数学演習IA　No.4　2019.5.8

$\boxed{1}$ $i > j$ なら $a_{i,j} = 0$ であるような正方行列を上三角行列と呼ぶ.

(1) n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$, $B = (b_{i,j})$ が上三角行列であれば，AB も上三角行列であることを示せ．また，AB の対角成分を A, B の成分を用いて表わせ.

(2) $n \times n$ 正方行列 A に対して，$XA = I_n$ となるような $n \times n$ 正方行列 X を A の逆行列と呼ぶ．上三角行列 $A = (a_{i,j})$ が逆行列を持つ必要十分条件は $a_{i,i} \neq 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ であることを示せ.

(限られた時間であるので，$n = 3$ のときに示してみよ)

$\boxed{2}$ (1) n 次正方行列 A, B が可換である ($AB = BA$ を満たす) とき

$$(A+B)^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} A^{m-j} B^j$$

を満たすことを示せ．ただし，正方行列の 0 乗は単位行列と約束する.

(2) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ とおく．C^m を求めよ（$m = 1, 2, 3$ で計算してみよ).

(3) $M = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ と定める．(1) (2) を使って M^m を求めよ.

$\boxed{3}$ (1) n 次正方行列 $A = (a_{i,j})$ の対角成分の和をトレースと呼び，$\mathrm{Tr}\, A$ とかく.

$$\mathrm{Tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$$

n 次正方行列 A, B に対し，　$\mathrm{Tr}\,(AB) = \mathrm{Tr}\,(BA)$　であることを示せ.

(2) n 次正方行列 A, B で $AB - BA = I_n$ を満たすものは存在しないことを示せ.

以上

略解

$\boxed{\mathbf{1}}$ (1) 条件より $i > j$ なら $a_{ij} = b_{ij} = 0$ だから，$(AB)_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$ において，寄与は $i \leq k \leq j$ のところ．$i > j$ であれば明らかにゼロ．$i = j$ なら $i = k = j$ のみで，$(AB)_{ii} = a_{ii}b_{ii}$.

(2) A が上三角, $XA = I_n$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{j} x_{i,k}a_{k,j} = \delta_{i,j}$. $j = 1$ のとき，$x_{i,1}a_{1,1} = \delta_{i,1}$ より $a_{1,1} \neq 0$ で $x_{i,1} = \frac{1}{a_{1,1}}\delta_{i,1}$. 次に $j = 2$ のとき，$\delta_{i,2} = x_{i,1}a_{1,2} + x_{i,2}a_{2,2} = \delta_{i,1}\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}} + x_{i,2}a_{2,2}$. つまり，$a_{2,2} \neq 0$ で $x_{i,2} = \frac{1}{a_{22}}\delta_{i,2} - \frac{a_{12}}{a_{22}a_{11}}\delta_{i,1}$. 以下，くりかえし

$\boxed{\mathbf{2}}$ (1) 可換だから No.2 の計算と同じ

(2) $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C^n = O$ $(n \geq 3)$.

(3) $M = aI + bC$ で，(1) より

$$M^m = \sum_{j=0}^{m} \binom{m}{j} a^{m-j}(bC)^j = a^m + a^{m-1}bmC + a^{m-2}b^2\frac{m(m-1)}{2}C^2$$

$\boxed{\mathbf{3}}$ (1) $\mathrm{Tr}(AB) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \mathrm{Tr}(BA)$

(2) $\mathrm{Tr}(AB - BA) = \mathrm{Tr}(AB) - \mathrm{Tr}(BA) = 0 \neq n = \mathrm{Tr}\, I_n$