数学演習IA　No.6　2019.5.22

$\boxed{1}$ 次の連立一次方程式の解を求めよ．

(1) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 7x_4 = 2 \\ 4x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 11x_4 = 14 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + 16x_4 = -4 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1 \end{cases}$ ただし, k は定数

$\boxed{2}$ 次の行列の逆行列があれば求めよ．

(1)
$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2)
$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & w & 1 \\ 0 & w & 1 & 0 \\ w & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\boxed{3}$ (1) 正方行列 A が $A^2 = O$ を満たしているとする．このとき，$(I - A)^{-1} = I + A$ を示せ．

(2) 正方行列 A が冪零行列である (ある自然数 k に対して $A^k = O$ である) とき， $I - A$, $I + A$ はともに正則であることを示せ．

$\boxed{4}$ すべての成分が 1 である n 次正方行列を C とおく ($n > 1$ とする).

(1) C^2 と C の関係を求めよ．

(2) $I - C$ は正則であることを示せ．

以上

略解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 拡大係数行列は 1,3 行の入れ替えで

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 7 & 2 \\ 4 & -3 & 4 & -11 & 14 \\ 1 & 3 & 1 & 16 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 16 & -4 \\ 4 & -3 & 4 & -11 & 14 \\ 2 & 1 & 2 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

1 列目消去などなどで

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 16 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

したがって

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(2) 1,3 行入れ替えて

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & k-1 & -(k-1) & 0 \\ 0 & 1-k & 1-k^2 & 1-k \end{pmatrix} \xrightarrow{k \neq 1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+k & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & k+1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & k+2 & 1 \end{pmatrix}$$

$k = 1$ なら

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$k = -2$ のとき解なし

$k \neq 1, -2$ のとき

$$x = y = z = \frac{1}{k+2}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ (2) $C^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -w \\ 0 & 1 & -w & w^2 \\ 1 & -w & w^2 & -w^3 \end{pmatrix}$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $(I-A)(I+A) = I - A^2 = I$

(2) $(I-A)(I+A+A^2+\cdots+A^{k-1}) = I - A^k = I$. $(I+A)(I-A+A^2-\cdots+(-1)^{k-1}A^{k-1}) = I + A^k = I$.

$\boxed{\mathbf{4}}$ $c_{ij} = 1$ より, $(C^2)_{ij} = n$, つまり $C^2 = nC$. よって, $(I-C)(I-\frac{1}{n-1}C) = I-(1+\frac{1}{n-1})C+\frac{1}{n-1}C^2 = I$