

数学演習 IA—1

- [1] 以下の数列の極限は高校の知識で簡単に予想できる．以下の数列が「実際にその予想された値に収束すること」を ϵ - N 論法を用いて示せ．

その際、「 $\epsilon > 0$ に対して N をどのくらい大きく取る必要があるか」も調べよ．（ただし、「最小の」 N を示す必要はない．「 ϵ がゼロに近いときに大体このくらいの N なら良い」で十分である．）

(1) $n \geq 1$ に対して, $a_n = \frac{1}{n}$

(2) $n \geq 1$ に対して, $b_n = \frac{2n^2}{n^2 + 2}$

(3) $n \geq 1$ に対して, $c_n = \frac{\sqrt{n} - 4}{\sqrt{n}}$

(4) $n \geq 1$ に対して, $d_n = \frac{1}{\log n + 3}$

- [2] (1) $n \in \mathbf{N}$, $k = 0, 1, \dots, n$ に対して, 二項係数を

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

で定める． $k = 1, \dots, n$ に対して,

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

が成り立つことを示せ．単なる数式による証明以外に, 両辺が表す場合の数についての解釈を用いた証明（説明）があると更に良い．（野村, 微積分学講義 p.10 (1.3)）

- (2) 定数 a, b に対して

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

が成り立つことを帰納法（と上の等式）を用いて示せ．（p.9 (1.2)）

解答例

[1] いうまでもなく、最初に「 $N(\epsilon)$ がどのくらいか当たりをつける」部分があっても良い.

(1) (素っ気ない解答) 極限はゼロと予測.

任意の $\epsilon > 0$ に対して $N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}$ と取ると, $n > N(\epsilon)$ のときに,

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\epsilon)} = \epsilon$$

が成り立つ. これは $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を ϵ - N で書いたものに他ならないので極限はゼロ.

($N(\epsilon)$ がどのくらいか当たりをつける部分を書く)と以下のようである)

$$|a_n - 0| = \frac{1}{n} < \epsilon \quad \text{を解いて,} \quad n > \frac{1}{\epsilon} \quad \text{を得る.}$$

(2) (素っ気ない解答) 極限は2と予測.

任意の $\epsilon > 0$ に対して $N(\epsilon) = \sqrt{\frac{4}{\epsilon}}$ と取ると, $n > N(\epsilon)$ のときに,

$$|b_n - 2| = \frac{4}{n^2 + 2} < \frac{4}{n^2} < \frac{4}{N(\epsilon)^2} = \epsilon$$

が成り立つ. これは $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 2$ を ϵ - N で書いたものに他ならないので極限は2.

($N(\epsilon)$ がどのくらいか当たりをつける部分を書く)と以下のようである)

$$|b_n - 2| = \frac{4}{n^2 + 2} < \epsilon \quad \text{を解いて,} \quad n^2 > \frac{4}{\epsilon} - 2$$

を得る. 上の不等式は, $n > \sqrt{4/\epsilon}$ なら十分に満たされる.

(3) (素っ気ない解答) 極限は1と予測.

任意の $\epsilon > 0$ に対して $N(\epsilon) = \frac{16}{\epsilon^2}$ と取ると, $n > N(\epsilon)$ のときに,

$$|c_n - 1| = \frac{4}{\sqrt{n}} < \frac{4}{\sqrt{N(\epsilon)}} = \epsilon$$

が成り立つ. これは $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 1$ を ϵ - N で書いたものに他ならないので極限は1.

($N(\epsilon)$ がどのくらいか当たりをつける部分を書く)と以下のようである)

$$|c_n - 1| = \frac{4}{\sqrt{n}} < \epsilon \quad \text{を解いて,} \quad \sqrt{n} > \frac{4}{\epsilon}$$

を得る. 上の不等式は, $n > (4/\epsilon)^2$ なら十分に満たされる.

(4) (素っ気ない解答) 極限は0と予測.

任意の $\epsilon > 0$ に対して $N(\epsilon) = \exp(1/\epsilon)$ と取ると, $n > N(\epsilon)$ のときに,

$$|d_n - 0| = \frac{1}{\log n + 3} < \frac{1}{\log n} < \frac{1}{\log N(\epsilon)} = \epsilon$$

が成り立つ. これは $\lim_{n \rightarrow \infty} d_n = 0$ を ϵ - N で書いたものに他ならないので極限はゼロ.

($N(\epsilon)$ がどのくらいか当たりをつける部分を書く)と以下のようである)

$$|d_n - 0| = \frac{1}{\log n + 3} < \frac{1}{\log n} < \epsilon \quad \text{の右側を解いて,} \quad \log n > \frac{1}{\epsilon}$$

を得る. 上の不等式は, $n > \exp(1/\epsilon)$ なら十分に満たされる.

[2] (1) 数式による証明は以下の通り：

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} \\ &= \frac{n!}{(n-k+1)!k!} (n-k+1+k) = \frac{(n+1)!}{(n+1-k)!k!} = \binom{n+1}{k}\end{aligned}$$

場合の数を用いた証明は、例えば以下のようになる。

$(n+1)$ 個の玉を用意し、1 から $(n+1)$ まで番号を振って名前を付けておく。

右辺は、この $(n+1)$ 個の玉から、 k 個を取り出す場合の数である。

一方、左辺を以下のように解釈する。この「 $(n+1)$ 個の球から k 個取り出す」やり方は、必ず、以下のどちらかになる。

- $(n+1)$ 番目の玉は用いず、「玉 1 から玉 n の中から」 k 個取り出す。
- $(n+1)$ 番目の玉は必ず用いて、残りの $(k-1)$ 個を「玉 1 から玉 n の中から」取り出す。

最初のやり方の数は $\binom{n}{k}$ であるし、2 番目のやり方の数は $\binom{n}{k-1}$ である。この 2 つを足したものが左辺なので、両辺は等しい。

(2) $n=1$ のときは

$$a+b = \binom{1}{0}a + \binom{1}{1}b$$

で成立。 n のときまで

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

が成り立つとすると、 $(n+1)$ のときに

$$\begin{aligned}(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n (a+b) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \right) (a+b) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{h=1}^{n+1} \binom{n}{h-1} a^{n+1-h} b^h \\ &= a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k-1} a^{n+1-k} b^k + b^{n+1} \\ &= \binom{n+1}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^{n+1-k} b^k\end{aligned}$$

となり、 $n+1$ の場合が証明された。ただし、3 行目から 4 行目の後半の変形で $h=k+1$ と置き、4 行目から 5 行目の後半の変形で $k=h$ と置いた。