

数学演習 IA—3

- [1] 以下の関数の極限は高校の知識で簡単に予想できる．以下の関数が「実際にその予想された値に収束すること」を ϵ - δ 論法を用いて示せ．

その際、「 $\epsilon > 0$ に対して δ をどのくらい小さく取る必要があるか」も調べよ．（ただし、「最小の」 δ を示す必要はない．「 ϵ がゼロに近いときに大体このくらいの δ なら良い」で十分である．）

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} x^{1/5}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 2} (x^4 + 2)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{|x|} + x^2 + 2}$$

なお、上の (2)(3) は、「 x^4, x^2 などの極限を別々に求めてから $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ などを用いる」方が簡単にできる．しかし、この問題では、 ϵ - δ 論法の練習だと思って、直接、極限の定義を用いて示してほしい．

- [2] 数列 $1/\sqrt{n}$ の極限について、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 1$ だと思って ϵ - N 論法を行うと、どこかで破綻するはずである．実際にどこで破綻するのか、やってみよ．（答えの書き方は何通りもありうる．自由に書けば良い．）

- [3] $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在する場合、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ は一意に定まる（極限は一つしかない）ことを、 ϵ - N 論法を用いて証明（説明）せよ．

- [4] 「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = |\alpha|$ 」を示せ．（問題 2.13）

- [5] （数列に関するチャレンジ問題）教科書の例題 2.6 は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \alpha$$

と主張している．そこで右辺の「 a_1 から a_n の平均」を、より一般の加重平均にして、同様の結果が成り立つかどうかを考えよう．すなわち、 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ を正の数列として、

$$b_n := \left(\sum_{j=1}^n \rho_j a_j \right) / \left(\sum_{j=1}^n \rho_j \right)$$

を考える．「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ ならば必ず $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha$ となる」ためには、 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \dots$ がどのような条件を満たしていれば良いか？（例題 2.6 は $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \dots = 1$ に相当している．）

解答例

[1]

(1) (素っ気ない解答) 極限はゼロと予測.

任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta(\epsilon) = \epsilon^5$ と取ると, $|x| < \delta(\epsilon)$ のときに,

$$|x^{1/5} - 0| = |x|^{1/5} < (\delta(\epsilon))^{1/5} = \epsilon$$

が成り立つ. これは $\lim_{x \rightarrow 0} x^{1/5} = 0$ を ϵ - δ で書いたものに他ならないので極限はゼロ.

($\delta(\epsilon)$ がどのくらいか当たりをつける部分を書く)と以下のようである)

$$|x^{1/5} - 0| = |x|^{1/5} < \epsilon \quad \text{を解いて,} \quad |x| < \epsilon^5 \quad \text{を得る.}$$

[1] の (2)(3) などに共通する注意: 以下の (2),(3) では, x が色々に残っていて, やりにくい面が大きい. この点をどうしたら簡単になるか, をまず以下の例題をもとに説明する.

(例題) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 + 2) = 3$ を示せ.

(試行錯誤と δ の選び方) ϵ - δ によって示すべきは, 「どんなに小さな正の ϵ に対してもうまく $\delta > 0$ を見つけて, 『 $0 < |x - 1| < \delta$ ならば $|(x^3 + 2) - 3| < \epsilon$ 』を成立させられる」ということである.

目的の式の左辺は

$$|(x^3 + 2) - 3| = |x^3 - 1| = |x - 1| \times |x^2 + x + 1|$$

と因数分解できて, $|x - 1|$ が出ている. $|x - 1|$ は $x \rightarrow 1$ でゼロに行くし, 後ろの因子 $|x^2 + x + 1|$ も大雑把に言えば $x = 1$ での値 3 くらいであろう. したがって, 大雑把には $|(x^3 + 2) - 3| \approx 3|x - 1|$ くらいであり, $\delta = \epsilon/3$ くらいにとればうまくいきそう.

しかし本当のところは, $|x^2 + x + 1|$ は x に依存して値が変わり, 特に 3 より大きくなりうるから, もう少し厳密に議論する必要がある.

そのために, とりあえず $|x - 1| < \delta$, つまり $1 - \delta < x < 1 + \delta$ として, $|x^2 + x + 1|$ がどのくらいの大きさになりそうかを考えてみる (この解答例の最後「もうちょっとだけ簡単な方法」に, もう少し効率の良い進み方を示す). この x の範囲では

$$(1 - \delta)^2 + (1 - \delta) + 1 < x^2 + x + 1 < (1 + \delta)^2 + (1 + \delta) + 1$$

であるので,

$$|x^2 + x + 1| < (1 + \delta)^2 + (1 + \delta) + 1 = 3 + 3\delta + \delta^2$$

とわかる. 結果として, $|x - 1| < \delta$ の場合には, 押さえたい量が

$$|(x^3 + 2) - 3| = |x - 1| \times |x^2 + x + 1| < \delta \times (3 + 3\delta + \delta^2)$$

となっていることがわかった.

さて, これが ϵ より小さくなるような δ を求めたいのだが, これは δ の 3 次不等式になって, 簡単には解けない. しかし, このようなギリギリの δ の範囲を求める必要は全くない. δ は (正の範囲なら) 十分に小さく取れば良いので, 計算しやすように「最初から $\delta < 1/10$ にとる」ことにしよう. こうすれば, 上の不等式は (最初の δ は大事だから残し, 後ろの $(3 + 3\delta + \delta^2)$ を $\delta < 1/10$ を用いて評価する)

$$|(x^3 + 2) - 3| < \delta \times (3 + 3\delta + \delta^2) < \frac{332}{100}\delta$$

となる。この形になれば、これが $< \epsilon$ となるような δ を求めるのは簡単だ。すなわち、

$$\delta = \frac{100}{332}\epsilon$$

と取ってやれば良いことになる。

(以上をまとめてそっけない解答例) δ を最初から $1/10$ 以下に制限するつもりで (上の計算を参照して), $\epsilon > 0$ に対して

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{10}, \frac{100}{332}\epsilon\right\}$$

ととってみる。すると、 $|x-1| < \delta$ の時に

$$|(x^3+2)-3| = |x-1| \times |x^2+x+1| < \delta \times (3+3\delta+\delta^2) < \delta \times \frac{332}{100} = \epsilon$$

が成り立つことがわかる。これはつまり、 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3+2) = 3$ を ϵ - δ で書いたものに他ならない。(証明終わり)

なお、上では「本来は δ の小さいところを見たい」感じを出すために、 δ を $1/10$ より小さいとした。しかし、計算を簡単にするために、 δ を 1 以下などとしてもよい。仮に δ を 1 以下とすると、 $3+3\delta+\delta^2 \leq 7$ となるから、 $\delta = \epsilon/7$ ととれば十分となる。

(もうちょっとだけ簡単な方法) 上では、 δ を後の方まで残す形で解答したが、式が複雑になって間違いやすい傾向がある。しかし最終的に使ったのは、要するに「最初から $\delta < 1/10$ にするから、 x の範囲は $9/10$ から $11/10$ になる」ことだった。なので、早い段階で x の範囲を δ を使わずに書いてみた方が簡単だ。 $\delta = 1/10$ だと数値的にややこしいので $\delta = 1$ で書けば以下ようになる：

δ を最初から 1 以下に制限するつもりで (上の計算を参照して), $\epsilon > 0$ に対して

$$\delta = \min\left\{1, \frac{1}{7}\epsilon\right\}$$

ととってみる。すると、 $|x-1| < \delta$ は $|x-1| < 1$ (つまり $0 < x < 2$) を保証してくれるので、

$$|(x^3+2)-3| = |x-1| \times |x^2+x+1| < \delta \times (2^2+2+1) < \delta \times 7 = \epsilon$$

が成り立つことがわかる。これはつまり、 $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3+2) = 3$ を ϵ - δ で書いたものに他ならない。

[1] (2) 上の例題の解き方の精神で解く。

(素っ気ない解答) 極限は 18 と予測。

任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta(\epsilon) = \min\{1, \epsilon/65\}$ と取ると、 $|x-2| < \delta(\epsilon)$ のときに、

$$|(x^4+2)-18| = |x-2| \times |(x+2)(x^2+4)| \leq 65|x-2| < 65\delta(\epsilon) = \epsilon$$

が成り立つ。これは $\lim_{x \rightarrow 2} (x^4+2) = 18$ を ϵ - δ で書いたものに他ならないので極限は 18 。

($\delta(\epsilon)$ がどのくらいか当たりをつけるを書く) と以下のようである)

$$|(x^4+2)-18| = |x^4-16| = |(x-2)(x+2)(x^2+4)| = |x-2| \times |(x+2)(x^2+4)| < \epsilon$$

が $|x-2| < \delta(\epsilon)$ なら常に成り立つような $\delta(\epsilon)$ を求めたい。 $\delta(\epsilon)$ を小さめにとることにして、最初から $\delta(\epsilon) \leq 1$ の場合だけを考えよう。すると、 $1 < x < 3$ なので

$$|(x+2)(x^2+4)| \leq 5 \times 13 = 65$$

が成り立つ。よって、 $|x-2|$ を十分小さく、

$$|x-2| \times 65 < \epsilon$$

となるようにとれば良く, $\delta = \epsilon/65$ なら十分である.

[1] (3) (素っ気ない解答) 極限は $1/2$ と予測.

任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta(\epsilon) = \min\{1, 4\epsilon^2\}$ と取ると, $|x| < \delta(\epsilon)$ のときに,

$$\left| \frac{1}{\sqrt{|x|+x^2+2}} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{|x|+x^2}}{2\{\sqrt{|x|+x^2+2}\}} \right| \leq \frac{\sqrt{|x|}}{2} < \epsilon$$

が成り立つ. これは $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{|x|+x^2+2}} = \frac{1}{2}$ を ϵ - δ で書いたものに他ならないので極限は $1/2$.

($\delta(\epsilon)$ がどのくらいか当たりをつけるを書く)と以下のようなものである)

$$\left| \frac{1}{\sqrt{|x|+x^2+2}} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{\sqrt{|x|+x^2}}{2\{\sqrt{|x|+x^2+2}\}} \right| \leq \frac{\sqrt{|x|+x^2}}{4}$$

であるので, 「 $|x| < \delta(\epsilon)$ なら上の右辺が常に ϵ より小さくなる」ような $\delta(\epsilon)$ を求めたい. $\delta(\epsilon)$ を小さめにとることにして, 最初から $\delta(\epsilon) \leq 1$ の場合だけを考えよう. すると, $|x| < 1$ なので, $x^2 < \sqrt{|x|}$ が成り立つ. 従って, 上の右辺をさらに上から

$$\frac{\sqrt{|x|+x^2}}{4} \leq \frac{\sqrt{|x|} + \sqrt{|x|}}{4} = \frac{\sqrt{|x|}}{2}$$

と抑え込むことができる. なので, この右辺を ϵ より小さくすれば良いが, これは

$$\sqrt{|x|} < 2\epsilon \quad \text{つまり} \quad |x| < 4\epsilon^2$$

なら十分だ.

補足について 「補足」において 「 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ などを用いる」というのは, これに相当する函数の極限の式, つまり 「 $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ などを用いる」ということです. この考えを用いると, 以下のようになります. ((2) はあんまり変わりませんが, (3) はかなり簡単になります.)

(2) は x^4 と 2 の和の極限なので, x^4 , 2 の極限をそれぞれ別々に求めて (もちろん答えは 16 と 2), その和を求めれば良い.

同様に (3) の分母は $\sqrt{|x|}$ と x と 2 の和なので, これらの極限を別々に求めて和を作ると, 分母の極限は $0 + 0 + 2 = 2$ とわかる. そこで, 今度は (分母の極限がゼロでない時に成り立つ)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$$

を用いると, (3) の極限は $1/2$ とわかる.

[2] 以下は一例である.

$$\left| \frac{1}{\sqrt{n}} - 1 \right| = 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

なので, これが非常に小さな ϵ よりも小さくなるためには, つまり

$$1 - \frac{1}{\sqrt{n}} < \epsilon$$

となるためには,

$$1 - \epsilon < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{つまり} \quad n < (1 - \epsilon)^{-2}$$

が必要である。しかし、 $\epsilon > 0$ が非常に小さい場合、この右辺はほとんど 1 であり、これを満たす n は 1 以外にない。つまり ϵ - N 論法は「 $n > N$ のすべての n に対して」のところが無理で破綻する。

[3] (問題文に不備がありました。「 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ が存在するなら、その極限は一意である」ことを示してほしい、というのがもんだいです。)

α, β ($\alpha \neq \beta$) という二つの極限があったとして矛盾を導こう。

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とは、どんなに小さい $\epsilon > 0$ に対しても $N_1(\epsilon)$ を見つけて、「 $n > N_1(\epsilon)$ ならば $|a_n - \alpha| < \epsilon$ 」とできること。

同様に、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$ とは、どんなに小さい $\epsilon > 0$ に対しても $N_2(\epsilon)$ を見つけて、「 $n > N_2(\epsilon)$ ならば $|a_n - \beta| < \epsilon$ 」とできること。

ところが、 $\epsilon = |\alpha - \beta|/3$ と決め、さらに $n > N_1$ かつ $n > N_2$ なる n を考えると、上の二つから

$$|a_n - \alpha| < \epsilon \quad \text{かつ} \quad |a_n - \beta| < \epsilon$$

が成り立つはずである。しかしこれは両立できない；なぜなら、もし両立するなら

$$|\alpha - \beta| = |(a_n - \alpha) - (a_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |a_n - \beta| < 2\epsilon = \frac{2}{3}|\alpha - \beta|$$

となるが、これは $\alpha = \beta$ の時以外は無理である。

[4] 最初に以下の不等式 (三角不等式の変形) を証明する：任意の実数 a, b に対して

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \quad (*)$$

(証明その 1) a, b の符号と大小で場合分けする。

(証明その 2) 三角不等式から

$$|a| = |a - b + b| \leq |a - b| + |b| \quad \text{および} \quad |b| = |b - a + a| \leq |b - a| + |a|$$

が成り立つので、これらを移項すると

$$|a| - |b| \leq |a - b| \quad \text{および} \quad |b| - |a| \leq |b - a|$$

を得る。(証明 2 終わり)

さて、 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とは、どんなに小さい $\epsilon > 0$ に対しても $N_1(\epsilon)$ を見つけて、「 $n > N_1(\epsilon)$ ならば $|a_n - \alpha| < \epsilon$ 」とできることである。

ところが、最後の不等式は、上の (*) により、

$$||a_n| - |\alpha|| \leq |a_n - \alpha| < \epsilon$$

を意味する。つまり、どんなに小さい $\epsilon > 0$ に対しても上と同じ $N_1(\epsilon)$ を見つけて、「 $n > N_1(\epsilon)$ ならば $||a_n| - |\alpha|| < \epsilon$ 」とできることがわかった。これは示したかった式そのものである。