

数学演習 IA—13

以下で Taylor 多項式, 残余項の定義は教科書の定義 4.47 による.

- [1] $f(x) = x^3 e^x$ の n 階微分 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.
- [2] $f(x) = e^x$ の $x = 0$ での Taylor 多項式 $T_n(x)$ と残余項 R_n を求めて $f(x) = T_n(x) + R_n$ の形で表せ.
- [3] (1) $f(x) = \cos x$ の n 回微分 $f^{(n)}(x)$ が $\cos(x + \frac{n\pi}{2})$ となることを示せ.
 (2) $f(x) = \cos x$ の $x = 0$ での Taylor 多項式 $T_{2m}(x)$ と残余項 R_{2m} を求めて $f(x) = T_{2m}(x) + R_{2m}$ の形で表せ.
- [4] (1) α を実数とする. $f(x) = (1+x)^\alpha$ とする. $f(x)$ の n 回微分が

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

となることを示せ.

- (2) $f(x) = (1+x)^\alpha$ の $x = 0$ での Taylor 多項式 $T_n(x)$ と残余項 R_n を求めて $f(x) = T_n(x) + R_n$ の形で表せ. ただし $x > -1$ とする.
- (3) $\alpha = n \in \mathbb{N}$ のとき上の結果が二項定理 $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ に一致することを示せ.
- [5] (1) $f(x) = \log x$ の n 回微分 $f^{(n)}(x)$ を求めよ.
 (2) 函数 $f(x) = \log x$ の, $x = a$ での Taylor 多項式 $T_n(x)$ と残余項 R_n を求めて $f(x) = T_n(x) + R_n$ の形で表せ. ただし, a は正の定数である.
 (3) $\log 3$ の近似値を, 小数点以下第 2 位まで, 上の (2) の結果を用いて求めよ.
 (ここで「小数点以下第 2 位まで」とは, 正しい値の 3 桁目を四捨五入した結果の意味である.) 残余項も考慮して, 誤差評価を行うのが望ましい. 必要ならば, 以下の事実や数値を用いても良い:

$$\text{自然対数の底を } e \text{ として, } \log e = 1, \quad e \approx 2.71828, \quad \frac{1}{e} \approx 0.367879$$

なお, 上では e の近似値を与えたが, これ自身は, (ベストな方法ではないが) [2] の Taylor 展開を用いて評価できるので, この問題では既知とした.

演習 13 の略解

[1] $g(x) = x^3$, $h(x) = e^x$ と置く. $g^{(4)} = 0$ なので, ライプニッツの定理より

$$\begin{aligned} & \{g(x)h(x)\}^{(n)} \\ &= g(x)h^{(n)} + \binom{n}{1} g'h^{(n-1)} + \binom{n}{2} g''h^{(n-2)} + \binom{n}{3} g^{(3)}h^{(n-3)} \\ &= x^3e^x + n \times 3x^2e^x + \frac{n(n-1)}{2} \times 6xe^x + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} 6e^x \\ &= \{x^3 + 3nx^2 + 3n(n-1)x + n(n-1)(n-2)\}e^x. \end{aligned}$$

[2] $f^{(n)} = e^x$ なので, 任意の x に対して, ある $0 < \theta < 1$ が存在して

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

[3] (1) 自明

(2)

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} (-1)^m & n = 2m \\ 0 & n = 2m + 1 \end{cases}$$

なので, 任意の x に対して, ある $0 < \theta < 1$ が存在して

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^m}{(2m)!}x^{2m} + \frac{(-1)^{m+1} \sin(\theta x)}{(2m+1)!}x^{2m+1}.$$

[4] (1) 帰納法

(2) 任意の $x > -1$ に対して, ある $0 < \theta < 1$ が存在して

$$\begin{aligned} (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}. \end{aligned}$$

(3) 自明

[5] (1)

$$f'(x) = \frac{1}{x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f'''(x) = +\frac{2}{x^3}$$

となっていくので, 帰納法により

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{x^n}$$

(2) 上の微分の結果を用いると, 任意の $x > 0$ に対して, a と x の間の数 ξ が存在して

$$\begin{aligned} \log x &= \log a + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k a^k} (x-a)^k + \frac{(-1)^n}{(n+1) \xi^{n+1}} \{(x-a)\}^{n+1} \\ &= \log a + \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} \left(\frac{x}{a} - 1\right)^k + \frac{(-1)^n}{(n+1)} \left(\frac{x-a}{\xi}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

が結論できる. なお, この結果は, $\log x = \log a = \log(x/a)$ に注意すれば, $\log(1+x)$ の展開からも出せるし, 上の 2 行目の形も納得できる.

- (3) $a = e$, $x = 3$ として使うのがおそらく簡単. 第何項までとれば良いかはやってみないとわからない. ともかく $x = 3, a = e$ とすれば, テイラー展開の最初の方が

$$\log 3 = 1 + \left(\frac{3}{e} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{e} - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{e} - 1\right)^3 - \dots$$

$$\frac{3}{e} - 1 \approx 0.1036, \quad \left(\frac{3}{e} - 1\right)^2 \approx 0.011, \quad \left(\frac{3}{e} - 1\right)^3 \approx 0.001$$

となっている. なので, おそらく, 第 2 項まで正確に計算し, 第 3 項の部分を残項として扱えば良さそうだ.

この考察に基づいて, 以下のように進むと良い. $x = 3, a = e$ としてテイラー展開し, 残項も書くと

$$\log 3 = 1 + \left(\frac{3}{e} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{e} - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3-e}{\xi}\right)^3 \quad \xi \text{ は } e \text{ と } 3 \text{ の間の数}$$

となる. 残項は正なので, 残項を捨てれば

$$\log 3 \geq 1 + \left(\frac{3}{e} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{e} - 1\right)^2 \approx 1.09827 \quad (*)$$

を得る. また, 残項は最悪, 大きくても ($\xi = e$ の時に) $\frac{1}{3}\left(\frac{3}{e} - 1\right)^3$ 以下だから,

$$\log 3 \leq 1 + \left(\frac{3}{e} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{3}{e} - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{3}{e} - 1\right)^3 \approx 1.09864 \quad (**)$$

が得られる. (*) と (**) から, $\log 3 \approx 1.10$ を得る. (本当は「1.098 または 1.099」まで来ているのだが, もう一桁取るには今一歩たりない...)