数学演習IA　No.8　2019.6.5

$\boxed{1}$ 3次元空間内の点 $P(x_0, y_0, z_0)$ と平面 $H : ax + by + cz + d = 0$ との距離 D は

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

であることを示せ ($(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ とする）.

$\boxed{2}$ (1) 置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ の逆置換を求めよ.

(2) 置換の積 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

(3) 互換の積 $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 4 \end{pmatrix}$ を計算せよ.

(4) 置換 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 7 & 4 & 1 & 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ を互換の積で表せ．また，置換の符号を与えよ.

$\boxed{3}$ 差積 $\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$, $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対し, $\sigma\Delta(x_1, \ldots, x_n) = \Delta(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ と定める.

(1) $\sigma = (i\ \ j)$ のとき（$(i\ \ j)$ は互換をあらわす),

$$\sigma\Delta(x_1, \ldots, x_n) = -\Delta(x_1, \ldots, x_n)$$

を示せ (まずは互換 $(1\ \ 2)$ の場合に確認してみよ).

(2) 置換を互換の積で表すとき，互換が偶数個あるか奇数個あるかは与えられた置換により定まることを示せ.

$\boxed{4}$ $\mathfrak{S}_n$ のうち偶置換，奇置換であるものの集合をそれぞれ A, B とする．ふたつの集合の元の個数が一致することを証明せよ ($n > 1$ とする).

(ヒント: $f(\sigma) = (1\ 2)\sigma$ は A から B への単射であることを示せ．これから個数について何がわかるか？)

以上

略解

$\boxed{1}$ $\boldsymbol{p} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$ を通り, 方向ベクトルが $\boldsymbol{h} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ の直線 ℓ は $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{p} + t\boldsymbol{h}$ と表せる．これを平面の式 $ax + by + cz + d = 0$ に代入して

$$t = \frac{-d - ax_0 - by_0 - cz_0}{a^2 + b^2 + c^2} =: t_0$$

だから, ℓ と平面の交点の座標は $\boldsymbol{p} + t_0\boldsymbol{h}$ であり，距離 $D = |t_0|\|\boldsymbol{h}\|$.

$\boxed{2}$ 教科書は置換の積が通常と逆らしい．σ, τ に対し $(\sigma\tau)(i) = \tau(\sigma(i))$

(1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

(2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

(3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(4) 例えば，(5 6)(6 7)(2 7)(3 4)(1 3)?

$\boxed{3}$ (1) $i < j$ として Δ は

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(x_1 - x_2) & \dots & (x_1 - x_i) & \dots & \dots & \dots & (x_1 - x_j) & \dots & \dots & (x_1 - x_n) \\
 & \dots & \dots & & & & \dots & & & \\
 & & (x_{i-1} - x_i) & \dots & \dots & \dots & (x_{i-1} - x_j) & \dots & & \\
 & & & (x_i - x_{i+1}) & \dots & (x_i - x_{j-1}) & (x_i - x_j) & \dots & \dots & (x_i - x_n) \\
 & & & & (x_{i+1} - x_{i+2}) & \dots & (x_{i+1} - x_j) & \dots & & \\
 & & & & & \dots & \dots & & & \\
 & & & & & & (x_{j-1} - x_j) & \dots & & \\
 & & & & & & & (x_j - x_{j+1}) & \dots & (x_j - x_n) \\
 & & & & & & & & \dots &
\end{array}$$

$(i \;\; j)$ によって色のついたところが入れ替わる．

(2) 互換の積として，$\sigma = \sigma_1 \dots \sigma_s = \tau_1 \dots \tau_t$ とかけたとき，$\sigma\Delta = (-1)^s\Delta = (-1)^t\Delta$. 故に，$(-1)^s = (-1)^t$.

$\boxed{4}$ $|\mathfrak{S}_n| = n!$, $|A|, |B| < \infty$. f は A から B への写像で，$f(\sigma) = f(\tau)$ なら $\sigma = \tau$ より単射．よって $|A| \leq |B|$．同じく f は B から A への単射を定め，$|A| \geq |B|$. 故に $|A| = |B|$.