

数学演習 IA—5

- [1] (1) n を自然数, a を任意の実数とする時, $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ であることを示せ.
(2) 多項式は連続関数であることを示せ. ここで $\lim_{x \rightarrow a} \{f(x) + g(x)\} = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ の事実を用いてもよい.
- [2] 以下の命題を証明せよ (ϵ - δ 論法の練習; 命題 2.37) 「2 つの関数 f, g が共に a で連続の時, $f \pm g$ および積 fg も a で連続である」
- [3] 以下の命題を証明せよ (ϵ - δ 論法の練習; 命題 2.36) 「関数 f が a で連続, かつ関数 g が $f(a)$ で連続の時, 合成関数 $g \circ f$ は, a で連続である」
- [4] (「連続でない」ことを示す練習) Dirichlet の関数を

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x \text{ が有理数}) \\ 0 & (x \text{ が無理数}) \end{cases}$$

として定義する. この関数はどのような x においても連続でないことを示せ.

(根性のある人のためのチャレンジ問題) 上の Dirichlet 関数は以下の極限で表せることを示せ:

$$f(x) = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \cos(m! \pi x) \right\}^{2n}$$

略解

[1] リベンジ問題のつもりでしたが...

(1) 因数分解すると $x^n - a^n = (x - a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1})$ であり、最初に $(x - a)$ が出ているので良い感じだ。ただ、 x の範囲を制限しないと大変なので、 δ は 1 以下にとることにしよう。そうすると $|x - a| < \delta$ なら $a - 1 < x < a + 1$ が成り立つので、これをさらに

$$|x| < |a| + 1$$

とする。そして、そこら中で絶対値をとってやると

$$\begin{aligned} & |x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \cdots + a^{n-2}x + a^{n-1}| \\ & \leq |x|^{n-1} + |a||x|^{n-2} + |a|^2|x|^{n-3} + \cdots + |a|^{n-2}|x| + |a|^{n-1} \\ & \leq (1 + |a|)^{n-1} + |a|(1 + |a|)^{n-2} + |a|^2(1 + |a|)^{n-3} + \cdots + |a|^{n-2}(1 + |a|) + |a|^{n-1} \\ & = (1 + 2|a|)^{n-1} \end{aligned}$$

となる。つまり、 $\delta \leq 1$ なら、 $|x - a| < \delta$ では

$$|x^n - a^n| < (1 + 2|a|)^{n-1} |x - a|$$

なのだ。よって、

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\epsilon}{1 + 2|a|}\right\}$$

ととってやれば、任意の $\epsilon > 0$ に対してこの δ で

$$|x - a| < \delta \implies |x^n - a^n| < \epsilon$$

が成り立つ。ので、証明された。(極限の定義では $x = a$ のところは排除しているが、上では $x = a$ を入れても不等式が成立しているので、排除せずに書いた.)

注意： 何人かの人々が、答えを先取りした解答を書いていました。以下、簡単のために、 $a, x, a^n - \epsilon$ などが正の場合のみ書きます。(解答例) $|x^n - a^n| < \epsilon$ というのは $a^n - \epsilon < x^n < a^n + \epsilon$ と同じで (n が奇数なら) これは

$$(a^n - \epsilon)^{1/n} < x < (a^n + \epsilon)^{1/n}$$

とも同値だ。これを満たすように δ を取れば良い。(解答例終わり)

しかし、関数 $(\cdot)^{1/n}$ がきちんと定義できるのか、また上を満たす x はどんな範囲の数なのか、などはまさに今示したい $\lim_{x \rightarrow a} x^n = a^n$ を使わないと基礎付けできません。なので、このような議論は循環論法になっています。

(2) 一般の多項式は $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ の形をしている (a_j は係数)。なので、「使って良い」という式を何回も使って

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow b} f(x) &= \lim_{x \rightarrow b} (a_n x^n) + \lim_{x \rightarrow b} (a_{n-1} x^{n-1}) + \lim_{x \rightarrow b} (a_{n-2} x^{n-2}) + \cdots + \lim_{x \rightarrow b} (a_1 x) + a_0 \\ &= a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0 = f(b) \end{aligned}$$

となって、連続だ。

[2] f, g が連続の定義を書くと、任意の $\epsilon > 0$ に対して、上手く $\delta_f(\epsilon), \delta_g(\epsilon)$ を見つけて

$$|x - a| < \delta_f(\epsilon) \implies |f(x) - f(a)| < \epsilon$$

$$|x - a| < \delta_g(\epsilon) \implies |g(x) - g(a)| < \epsilon$$

が成り立つようにできる, ということだった.

そこで主張を証明する. まず, $\epsilon > 0$ に対して, 上より, 上手く $\delta_f(\epsilon/2), \delta_g(\epsilon/2)$ を見つけて

$$|x - a| < \delta_f(\epsilon/2) \implies |f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

$$|x - a| < \delta_g(\epsilon/2) \implies |g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2}$$

とできることに注意する.

すると, この ϵ に対して $\delta(\epsilon) = \min \delta_f(\epsilon/2), \delta_g(\epsilon/2)$ と定義すれば, $|x - a| < \delta(\epsilon)$ では, $|x - a| < \delta_f(\epsilon/2)$ も $|x - a| < \delta_g(\epsilon/2)$ も成り立つので, 上の結論部分が成り立つ. そこで三角不等式を用いて, この場合,

$$|f(x) + g(x) - \{f(a) + g(a)\}| \leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

が成り立つことが示せる. これで $f + g$ の連続性が示せた.

差についても

$$|\{f(x) - g(x)\} - \{f(a) - g(a)\}| = |\{f(x) - f(a)\} + \{g(a) - g(x)\}| \leq |f(x) - f(a)| + |g(a) - g(x)|$$

とすれば同じだ.

積も同様であるが, すこし工夫が必要.

$$f(x)g(x) - f(a)g(a) = f(x)\{g(x) - g(a)\} + g(a)\{f(x) - f(a)\}$$

を用いて, 以下の不等式を獲る:

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| \leq |f(x)| \times |g(x) - g(a)| + |g(a)| \times |f(x) - f(a)|$$

ここで $|f(x)|$ がどのくらい大きいのが気になるのだが, $f(x)$ の連続性を用いて,

$$|x - a| \text{ が十分に小さく } \delta_0 \text{ 以下なら } |f(x) - f(a)| < 1$$

とできることに注意する. このような小さい δ のみを考えるなら, $|x - a| < \delta$ では

$$|f(x) - f(a)| < 1 \quad \text{つまり} \quad |f(x)| < |f(a)| + 1$$

と思って良い.

なので, この場合,

$$|f(x)g(x) - f(a)g(a)| \leq (|f(a)| + 1) |g(x) - g(a)| + |g(a)| |f(x) - f(a)|$$

が成り立つ. 後は, δ_f, δ_g を十分小さくにとって,

$$|x - a| < \delta_f \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(a)| < \frac{\epsilon}{|g(a)| + 1},$$

$$|x - a| < \delta_g \quad \text{ならば} \quad |g(x) - g(a)| < \frac{\epsilon}{|f(a)| + 1}$$

となるようにして, $\delta = \min \delta_0, \delta_f, \delta_g$ と取れば良い.

[3] 記号がややこしくなるので, $A = f(a)$ と書く.

g の連続性の仮定から, $\epsilon > 0$ に対して, 上手く δ_g を見つけて

$$|y - A| < \delta_g \quad \text{ならば} \quad |g(y) - g(A)| < \epsilon$$

とできる. さらに, この δ_g に対しては, f の連続性の仮定から

$$|x - a| < \delta_f \quad \text{ならば} \quad |f(x) - f(a)| < \delta_g$$

となるような δ_f の存在が言える.

つまり, $\delta = \delta_f$ と取れば, $|x - a| < \delta$ の時, $|f(x) - f(a)| < \delta_g$ かつ $|g(y) - g(A)| < \epsilon$ が成り立つ.

ここで大事なのは, ϵ に応じてまずは δ_g を決めて, 今度はこの δ_g に応じて δ_f を決める, という順序である.

[4] a が有理数の時, もし f が連続なら $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = 1$ である必要がある. しかしこれは, 任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta > 0$ を見つけて,

$$0 < |x - a| < \delta \quad \text{ならば} \quad |f(x) - 1| < \epsilon$$

となることを意味する. しかし, 有理数 a にいくらでも近い無理数 x が存在するため, そのような x では $|f(x) - 1| = 1 > \epsilon$ となってしまうて, 無理.

a が無理数の時も同様.