

数学演習 IA No.14 2019.7.17

1 次の各集合がベクトル空間になるか判定せよ.

- | | |
|-----------------|---|
| (1) 平面内の原点を通る円 | (2) $\{(\frac{x}{y}) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$ |
| (3) 空間内の原点を通る直線 | (4) 空間内の原点を通らない直線 |
| (5) 空間内の原点を通る平面 | |

2 (1) 実係数の高々 n 次多項式の全体 $P_n(\mathbb{R}) = \{a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \mid a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}\}$ について零ベクトルが何かを明記し, $P_n(\mathbb{R})$ がベクトル空間であることを示せ.
 (2) 写像 $T: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow P_n(\mathbb{R})$ を $T(a_0, a_1, \dots, a_n) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ と定めるとき, T は全単射であることを示せ.

3 次の写像は線形写像かどうか述べよ. $P_n(\mathbb{R})$ は 2 で定めた空間, $M_n(\mathbb{R})$ は n 次実正方行列である.

- (1) $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x^2 \\ z \\ x+y \end{pmatrix}$ で定まる $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$
- (2) $f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})\mathbf{a}$ で定まる $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ (ただし, $\mathbf{a}$ は定ベクトル)
- (3) $T(f) = f'(x)x + f(0)x^2$ で定まる $T: P_2(\mathbb{R}) \rightarrow P_2(\mathbb{R})$
- (4) $T(A) = \text{Tr}(A)$ で定まる $T: M_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

4 n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が正則で, 各成分 $a_{ij} = a_{ij}(x)$ が x の微分可能な関数であるとする. このとき, 以下を示せ.

$$\frac{1}{\det A} \frac{d}{dx} \det A = \text{Tr} \left(A^{-1} \frac{dA}{dx} \right)$$

ただし, $\frac{dA}{dx} = (a'_{ij}), \text{Tr}(A) = \sum_{j=1}^n a_{jj}.$

(ヒント: No.10 3(2) $\frac{d}{dx} \det A$ の式, 余因子展開, 随伴行列の性質を合わせて用いる)

5 関数 $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ と定める.

(1) $x \neq 0$ のとき $f^{(n)}(x) = p_n(x^{-1})e^{-1/x^2}$ を示せ. ただし $p_n(x)$ は x の $3n$ 次多項式.

(2) $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $f^{(n)}(0) = 0$ を示せ. [ヒント: 帰納法]

以上

略解

- 1 (1) No $W = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 = a^2 + b^2\}$, ただし $a^2 + b^2 \neq 0$.
 $2(a, b) \in W$ だが $(a, b) \notin W$.
 (2) No ${}^t(1, 0), {}^t(0, -1) \in W$ だが ${}^t(1, 0) + {}^t(0, -1) = {}^t(1, -1) \notin W$
 (3) Yes 方向ベクトル ℓ として $W = \{t\ell \mid t \in \mathbb{R}\}$
 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in W$ に対し, $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in W, p\mathbf{x}_1 \in W$ はすぐわかる
 (4) No $\mathbf{0} \notin W$
 (5) Yes 法線ベクトル $\mathbf{h}$ として $W = \{\mathbf{x} \mid \mathbf{h} \cdot \mathbf{x} = 0\}$ であるから, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in W$ に対し
 $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 \in W, p\mathbf{x}_1 \in W$ は自明.
- 2 (1) 零ベクトルは $o(x) = 0 + 0x + 0x^2 + \cdots + 0x^n$
 $f(x) = a_0 + \cdots + a_n x^n, g(x) = b_0 + \cdots + b_n x^n$ に対し $f + g \in P_n(\mathbb{R}), pf \in P_n(\mathbb{R})$
 (2) $a_0 + \cdots + a_n x^n = b_0 + \cdots + b_n x^n$ ならば $a_0 = b_0, \dots, a_n = b_n$
 任意の $f \in P_n(\mathbb{R})$ に対し $\exists (a_0, \dots, a_n)$ s.t. $T(a_0, \dots, a_n) = f$
- 3 (1) No 例えば, $f(2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}) \neq 2f(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$
 (2) Yes
 $f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = (\mathbf{a} \cdot (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2))\mathbf{a} = f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2), \quad f(c\mathbf{x}) = (\mathbf{a} \cdot c\mathbf{x})\mathbf{a} = cf(\mathbf{x})$
 (3) Yes
 $T(f + g) = (f'(x) + g'(x))x + (f(0) + g(0))x^2 = T(f) + T(g),$
 $T(cf) = cf'(x)x + cf(0)x^2 = cT(f)$
 (4) Yes
 $\text{Tr}(A + B) = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B), \quad \text{Tr}(cA) = c \text{Tr}(A)$
- 4 随伴行列 (教科書の呼び方) の (j, i) 成分 $\beta_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$, ただし, A_{ij} は A から i 行 j 列を取り除いたもの. このとき, $(A^{-1})_{ij} = \frac{1}{\det A} \beta_{ji}$.

No.10 で示したように行列式を微分して, さらに微分した行について展開すると

$$\frac{d}{dx} \det A = \sum_{i=1}^n \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{i1} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a'_{i,j} \beta_{i,j} = \det(A) \sum_{i,j} \left(\frac{dA}{dx} \right)_{ij} (A^{-1})_{ji}$$

- 5 (1) $p_0(x) = 1$ で $n = 0$ 成立
 n で成立するとして微分すると, $t = 1/x$ として $p_{n+1}(t) = 2t^3 p_n(t) - t^2 p'_n(t)$ が得られて $n + 1$ でも成立する.
 (2) $f^{(n)}(0) = 0$ と仮定すると

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} x^{-1} p_n(1/x) e^{-1/x^2} = \lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{t p_n(t)}{e^{t^2}} = 0$$

最後は, たとえば, $x > 0$ のときに $e^x > \frac{x^k}{k!}$ より従う. これから $f^{(n+1)}(0) = 0$.