きの包含関係 $\mathcal{D}(T_{FG}) \cap \mathcal{D}(T_G) \supset \mathcal{D}(T_F T_G)$ を示そう。 $f \in \mathcal{D}(T_F T_G)$ のとき $f \in \mathcal{D}(T_G)$ かつ $T_G f \in \mathcal{D}(T_F)$ だから,

$$\int_{\mathbb{R}} |F(\lambda)|^2 d\|E_\lambda T_G f\|^2 < \infty$$

となる。これは,

$$\int_{\mathbb{R}} |F(\lambda)|^2 |G(\lambda)|^2 d\|E_\lambda f\|^2 < \infty$$

を意味するから $f \in \mathcal{D}(T_{FG})$ となる。次に, $f \in \mathcal{D}(T_F T_G)$ に対して $T_F T_G f = T_{FG} f$ を示す。(3) と同様に F, G が有界関数のときは $\mathcal{D}(T_F T_G) = \mathcal{D}(T_{FG}) = \mathcal{H}$ で $T_F T_G = T_{FG}$ であることに注意しよう。

$$\begin{aligned} \|T_{FG} f - T_F T_G f\| &\leq \|T_{FG} f - T_{F_n G} f\| + \|T_{F_n G} f - T_{F_n G_m} f\| \\ &\quad + \|T_{F_n G_m} f - T_{F_n} T_{G_m} f\| + \|T_{F_n} T_{G_m} f - T_{F_n} T_G f\| \\ &\quad + \|T_{F_n} T_G f - T_F T_G f\| \end{aligned}$$

と分ける。 $\|T_{F_n G_m} f - T_{F_n} T_{G_m} f\| = 0$ となり,

$$\|T_{F_n G} f - T_{F_n G_m} f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |F_n(\lambda)|^2 |G(\lambda) - G_m(\lambda)|^2 d\|E_\lambda f\|^2$$

$$\|T_{FG} f - T_{F_n G} f\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |F_n(\lambda) - F(\lambda)|^2 |G(\lambda)|^2 d\|E_\lambda f\|^2$$

は $n, m \rightarrow \infty$ でそれぞれ 0 に収束する。また, $f \in \mathcal{D}(T_G)$ なので,

$$\|T_{F_n}T_{G_m}f - T_{F_n}T_Gf\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |F_n(\lambda)(G(\lambda) - G_m(\lambda))|^2 d\|E_\lambda f\|^2$$

$$\|T_{F_n}T_Gf - T_FT_Gf\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |(F_n(\lambda) - F(\lambda))G(\lambda)|^2 d\|E_\lambda f\|^2$$

も $n, m \rightarrow \infty$ でそれぞれ 0 に収束する. ゆえに, $T_{FG} = T_FT_G$ が $\mathcal{D}(T_FT_G)$ 上で成り立つ. $\square$

次の系が即座に従う.

系 12.7 $F, G \in \mathfrak{M}(\mathbb{R})$ かつ G が有界とする. このとき次が成り立つ.

$$(1) \quad T_F + T_G = T_{F+G}$$

$$(2) \quad T_FT_G = T_{FG}$$

証明 各自確かめよ. $\square$