2019/06/26

数学演習 IA—11

[1] 三角函数 $\sin, \cos, \tan$ の主値をそれぞれ $\mathrm{Arcsin}, \mathrm{Arccos}, \mathrm{Arctan}$ で表す．例えば，Arcsin とは，閉区間 $[-\pi/2, \pi/2]$ で考えた，$\sin$ の逆函数である．

(1) 逆函数としての関係式，つまり

$$\mathrm{Arcsin}(\sin x) = x \qquad \sin(\mathrm{Arcsin}\, x) = x$$

などを用いて， $\mathrm{Arcsin}\, x$, $\mathrm{Arccos}\, x$, $\mathrm{Arctan}\, x$ の，x に関する 1 階導函数を計算せよ．

(2) オイラーによる以下の公式を証明せよ：

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{2}\Big) + \mathrm{Arctan}\Big(\frac{1}{3}\Big)$$

[2] 双曲線函数（定義域は実数全体）を

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

として定義する．

(1) $\cosh x$, $\sinh x$ の，x に関する n-階導函数を求めよ（n は正の整数)．

(2) 区間 $[0, \infty)$ から区間 $[1, \infty)$ への函数として，函数 $f(x)$ を

$$f(x) = \cosh x \qquad (x \geq 0)$$

により定義する．この $f(x)$ の逆函数を $\mathrm{Arccosh}\, x$ と書く．対数函数と無理函数を用いて，$\mathrm{Arccosh}\, x$ を x の函数として具体的に表せ．

(3) $y = f(x)$，および $y = \mathrm{Arccosh}\, x$ のグラフの概形を描け．

(4) $y = \mathrm{Arccosh}\, x$ の，x に関する 1 階導函数を計算せよ．$\mathrm{Arccos}\, x$ の導函数と比べるとどうなっているか？

[3] n を自然数とする．n 次のルジャンドルの多項式（の定数倍）として

$$P_n(x) = \frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

を定義する．方程式 $P_n(x) = 0$ は，開区間 $(-1, 1)$ において，n 個の相異なる解を持つことを示せ．（ヒント）Rolle の定理と帰納法．

[4] $f(x)$ は実数軸上で定義された微分可能な函数で，その導関数は

$$|\, f'(x)\, | < 0.99$$

を満たしている．この $f(x)$ を用いて，数列 $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ を，漸化式

$$a_1 = A \text{ (定数)}, \qquad n \geq 1 \text{ にて } \quad a_{n+1} = f(a_n)$$

により定義する．この数列が収束することを示せ．（ヒント）漸化式と平均値の定理から，$|a_{n+2} - a_{n+1}|$ と $|a_{n+1} - a_n|$ の間の（有用な）関係式を得ることができる．

略解

[1] (1) $\sin(\mathrm{Arcsin}\,x) = x$ の両辺を x で微分する（左辺にはもちろん，合成函数の微分を使う）と，

$$\cos(\mathrm{Arcsin}\,x)\,(\mathrm{Arcsin}\,x)' = 1 \qquad \text{つまり} \qquad (\mathrm{Arcsin}\,x)' = \frac{1}{\cos(\mathrm{Arcsin}\,x)}$$

となる．ここで

$$\cos(\mathrm{Arcsin}\,x) = \sqrt{1 - \{\sin(\mathrm{Arcsin}\,x)\}^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

なので，

$$(\mathrm{Arcsin}\,x)' = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

同様に，$\cos(\mathrm{Arccos}\,x) = x$ の両辺を x で微分して

$$-\sin(\mathrm{Arccos}\,x)\,(\mathrm{Arccos}\,x)' = 1 \qquad \text{つまり} \qquad (\mathrm{Arccos}\,x)' = -\frac{1}{\sin(\mathrm{Arccos}\,x)} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

また，$\tan(\mathrm{Arctan}\,x) = x$ の両辺を x で微分して

$$\sec^2(\mathrm{Arctan}\,x)\,(\mathrm{Arctan}\,x)' = 1 \qquad \text{つまり} \qquad (\mathrm{Arctan}\,x)' = \frac{1}{\sec^2(\mathrm{Arctan}\,x)} = \cos^2(\mathrm{Arctan}\,x)$$

となるが，$\mathrm{Arctan}\,x = \theta$ とでも書けば，

$$x = \tan\theta \quad \text{より} \quad \sin\theta = x\cos\theta$$

を得て，これを $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ に代入すれば，

$$(1 + x^2)\,\cos^2\theta = 1 \qquad \text{つまり} \qquad \cos^2\theta = \frac{1}{1 + x^2}$$

を得るので，

$$(\mathrm{Arctan}\,x)' = \cos^2(\mathrm{Arctan}\,x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

(2) 慣れるまでは，$\alpha = \mathrm{Arctan}(1/2), \beta = \mathrm{Arctan}(1/3)$ などと置いて，これらの tan についての式に書き直せばよい．これはもちろん

$$\tan\alpha = \frac{1}{2}, \qquad \tan\beta = \frac{1}{3}$$

ということであり，目的の式は $\alpha + \beta = \pi/4$ である．となれば，加法定理で $\tan(\alpha + \beta)$ を計算しようとするのは自然だろう：

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\,\tan\beta} = \frac{1/2 + 1/3}{1 - 1/6} = 1$$

Arctan の定義から，$0 < \alpha, \beta < \pi/4$ だから，上を満たす $\alpha + \beta$ は $\pi/4$ しかない．

[2] (1) 1 階微分すると，定義から直ちに

$$(\sinh x)' = \cosh x, \qquad (\cosh x)' = \sinh x$$

を得る．(cos, sin と異なり，微分してもマイナスは出ず，互いが入れ替わるだけ)．なので，これを繰り返せば，

$$\frac{d^n}{dx^n}\cosh x = \begin{cases} \cosh x & (n \text{ が偶数}) \\ \sinh x & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

$$\frac{d^n}{dx^n}\sinh x = \begin{cases} \sinh x & (n \text{ が偶数}) \\ \cosh x & (n \text{ が奇数}) \end{cases}$$

を得る．

(2) $y = \mathrm{Arccosh}\, x$ とおく．これは $x = \cosh y$ ということで，これを y について解けば良い．これは $2x = e^y + e^{-y}$ ということだから，$Y = e^y$ と置けば，$Y^2 + 1 = 2x$ となる．この解はもちろん，

$$Y = x \pm \sqrt{x^2 - 1}$$

となるが，Arccosh の定義から，$y \geq 0$（つまり $Y \geq 1$）であることを考慮すると

$$Y = x + \sqrt{x^2 - 1} \qquad \text{つまり} \qquad y = \log\bigl(x + \sqrt{x^2 - 1}\bigr)$$

となる．

(3) 略．$y = f(x)$ のグラフを描いてから，それを $y = x$ で折り返すのが簡単だろう．でも，地道に上の $y = \log\bigl(x + \sqrt{x^2 - 1}\bigr)$ の増減や凹凸を調べることもやってみよう．

(4) （方法 1）上で得た表式を微分する．答えは案外簡単になって

$$(\mathrm{Arccosh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

（方法 2）逆三角関数の時と同様に，$\cosh(\mathrm{Arccosh}\, x) = x$ の両辺を微分して

$$\sinh(\mathrm{Arccosh}\, x)\,(\mathrm{Arccosh}\, x)' = 1 \qquad \text{つまり} \qquad (\mathrm{Arccosh}\, x)' = \frac{1}{\sinh(\mathrm{Arccosh}\, x)}$$

を得る．$\mathrm{Arccosh}\, x = y$ と置くと $\cosh y = x$ である．ここで cosh と sinh の間に成り立つ恒等式 $\cosh^2 y - \sinh^2 y = 1$ を用いると

$$\sinh^y = \cosh^2 y - 1 = x^2 - 1$$

が得られるので，

$$(\mathrm{Arccosh}\, x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

となる．

[3] 以下，考えている区間における $f(x) = 0$ の解を「f のゼロ点」という．

$n=1$ のとき,

$$P_1(x)=\frac{d}{dx}(x^2-1)=2x$$

であるので，$x=0$ に一つのゼロ点を持つ.

$n=2$ の時,

$$P_2(x)=\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^2=12x^2-4=12\Big(x^2-\frac{1}{3}\Big)$$

であるので，$x=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ に，合計 2 つのゼロ点を持つ.

これを繰り返しても一般の n に行くのは大変なので，帰納法をうまくやることを考える． ただし，「P_n に対しての結論を仮定して P_{n+1} に対する性質を導く」のはあまりうまく行かないようだ.

以下，n を固定し，$g(x)=(x^2-1)^n$ の k 階微分（$1\le k\le n$）を，k を増やす帰納法によって考えて行く．証明したいこと：

> この函数 $g(x)$ の k-階導関数 $g^{(k)}(x)$ は，$1\le k\le n$ では，$(-1,1)$ 中に少なくとも k 個の異なるゼロ点を持つ.

<u>$k=1$ のとき</u>

$g(-1)=g(1)=0$ なので，Rolle の定理により，$(-1,1)$ 内に（少なくとも一つ），$g'(x)=0$ なる x が存在する.

<u>k のときまで言えたとして，$k+1$ について（ただし $k<n$）</u>

議論を明確にするため，$g^{(k)}$ の，開区間 $(-1,1)$ におけるゼロ点の総数を N_k と書こう．帰納法の仮定から，$N_k\ge k$ である．我々は以下で，$N_{k+1}\ge N_k+1$ を示す．これができれば，もちろん，$N_{k+1}\ge k+1$ が言えるので，帰納法が完結する.

さて，$k<n$ の場合，$g^{(k)}(x)$ は $x=\pm1$ でもゼロになる (why?；「why?」というのは，「**なぜそうなるのかを各自，納得するまでしっかり考えよ**」という意味であって，解答例の作成者に理由がわからないという意味ではない．念のため)．これを考慮して，$g^{(k)}$ のゼロ点を（±1 を含めて)，$-1=x_0<x_1<x_2<x_3<\cdots<x_{N_k}<x_{N_k+1}=1$ と書こう.

$$g^{(k+1)}(x)=\frac{d}{dx}g^{(k)}(x)$$

であることと，$g^{(k)}(x_j)=g^{(k)}(x_{j+1})=0$（$j=0,1,2,\cdots,N_k$）であることに注意すると，Rolle の定理から，各区間 (x_j,x_{j+1}) 中に $g^{(k+1)}(x)$ のゼロ点が少なくとも一つ存在することがわかる．この j は 0 から N_k まで変われるから，これらを合わせると，$(-1,1)$ 中の $g^{(k+1)}(x)$ のゼロ点は少なくとも (N_k+1) こあることが証明できた．つまり，$N_{k+1}\ge N_k+1$ であり，これから $N_{k+1}\ge k+1$ がでる.（帰納法終わり）

以上の 2 段目を $k+1=n$ まで進めることにより，つまり，$N_n\ge n$ を示すことにより，$P_n(x)$ が，$(-1,1)$ に少なくとも n この異なるゼロ点を持つことがわかった.

最後に，$P_n(x)$ は n 次の多項式であることに注意すると，$P_n(x)$ のゼロ点は**高々 n 個**であることがわかる（代数学の基本定理).「少なくとも n こ」のゼロ点があることはすでに言ったから，これと合わせると「ちょうど n こ」のゼロ点があることが言えた．**（証明終わり）**

代数学の基本定理を使わない方法

「代数学の基本定理」を援用しない方法もないわけではないので以下に説明する．(ただし，代数学の基本定理は重要な定理であり，使うべきところでは使うのも良いことだ.）

この方法では，上で行った帰納法をさらに $k \geq n$ でも行うことを考える．この場合でも，帰納法ができてしまうような気がするが，それは早計である．実際には，上の帰納法を行う際に「± 1 は $g^{(k)}$ のゼロ点」であることを用いていた（そのため，$(-1, x_1)$ と $(x_{N_k}, 1)$ の間にも $g^{(k+1)}$ のゼロ点があることが言え，これが N_{k+1} の増加に繋がった).

ところが，$k \geq n$ では，± 1 は $g^{(k)}$ のゼロ点になるとは限らない（実際，後の議論から，「ゼロ点になっては困る」ことも結論できるが，この事実は証明には必要ない)．そのため，上の帰納法において，「$(-1, x_1)$ と $(x_{N_k}, 1)$ の間にも $g^{(k+1)}$ のゼロ点がある」ところは成立しない（かもしれない)．しかしそれ以外の区間，つまり $1 \leq j \leq N_k - 1$ に対する (x_j, x_{j+1}) においては，やはり Rolle の定理により，$g^{(k+1)}$ のゼロ点が少なくとも一つ存在する．ゼロ点が確実に存在する区間の数は $(N_k - 1)$ 個あるから，これから

$$N_{k+1} \geq N_k - 1 \qquad (*)$$

が結論できる.

さて，ここまでの準備ののち，背理法を使おう．今，$N_n > n$ だったとする．上の $(*)$ を繰り返し使うと，

$$N_{n+1} \geq N_n - 1 > n - 1, \qquad N_{n+2} \geq N_{n+1} - 1 > n - 2, \cdots \qquad (**)$$

と続いていく．これがどこまで繰り返せるかというと，少なくとも，$g^{(k+1)}$ が多項式である限り，つまり $k + 1 = 2n - 1$ までは行ける．つまり $(**)$ から

$$N_{2n-1} > n - (n-1) = 1 \qquad (***)$$

が結論できる.

ところが，$g^{(2n-1)}$ は一次式である（ここも why?)．よって，そのゼロ点は一つしかない．つまり

$$N_{2n-1} \leq 1 \qquad (****)$$

である．(なぜ不等号が入ってるかというと，この一つしかないゼロ点が $(-1, 1)$ の外にある可能性を排除していないからである．実際には $(-1, 1)$ 内にあることも言えるから等号が成立するが.）

見ての通り，$(***)$ と $(****)$ は矛盾している．つまり最初の仮定 $N_n > n$ がおかしいので，$N_n \leq n$ と結論せざるを得ない．**（背理法終わり）**

（補足）「± 1 が $g^{(k)}$ のゼロ点か」について（$k \geq n$）．上の導出から，最終的に N_k は

$$N_k = \begin{cases} k & (0 \leq k \leq n) \\ n-k & (n < k \leq 2n) \end{cases}$$

となっていることがわかる．さらに，($*$) の不等式も実は等式である（等式でないと困る）ことがわかる．ところが，もし仮に $+1$ または -1 が $g^{(k)}$ のゼロ点だったとすると，($*$) が

$$N_{k+1} \geq N_k$$

となってしまい，($*$) を等号にしたものが成り立たない．これは矛盾であるので，結果として「$k \geq n$ では，± 1 は $g^{(k)}$ のゼロ点ではない」こともわかる．

（補足 2）$P_n(x)$ は，n が偶数なら偶函数，n が奇数なら奇函数である（またもや why?）．これを用いれば，もう少し綺麗に議論できる．

[4] 平均値の定理より

$$a_{n+2} - a_{n+1} = f(a_{n+1}) - f(a_n) = f'(x)\,(a_{n+1} - a_n)$$

がなりたつ（ここで x は a_{n+1} と a_n の間の数）．両辺の絶対値をとり，$|f'(x)| < 0.99$ を用いると

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| < 0.99 \times |a_{n+1} - a_n|$$

が得られ，前々回の [1](3) に帰着された．