2019/06/12

数学演習 IA—9

[**1**] 以下の数列がコーシー列であるか否かを判定せよ．

(1) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ によって定義される数列 (a_n).

(2) $b_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ によって定義される数列 (b_n).

(3) $n \geq 1$ に対して不等式

$$|c_{n+2} - c_{n+1}| \leq r\,|c_{n+1} - c_n|$$

を満たす数列 (c_n)．ただし，ここで r というのは，$0 < r < 1$ を満たす（n によらない）定数である．

[**2**] $A = \{\frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} | n \in \mathbb{N}\}$ の最大値, 最小値, 上限, 下限を求めよ.

[**3**] $(0, 1)$ 上の関数を次で定める：

$$T(x) = \begin{cases} \frac{1}{p} & x = \frac{q}{p} \in \mathbb{Q} \quad \text{の時 } (p, q \text{ は互いに素な自然数}) \\ \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \quad \text{の時} \end{cases}$$

T は $x \in \mathbb{Q}$ で不連続, $x \notin \mathbb{Q}$ で連続になることを示せ.

略解

[1] 「コーシー列であること」と「数列が収束すること」は同値なので，別の方法で数列の収束発散を調べる手もある．しかしここでは，コーシー列の定義をチェックする地道な方法を書く．以下，$m > n$ としておく．

(1) コーシー列ではない．理由は以下の通り．(反例になるような m, n を見つける．以下は一例である．補足も参照)．

$$a_m - a_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k}$$

であるが，特に，正の整数 $M > N$ を持って来て $m = 2^M$，$n = 2^N$ の場合を考えると

$$a_{2^M} - a_{2^N} = \sum_{k=2^N+1}^{2^M} \frac{1}{k} = \sum_{K=N+1}^{M} \sum_{k=2^{K-1}+1}^{2^K} \frac{1}{k} > \sum_{K=N+1}^{M} \sum_{k=2^{K-1}+1}^{2^K} \frac{1}{2^K} = \sum_{K=N+1}^{M} \frac{1}{2} = \frac{M-N}{2}$$

すると，いくら大きな M, N を持って来ても，$M \gg N$ とすることによって上の右辺をいくらでも大きくできるから，これはコーシー列の定義を満たさない．よってコーシー列ではない．

(補足)

- もっとコンパクトに示すには，単に $a_{2n} - a_n$ を見てもよい．つまり

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} > \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$$

  となって，これは n を大きくしても小さくならないので，コーシー列ではない．
- 大学ではまだやっていないが，積分を使って評価すれば $m > n > 1$ くらいで

$$a_m - a_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k} > \int_{n+1}^{m+1} \frac{1}{x} dx = \log\left(\frac{m+1}{n+1}\right)$$

  くらいが得られる．

(2) コーシー列である．理由は以下の通り．やはり $m > n > 1$ とすると

$$0 < b_m - b_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} < \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{m} \left[\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right] = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

が成り立つことがわかる．よって，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$N = 1/\epsilon$ としてやれば，上より

$$m > n > N \qquad \text{では} \qquad |b_m - b_n| < \frac{1}{n} < \epsilon$$

が成り立つ．これはコーシー列の定義そのもので O.K.

積分を用いて評価すれば $m > n > 1$ くらいで以下が得らレ，同じことである．

$$0 < b_m - b_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \le \int_n^m \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{m}$$

(3) コーシー列である．理由は以下の通り．まず，漸化不等式を何回も使うと，$n \ge 1$ に対して

$$|c_{n+2} - c_{n+1}| < r|c_{n+1} - c_n| < r^2|c_n - c_{n-1}| < \cdots < r^n|c_2 - c_1| \qquad (*)$$

が得られる．一方，$m > n$ に対して $|c_m - c_n|$ を

$$c_m - c_n = \sum_{k=n}^{m-1}(c_{k+1} - c_k) \qquad \Longrightarrow \qquad |c_m - c_n| \le \sum_{k=n}^{m-1} |c_{k+1} - c_k|$$

のように評価できる．(*) を右辺に用いると

$$|c_m - c_n| \le \sum_{k=n}^{m-1} |c_{k+1} - c_k| < \sum_{k=n}^{m-1} r^{k-1}|c_2 - c_1| = \frac{1 - r^{m-n}}{1 - r}\, r^{n-1}\, |c_2 - c_1| < \frac{|c_2 - c_1|}{1 - r}\, r^{n-1}$$

が結論できる．

そこで，$\epsilon > 0$ に対して N を十分に大きく，

$$\frac{|c_2 - c_1|}{1 - r}\, r^{N-1} < \epsilon$$

となるようにとると，

$$m > n > N \qquad \text{では} \qquad |c_m - c_n| < \frac{|c_2 - c_1|}{1 - r}\, r^{n-1} < \epsilon$$

が成り立つ．これはコーシー列の定義そのもので O.K.

[2] 最大値は 1/4，最小値はなし，上限は最大値と同じで 1/2，下限は 0

[3] $x = q/p \in \mathbb{Q}$ (既約分数) のとき，$x_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ で $x_n \to x$ となる数列 $\{x_n\}_n$ がとれる．このとき，

$$\lim_{n \to \infty} T(x_n) = 0 \ne 1/p.$$

よって，この函数は有理数 x においては連続でない．

今度は $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ を一つ固定して，ここでの連続性を言おう．

任意の $\epsilon > 0$ に対して $1/M < \epsilon$ となる $M \in \mathbb{N}$ をとる．x の近傍 $(x-1, x+1)$ をとると，$\{q/p \mid p = 1, 2, \ldots, M,\ q \in \mathbb{Q}\}$ の形の既約分数は有限個しかない．よって，x の十分小さい近傍 $U := (x - \delta, x + \delta)$ をとると U に含まれる有理数を既約分数であらわすと分母は M より大きくなる．よって，

$$|T(y)| < 1/M < \epsilon \quad \text{for } y \in U \cap \mathbb{Q} \qquad (*)$$

一方，定義から，$x \in U \setminus \mathbb{Q}$ に対して $T(x) = 0$ である．これをもちいて上の (*) を言い換えると，「$y \in U$ ならば $|T(x) - T(y)| < \epsilon$」となる．これは $T(y)$ という函数が $y = x$ で連続であることの主張に他ならない．