

数学演習 IA—7

以下の問題のうち、* のついているものは「少し難しいかもしれない問題」、** は「チャレンジ問題に類する、難しい問題」である。

- [1] $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ を連続関数とすると、

$$f(c) = c$$

となる $c \in [0, 1]$ が存在することを示せ。

- [2] $f(x)$ を次の奇数次の多項式とする (n は非負の整数) :

$$f(x) = x^{2n+1} + a_{2n} x^{2n} + a_{2n-1} x^{2n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

係数 $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ が全て実数の時、

$$f(x) = 0$$

は必ず実数解をもつことを示せ。

- [3] コーシー列について、以下に答えよ。(教科書の問 3.22)

(1) コーシー列は有界であることを証明せよ。(これはコーシー列の定義からすぐに出る.)

(2*) コーシー列は収束することを証明せよ。(上の (1) と教科書の定理 3.21 を用いる.)

- [4] 自然対数の底 e について、以下の問いに答えよ。

(1) e の一つの定義として、

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$$

というものがある。この極限が存在することを示せ。

(2*) e の別の定義として、

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

というものがある。この極限も存在することを示せ。(ヒント：右辺の数列の n についての単調性は?)

(3**) 上の二つの極限が等しいことを示せ。(これはかなり難しい可能性があるので、チャレンジ問題である.)

略解

[1] $f(0) = 0$ または $f(1) = 1$ の時には $c = 0$ または $c = 1$ が題意を満たすので OK. 以下, $f(0) \neq 0$ かつ $f(1) \neq 1$ の場合を考える.

この時, f の値域が $[0, 1]$ に入っているので, $f(0) > 0$ かつ $f(1) < 1$ である. そこで函数 $g(x) = f(x) - x$ を考えると,

- $g(x)$ は $[0, 1]$ で連続
- $g(0) > 0$ かつ $g(1) < 0$

が満たされている. よって, g にたいする中間値の定理から, $g(c) = 0$ なる $c \in (0, 1)$ が存在する. (証明終)

[2] やはり中間値の定理を用いる.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

であることに注意すると, 中間値の定理より, $f(c) = 0$ なる実数 c が存在する.

数学的に厳密に議論する例としては, 以下の通り. $x \neq 0$ では

$$f(x) = x^{2n+1} \left(1 + \frac{a_{2n}}{x} + \frac{a_{2n-1}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \right)$$

と書くことができるが, かつこの中身は $|x| \geq 1$ では

$$1 - \left(\frac{|a_{2n}|}{|x|} + \frac{|a_{2n-1}|}{|x|^2} + \cdots + \frac{|a_1|}{|x|^{2n}} + \frac{|a_0|}{|x|^{2n+1}} \right) \geq 1 - \frac{|a_{2n}| + |a_{2n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|}{|x|}$$

以上である. さらに, 右辺は, $|x| > 2(|a_{2n}| + |a_{2n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|)$ では $1/2$ より大きい. つまり,

$$|x| \geq 1 \quad \text{かつ} \quad |x| \geq 2(|a_{2n}| + |a_{2n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) \quad (*)$$

では,

$$\frac{f(x)}{x^{2n+1}} = 1 + \frac{a_{2n}}{x} + \frac{a_{2n-1}}{x^2} + \cdots + \frac{a_1}{x^{2n}} + \frac{a_0}{x^{2n+1}} \geq \frac{1}{2}$$

なのである. そこで $(*)$ を満たす正の x の一つを b , 負の x の一つを a と書くと,

$$\frac{f(a)}{a^{2n+1}} \geq \frac{1}{2} \quad \text{かつ} \quad \frac{f(b)}{b^{2n+1}} \geq \frac{1}{2}$$

が結論できる. 分母を払えば $f(a) < 0$ かつ $f(b) > 0$ なのだ. よって閉区間 $[a, b]$ における $f(x)$ に対して中間値の定理を用いると, $f(x) = 0$ となる x の存在が証明される. (証明終)

[3] (1) コーシー列の定義において, $\epsilon = 1$ としたものを書くと

$$\exists N, \quad n, m > N \implies |a_m - a_n| < 1$$

となる. 特に $m = N + 1$ ととってやると, $n > N$ では

$$|a_n - a_{N+1}| < 1 \quad \text{よって} \quad |a_n| < |a_{N+1}| + 1$$

が成立する. なので,

$$M_1 = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|\}, \quad M_2 = |a_{N+1}| + 1, \quad M = \max\{M_1, M_2\}$$

と定義すると、すべての n に対して $|a_n| \leq M$ になりたつ。つまりこの数列は有界である。(証明終)

(2) 定理 3.21 より、コーシー列 $(a_n)_n$ には収束する部分列があるので、これを $b_k = a_{n_k}$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) と書き、その極限を B とする： $\lim_{k \rightarrow \infty} b_k = B$ 。

任意の $\epsilon > 0$ を固定する。上の極限が存在することから、大きな K が存在して、

$$k > K \implies |b_k - B| < \frac{\epsilon}{2} \quad (*)$$

が成立する。一方、 $(a_n)_n$ がコーシー列なので、大きな N が存在して

$$n, m > N \implies |a_m - a_n| < \frac{\epsilon}{2} \quad (**)$$

も成立している。

ところが、上の (**) の n として、 $n = n_k$ (かつ $k > K$) となっているような n を取ってみると。この n については $a_n = a_{n_k} = b_k$ であるから、(*) より

$$|a_n - B| < \frac{\epsilon}{2} \quad (***)$$

も成立している。

(**) と (***) を (上の $n = n_k$ に対して用いると)、すべての $m > N$ に対して

$$|a_n - B| \leq |a_n - a_m| + |a_m - B| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が成立することが言えた。これは $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = B$ を ϵ - δ 論法で書いたものにほかならない。つまり、 $(a_n)_n$ は B に収束する。(証明終)

[4] $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ とおいておく。

(1) a_n は n について単調増加であるし、(以下に見るように) 上に有界でもある。よって収束する。

(上に有界の証明) $k! = k(k-1)(k-2) \cdots 2 \cdot 1 \geq k(k-1)$ であるから、

$$a_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + 1 - \frac{1}{n} < 2$$

(2) b_n も (以下に見るように) n について単調増加であるし、上に有界でもある。よって収束する。

(単調性の証明) n 乗を展開すると

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \frac{1}{n^3} + \cdots \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \frac{1}{4!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{n^n} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{3}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) \quad (*) \end{aligned}$$

となることがわかる。右辺の和は、 n を $n+1$ にした時の方が、項の数が多いのみならず、第 k 項同士を比べると、 $n+1$ の方が大きい：

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) < \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n+1}\right)$$

この理由は、積の中身が

$$0 < 1 - \frac{j}{n} < 1 - \frac{j}{n+1}$$

を満たすからである.

というわけで、和の中身が n について単調増加なので、 b_n は n について単調増加である.

(上に有界の証明) 上で示した表式 (*) の右辺は、積の中身が 1 より小さいので、以下の様に押さえられる:

$$b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right) < \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = a_n$$

数列 a_n は上に有界だったので、 b_n も上に有界だ.

(3) a_n と b_n の差がゼロに行くことを言えば良いが、かなり大変である (なのでチャレンジ問題). 以下、 $n \geq 10$ くらいを考える. 問題の差は

$$a_n - b_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left[1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\right] = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \left[1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\right]$$

である. 和の中身は正なので、上から押さえれば良い. 和の中身を綺麗に評価するのは難しいので、以下のよう考える. まず、和を二つに分ける:

$$a_n - b_n = \sum_{k=2}^{\log n} \frac{1}{k!} \left[1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\right] + \sum_{k=\log n+1}^n \frac{1}{k!} \left[1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\right]$$

後ろの和は、大括弧の中身が 1 以下であることを用いて

$$\sum_{k=\log n+1}^n \frac{1}{k!} \left[1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\right] < \sum_{k=\log n+1}^n \frac{1}{k!} < \sum_{k=\log n+1}^n \frac{1}{k(k-1)} = \frac{1}{\log n} - \frac{1}{n} < \frac{1}{\log n}$$

などと評価できる (もっとかつこよく、もっと小さく評価できるが).

前の和については、 $0 < a_j < 1$ のときに成り立つ不等式

$$\prod_{j=1}^n (1 - a_j) \geq 1 - \sum_{j=1}^n a_j$$

を用いて

$$\left[1 - \prod_{j=1}^{k-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)\right] \leq 1 - \left\{1 - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n}\right\} = \sum_{j=1}^{k-1} \frac{j}{n} = \frac{k(k-1)}{2n}$$

を得て、

$$(\text{前の和}) \leq \sum_{k=2}^{\log n} \frac{k(k-1)}{2n} \leq \frac{(\log n)^3}{2n}$$

などと評価する (和の各項は $(\log n)^2$ より小さく、それが高々 $(\log n)$ 個しかないの).

以上まとめて、

$$0 < a_n - b_n \leq \frac{1}{\log n} + \frac{(\log n)^3}{2n}$$

の評価が得られた. この右辺は $n \rightarrow \infty$ でゼロに行くので、 a_n, b_n は同じ極限に収束する.