数学演習 IA　No.12　2019.7.3

$\boxed{1}$ 次の n 次 3 重対角行列の行列式を Δ_n とおく．

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & & \vdots \\ 0 & c_2 & a_3 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & c_{n-1} & a_n \end{pmatrix}$$

(1) 次の漸化式を示せ．

$$\Delta_n = a_n \Delta_{n-1} - b_{n-1} c_{n-1} \Delta_{n-2}$$

(2) $a_i = 2\cos\theta$，$b_i = c_i = 1 \quad (i = 1, 2, \ldots)$ のとき，　$\Delta_n = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$ を示せ．

$\boxed{2}$ 次の式を示せ．(Vandermonde 行列式)

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ {x_1}^2 & {x_2}^2 & \cdots & {x_n}^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ {x_1}^{n-1} & {x_2}^{n-1} & \cdots & {x_n}^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

$\boxed{3}$ ${}^tA = -A$ を満たす n 次正方行列を n 次反対称行列と呼ぶ．

(1) n が奇数であれば $\det A = 0$ となることを示せ．

(2) $\det \begin{pmatrix} 0 & a & b & c \\ -a & 0 & d & e \\ -b & -d & 0 & f \\ -c & -e & -f & 0 \end{pmatrix} = (af - be + cd)^2$ を示せ．

(3) n(偶数) 次反対称行列 $A = (a_{ij})$ の行列式は，a_{ij} たちのある多項式 $\mathrm{Pf}(A)$ (Pfaffian) の二乗であらわせることを示せ．

(ヒント: n についての帰納法による．n 次反対称行列 $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$，ただし，$A_{11}$ は $n-2$ 次反対称行列，$Q = \begin{pmatrix} I_{n-2} & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I_2 \end{pmatrix}$ として $\det(QA)$ を考えてみよ)

以上

略解

$\boxed{1}$ (1) n 行目で展開，片方は Δ_{n-1}. もう一方はさらに $n-1$ 列目で展開すると Δ_{n-2} がでてくる.

(2) $n=1,2$ で確かめて漸化式.

$\boxed{2}$ 帰納法．$n=2$ で成立することを確認.

$n-1$ で成立するとして，n 次を計算する．$(n-1)$ 行の $-x_n$ 倍を n 行目に足し，$(n-2)$ 行の $-x_n$ 倍を $n-1$ 行目に足し，を繰り返して n 列目で展開すると，

$$(-1)^{n-1}\det\begin{pmatrix} x_1-x_n & \cdots & x_{n-1}-x_n \\ x_1(x_1-x_n) & \cdots & x_{n-1}(x_{n-1}-x_n) \\ \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-2}(x_1-x_n) & & x_{n-1}^{n-2}(x_{n-1}-x_n) \end{pmatrix}$$

i 列目を x_i-x_n でくくると，$n-1$ 次に帰着.

$\boxed{3}$ (1) n 次行列 A に対し，$\det(A)=\det({}^tA), \det(xA)=x^n\det(A)$ より，奇数次反対称行列 A は $\det(A)=\det({}^tA)=\det(-A)=(-1)^n\det(A)=-\det(A)$, よって $\det(A)=0$.

(2) (3) で使う結果を用いれば

$$A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}=\frac{1}{f}\begin{pmatrix} b & c \\ d & e \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -b & -d \\ -c & -e \end{pmatrix}=\frac{1}{f}\begin{pmatrix} 0 & -cd+be \\ cd-be & 0 \end{pmatrix}$$

だから $\det A=(af+cd-be)^2$

(3) n についての帰納法.

$n=2$ のとき，$\det\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{smallmatrix}\right)=a^2$ より成立.

$n-2$ まで成立しているとする．ヒントから QA を計算すると

$$\begin{pmatrix} I_{n-2} & -A_{12}A_{22}^{-1} \\ O & I_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} & O \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

両辺の行列式をとって

$$\det(A)=\det(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\det(A_{22})$$

A は反対称行列だから，$A_{21}=-{}^tA_{12}, A_{22}=\left(\begin{smallmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{smallmatrix}\right)$ に注意する ($a\neq 0$ とする）と，

$${}^t(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})={}^tA_{11}-{}^tA_{21}{}^t(A_{22}^{-1})^tA_{12}=-A_{11}+A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$$

従って，$\det A$ は $n-2$ 次，2 次反対称行列の行列式の積であり，帰納法の仮定から $\det(A)=\left(a\,\mathrm{Pf}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})\right)^2$ とかけることが示される．ここで行列式の定義から $\mathrm{Pf}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})$ は a^{-1} の多項式だが，$\det(A)$ に a の負冪はあらわれず $a\,\mathrm{Pf}(A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})=ap_1+p_0$ である.