2018.04.13.

微分積分学・同演習 A （S1-19 クラス，工学部物質科学工学科向け）

担当：原　隆（数理学研究院）：伊都キャンパス W1 号館 C-601 号室,

phone: 092-802-4441,　e-mail: hara@math.kyushu-u.ac.jp

Office hours: 講義終了後に質問を受け付けます（そのうちに，正式な office hours の時間を決めます）．メイルでの質問も歓迎.

概要：

この講義は後期の「微分積分学 B」とあわせて完成し，一年を通して『本格的な大学の微積分』を学ぶことを目的とする．前期では特に,「極限とは何か（その厳密な定義）」,「1 変数函数の微分とその応用」および（「1 変数函数の積分」または「偏微分」）などを扱う．後期では（「1 変数函数の積分」または「偏微分」),「多変数函数の積分（重積分)」および（時間があれば）「級数論」を扱う予定．**（注意）：積分と偏微分の順序をどうするかは，4/13 時点で未定．どちらかを前期に，どちらかを後期に振り分ける．どちらにするかは近日中に決定するが，以下の内容が大幅に変わることもあるので，注意されたい.**

前期でキーとなる概念：極限,（ϵ-δ 論法とコーシー列），微分，テイラー展開,（偏微分，または，積分）

後期でキーとなる概念：（偏微分，または，積分），重積分，級数,（微分方程式）

特に講義を通して身につけて欲しいこと：

この講義で学んでほしい「能力」は以下の２つである.

- （最低限）微分や積分のいろいろな概念を習得し，実際に応用して使えるようになること
- （可能ならば）単にやり方を覚えるのではなく，自分の議論に自信が持てるようになること.

高校までの数学では主に最初の面に力点が置かれていた．ところが，昨今の中学，高校でのカリキュラムの制約上，その最初の面ですら，練習不足と思われる人が増えている．また,「この問題はこのように解けば良い」ことは知っているけども,「その方法がなぜ正しいのか」が説明できない人（「本当にその方法で良いのか，自信ある？」と問いかけると固まってしまう人）も多いようだ．一方，どの学問においても，**自分で自信を持って議論を組み立てる能力**が不可欠となる．そこで，この講義ではこれまでの練習不足を補いつつ，自信を持って議論を組み立てられる人を養成することを目指す.

内容予定：

（重要な注意：「偏微分」と「1 変数函数の積分」のどちらを先にやるか，まだ決め切っていません．近日中に確定します.）

0. 物理，工学などの講義のために「偏微分」の記号の説明（初回に定義のみ；偏微分は後期にちゃんとやります.）

I. 極限，実数の連続性，関数の連続性（4 回程度；かなり簡単に）

1. 極限の厳密な定義：**ϵ-N 論法**，**ϵ-δ 論法**（教科書 1.1 節）.
2. 実数の連続性，有界単調列の収束，**コーシー列**（教科書 1.1 節+6.1 節最初）
3. 連続関数の定義，最大値最小値の定理，**中間値の定理**（教科書 1.2 節）

II. 1 変数函数の微分（4 回程度）

1. 微分の厳密な定義（定義だけ）と**平均値の定理**（教科書 2.1 節）
2. テイラーの定理と**テイラー展開**（教科書 2.2 節）⟵ 案外，引っかかるかもしれないから要注意
3. 関数の増減と凹凸（教科書 2.3 節）

この辺りで中間試験

III. 「1 変数函数の積分」または「偏微分」（どちらをやるか，近日中に決めます）.

この辺りで期末試験の予定

教科書：

」江口，久保，熊原，小泉共著「基礎微分積分学」（学術図書出版社）．基本的なところに絞った良い本です．**ただし，教科書の材料の順序を変えて,「偏微分」の前に「1 変数函数の積分」を行う可能性があります．前期の後半，どちらをやるかには注意してください.**

参考書： 上の教科書が合わないという人には，以下の本をお薦めします．また，この講義専用の講義ノートを別途つくって，僕の web page に上げます．

- 野村隆昭「微分積分学講義」（共立出版）．九大の数学科の先生が書いた本．進んだ面白い話題も入っているが，語り口は柔らかく，読みやすい．
- 斎藤正彦「微分積分学」（東京図書）．いまの時代に合った，良い本です．
- 高木貞治「解析概論」（岩波）．今の学生さんには難しすぎる，との意見もあるが，不朽の名著だ．超お奨め．
- 小平邦彦「解析入門 I, II」（岩波）．上の解析概論を少しとっつきやすくした感じ．激しくお奨め．
- 杉浦光夫「解析入門 1, 2」（東大出版会）．かなり分厚いけど，その分，記述は丁寧．お奨め．
- 僕の友達の田崎晴明さんの書きかけの本「数学：物理を学び楽しむために」．激しく超お奨め !!
  彼の web page (`http://www.gakushuin.ac.jp/~881791/mathbook/`) からダウンロードできる．

評価方法： 中間試験（＋レポート）と期末試験の成績を総合して評価する．そのルールは以下の通り：

- 最終成績は一旦，１００点満点に換算してから，この大学の様式に従ってつける．
- その１００点満点（最終素点）は，以下のように計算する．
  - まず,「中間試験（＋レポート）の点」「期末試験の点」をそれぞれ 100 点満点で出す．
  - 次にこの２つを以下の式で「平均」し，一応の総合点を出す：

$$(\text{総合点 } A) = 0.50 \times (\text{中間（＋レポート）の点}) + 0.50 \times (\text{期末の点})$$
$$(\text{総合点 } B) = 0.10 \times (\text{中間（＋レポート）の点}) + 0.90 \times (\text{期末の点})$$

  - ただし，上の重みを若干変更する可能性はある（総合点 A で，中間と期末の比を 4 : 6 にするなど）．
  - 最終素点は

$$(\text{最終素点}) = \max\{\,(\text{総合点 } A), (\text{総合点 } B)\,\}$$

    とする．つまり,（総合点 A）と（総合点 B）を比べて，良い方をとるのだ．
- 上の「最終素点」に，必要ならば全体に少し修正を加えたものをつくり，最終成績を出す.（例外：以下の但し書きを参照）
- レポートの点は原則として，総合点 A, B には加えない．ただし，上の計算では合格基準に少し足りない人（百点満点で 10 点不足が限度）を助けるかどうかに使用する．また，レポートがずば抜けて良い場合，この事実は最終成績に反映される事もある．

（A をとるための重要な但し書き） 期末試験ではあまり冒険をする訳にはいかず,（A と B の区別をつけるような）極端に難しい問題は出題しにくい．そのため，中間試験にも A, B の峻別を行う機能をある程度持たせて，**中間・期末ともに成績優秀**な人にのみ，A をあたえるようにする可能性がある —— 特に，期末を簡単にしすぎた場合はこうなる．この意味で，上の（最終素点）の式は完全には正しくなく，A をとるためには期末だけでの一発逆転は無理かも知れない．A を狙って頑張る人はこの点を考慮して，中間・期末とも確実に受験してほしい．

「学習到達度再調査」について：

この大学には「学習到達度再調査」とかいう，変な制度がある．この科目は必修科目でもあり，これに変に期待する人がいるかもしれないので，ここではっきり，宣言しておこう．

> 「再調査」は行わない可能性もある．再調査を行うか，誰を対象とするかは，**こちらの一存で**（もちろん公平に，しかし厳しく）決めさせていただく．

本音を言うと，再調査をする方が，こちらとしては厳しく点を付けやすい（厳しくつけておいて，誰を助けるかは再調査できちんと確かめれば良いから）．その分，皆さんには過酷なものになるでしょう．

だから，再調査には頼らず，期末試験まででちゃんと合格できるよう，しっかり学習して下さい．**期末試験までなら**皆さんの学習を助ける努力は惜しまないつもりで，質問などにも忍耐強く相手することを保証する．

合格（最低）基準：

合格のための条件（A, B がとれる条件ではない！）は，**講義中に出題する例題，レポート問題と同レベルの問題が解けること**である.（ただし「時間がなくてレポートは出せないけど試験には出すぞ」などの指示を講義中に与えることもあり得る.）具体的には**大体**，以下のようになる（進度の都合で内容に若干の変更があるので，完全なリストを現時点で呈示する事はできないが，講義を追っておれば明らかになるはず）.

- １変数関数の微分とその応用について，厳密性を少し犠牲にしても良いから，計算ができること（具体的には，導関数の計算，函数の増減と極値問題，逆関数の計算，テイラー展開など）.
- 「１変数函数の積分とその応用」または「偏微分とその応用」（今学期の後半にどちらをやるかによる）についても，厳密性を少し犠牲にしても良いから，計算ができること.

レポート，宿題について：

ほぼ毎回，簡単なレポートや「お奨めの宿題問題」を出す予定である．このレポートはレポートボックスに提出してもらい，採点ののち，次の講義時に返却の予定（詳細は来週）．これらの出題意図は「この程度できれば講義についていけるし，合格も可能だ」という目安を与えることと家庭学習の引き金にすること，である．成績評価に占めるレポートの比重は低いが，この講義をこなす上では重要な意味があるので，是非やること.

重要：**レポートは友達と相談した結果を書いても良い．ただし，誰と相談したかは明記すること.**（「俺は人に教えてやっただけで人からは全く教わってない」と思う人は書かなくても良いが.）相談した人の名前を書かせるのは,「お世話になった文献，人にはきちんと感謝する」という，学問上の最低ルールを守ってもらうためである．なお,**お世話になった人の名前を書いてもレポートの成績が不利になることはない.**

プリントの使いかた：

例年，僕は講義でプリントを配っていた．これらのプリントは板書にアップアップしないでも講義が聴けるように，また，教科書の足りないところを補うためだった.

ところが，毎回プリントを印刷するのはなかなか大変だし，講義の前にプリントがほしい，と言う声もあった.

このような理由のため，数年前から**講義の補助プリントはこの講義の web page に上げておいて，皆さんに自由にダウンロードしてもらう方法に変更し**，講義では最低限のプリント（日々のレポート問題など）のみを配ることとする．この講義のアドレスは http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/18/biseki19a-web.html だが,「九大 原隆」で検索して僕の web page を見つけた後，下の方の「講義」をクリックすれば，講義の一覧が出る.

なお，プリントにはタイプミスなどがかなりあると思うので，気づいたらできるだけ指摘してくれるとありがたい.

特に注意を要する題材：

１．この講義で一番難しいであろうことは，**極限の厳密理論**で，かなりの人が戸惑うでしょう．これはそんなに難しいものではなく，ゆっくり考えればさえすれば誰でも理解できます．しかし，新学期早々にここで立ち直れなくなっても困るので，これは最低限に絞ります．興味のある人は，個別に質問するなど，して下さい.

２．この講義の大きな目的は「使える微積分を学ぶ」ことで，**実際に手を動かす**（計算する）ことが大事です.

３．この講義の大半は,「高校でやったことのやり直し」に見えるかもしれませんが，ここに落とし穴があります．色々な題材が，少しずつ進化していて，**油断していると全くわからなくなってる**可能性がありますから，注意.

4. **テイラー展開**は高校では見なかったはずのもので，案外とまどう人が多いことに気づきました．一見簡単そうですが，油断しないで下さい.

この科目に関するルール：

世相の移り変わりは激しく，僕が学生だったときには想像すらできなかったことが大学で行われるようになりました．そのうちのいくつかは良いことですが，悪いこともあります．皆さんの反発は覚悟の上で，互いの利益のために，以下のルールを定めます.

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強することであると確認する.
- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです.

- 僕の方では時間通りに講義をはじめ、時間通りに終わるよう心がける.
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義を通して行う（補助として僕の web page も使う —— アドレスは http://www2.math.kyushu-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html）.「講義に欠席したから知らなかった」などの苦情は一切，受け付けない.
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う.
- E-mail による質問はいつでも受け付ける（hara@math.kyushu-u.ac.jp）．ただ，回答までには数日の余裕を見込んで下さい．なお，学生さんのメイルが往々にして spam mail に分類されてしまう事があります．見分け易いように，題名には「物質科学工学科の○○です」などと書いて下さい．また僕にメイルしたのに，２，３日しても返事がない場合は返事を催促して下さい．たとえどんなに理不尽（例：人格攻撃）なメイルであっても，僕は返事はすることにしています．返事がないのはメイルが届いていない可能性が高いです.

演習書の奨め：

教科書の例題や節末問題，章末問題はできるだけやること．それでもわかった気がしなかったら，演習書（いわゆる問題集）をやることを勧めます．問題をやることによって，自分が曖昧にしかわかっていなかった部分がはっきりしてくることが多い．ただし，その際，**解答を鵜呑みにはせず，自分で納得するまで考えること．考えてもわからなかったら，友達や教官（僕を含む）に訊けばよい**．同じ理由で問題の解答を頭から覚える愚だけは避ける事.

演習書はどれでも良いが，一応，目についたものを列挙すると：

- 三村征雄編「大学演習 微分積分学」（裳華房）— 僕はこれを使った．ちょっとムズイかもね.
- 蟹江，桑垣，笠原「演習詳説 微分積分学」（培風館）— なかなか良いが，はじめは難しく感じるかも.
- 杉浦ほか「解析演習」（東大出版会） — これもまあ，大変ではありますが，良い本.
- 鶴丸ほか「微分積分 — 解説と演習」（内田老鶴圃） — 一番「普通」かも.
- 飯高茂監修「微積分と集合　そのまま使える答えの書き方」（講談社サイエンティフィック） — 題名は変だけど，馬鹿にはできない，なかなかの本．流石は飯高さん監修だけあるな．案外，おすすめ.

これ以外にもいくらでも出版されてるから，図書館や本屋さんで自分にあった（読みやすい，やる気になる）ものを選べば良い．ただしその際，解答や解説の詳しいものがよい．また，無理をして難しすぎるものを選ぶ必要はない．自分が簡単だと思うことでも，(人間はアホやから）わかってないことが一杯あり，むしろ簡単なところが盲点になって先に進めないのだ．簡単な演習書でもやれば，大きな効果があるはず.

本論に入る前に記号のお約束.

$a < b$ を２つの実数，n を非負（負でない）整数とする.

- 整数の全体は $\mathbb{Z}$，自然数（1 以上の整数）の全体を $\mathbb{N}$，有理数の全体を $\mathbb{Q}$，実数の全体は $\mathbb{R}$ と書く.
- 集合 A の要素を大学では「元（げん)」ともいう.（例）2 は $\mathbb{Z}$ の元である．$\sqrt{2}$ は $\mathbb{Q}$ の元ではない.
- 高校までと異なり,「$a < b$ または $a = b$」を $a \le b$ と書く．同様に,「$a > b$ または $a = b$」を $a \ge b$ と書く.
- $a < x < b$ なるすべての実数の集合を (a, b) と書き，開区間という．なお，この記号は平面上の点の座標 (a, b) とまったく同じで混乱しそうだが，大抵は文脈で判断できる.
- $a \le x \le b$ なるすべての実数の集合を $[a, b]$ と書き，閉区間という.
- 高校と同じく，$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots 2 \cdot 1$ は n の階乗である．ただし，$0! = 1$ と約束する.

(用語の注）あるものがたった一通りに決まる（存在する）とき，業界用語では○○**が一意に決まる（存在する）**という．この表現『一意』は頻出するから覚えよう（英語の unique, uniquely の訳）.

4 月 20 日：今日は極限の話．厳密な話は「これぞ大学の数学」ですが，ちょっと難しく感じる人もいるでしょう．その場合には諦めずに「高校のノリに毛の生えた程度」でも良いから大筋をつかむようにして下さい．

第 1 回レポート問題： 今回は極限について，簡単な計算（高校の復習），および少しだけ厳密な話です．
問 1 で問題番号や数列の名前が変なのは,「講義ノート」と同じにしたためです．
なお，*印のついた問題は進んだ話題なので，できなくても悲観するには及びません．

問 1： 以下の数列の $n \to \infty$ での極限を，高校のノリで（厳密性にはあまりこだわらずに）求めよ．ただし，極限の存在しない数列も混じっているかもしれないよ．

$$g_n = \frac{\sin n}{n} \qquad h_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \qquad p_n = \frac{2n+1}{n+1} \qquad q_n = \frac{1}{\log(n+1)} \tag{1}$$

以下は極限の厳密な定義に関する，少し進んだレベルの問題である．できなくても悲観する必要は全くない．でもみんな，一度は挑戦してほしい．

問 2*： 「すべての $\epsilon > 0$ に対して」の意味を実感する問題．以下の (i),(ii) のうち，どれが正しくてどれが正しくないか，判定せよ．正しくないと思うものには反例（正しくない例）を与えよ．(a, b は未知の定数で，もちろん，ϵ には依存しない)．

(i) (すべての $\epsilon > 0$ に対して $|a - b| < \epsilon$) $\quad \Longrightarrow \quad a = b$

(ii) (ある $\epsilon > 0$ に対して $|a - b| < \epsilon$) $\quad \Longrightarrow \quad a = b$

問 3*： 以下の小問に答えよ．(本当は n は正の整数のつもりだが，小問 1), 2) では n は正の実数と思って良い．つまり，条件を満たすような正の実数 n の範囲を求めればよい．)

1) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} < 10^{-2}$ となる n の範囲を求めよ．

2) $\epsilon > 0$ を非常に小さい正の実数として，$\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} < \epsilon$ となる n の範囲を ϵ を用いて表せ．

3) 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ を，ϵ-N 論法を用いて求めよ．その際，$N(\epsilon)$ をどのようにとれば良いかを明記する事．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について： レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，

4 月 25 日（水）の 13:00 までに，基幹教育事務室のレポートボックス 5 番に

入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

4 月 27 日：今日も極限の話（＋実数の連続性？）．あまり深入りはしませんが，今週もおつきあいくだされ．なお，5/2（水）は「金曜の授業」なので普通にこの講義をします．内容は「実数の連続性」「単調数列の収束」です．

第 2 回レポート問題：

今回も前回に引きつづき，極限についての簡単な計算（高校の復習），および少しだけ厳密な話です．問題番号は今学期とおしての通し番号にしています．
なお，*印のついた問題は進んだ話題なので，できなくても悲観するには及びません．

問 4： 以下の極限を，高校のノリで（厳密性にはあまりこだわらずに）求めよ．

$$(1)\quad \lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x} \qquad (2)\quad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} \qquad (3)\quad \lim_{x\to 0}\ x\sin\Bigl(\frac{1}{x}\Bigr)$$

以下は極限の厳密な定義に関する，少し進んだレベルの問題である．できなくても悲観する必要は全くない．でも興味と意欲のある人は挑戦してほしい．

問 5： $\lim_{x\to 0} x^{1/2}$ を，ϵ-δ 論法によって求めよ． この場合，最良の $\delta(\epsilon)$ を使う必要は全くない．計算し易いように ϵ, δ を制限しても良い（もちろん，本当に見たい ϵ の範囲は入っている必要があるが）． この問と直後の問 6 で「求めよ」というのは,「予想される極限値に収束することを **ϵ-δ 論法によって証明せよ**」の意味です．予想される極限値を求めるには「高校のノリ」などが必要なのは，今日の講義で説明する通りです．

問 6*： $\lim_{x\to 1}(x^4+4x)$ を，ϵ-δ 論法によって求めよ． この場合，最良の $\delta(\epsilon)$ を使う必要は全くない．計算し易いように ϵ, δ を制限しても良い（もちろん，本当に見たい ϵ の範囲は入っている必要があるが）．

問 7：** （数列に関するチャレンジ問題）講義ノートの命題 1.1.7 は

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \qquad \Longrightarrow \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = \alpha$$

と主張している．そこで，右辺の 「a_1 から a_n の平均」をより一般の加重平均にして，同様の結果が成り立つかどうかを考えよう．すなわち，$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ を正の数列として，

$$b_n := \Bigl(\sum_{j=1}^{n}\rho_j\, a_j\Bigr)\Bigg/\Bigl(\sum_{j=1}^{n}\rho_j\Bigr)$$

を考える．「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば必ず $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる」ためには，$\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$ がどのような条件を満たしていれば良いか？(命題 1.1.7. は $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3 = \ldots = 1$ に相当している.）一般の ρ_j を考えにくい場合は，$\rho_j = j^\beta$（β は定数）の場合に「どのような β の値なら $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となるか？」を考えても良い．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：(連休のため，二週間近く後の締め切りです）

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，

5 月 9 日（水）の 13:00 までに，基幹教育事務室のレポートボックス 4 番に

折らないで入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

先週のレポートの略解とコメント

まず，いくつかの注意とコメント

- かなりの人が頑張っていたのは良かったと思います．また，一人を除いて A4 で出してくれたので僕は楽でした．是非，この調子で進んでください．

- 重要な質問がありました．「**ϵ-N 論法は，極限の値 α を求めるのには役に立たないのではないか？**」「極限の値 α を見つけるにはどうすれば良いか？」など．
（回答）ϵ-N 論法は，「見当をつけた極限の値 α」に**実際に収束することを証明する**ための論法で，極限の値 α を求めるのには，直接の役には立ちません．なので，極限の値そのものは（普通は）別途見つける必要があり，その際には『高校のノリ』などを駆使する必要があります．
（補足）間違った α の値を用いて ϵ-N 論法を進めるとどこかで破綻するし，逆に正しい値を用いた ϵ-N 論法は絶対にうまく行くはずですから，最終的に正しい極限値かどうかの判定にはなります．

- 同様に，今日やる ϵ-δ 論法も，「極限の値を見つけるためのもの」というよりも，「他の方法で見当をつけた α に**実際に収束する**」ことを証明するためのものです．

- 講義中にも説明するように，$N(\epsilon)$ はギリギリ効率よく（小さめに）とる必要はありません．計算しやすいように，大きめにとることが普通です．例えば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4+n^3+3n^2+2n+7}=0$ をやる場合，この分数が ϵ より小さい n の範囲をきっちり求めるのは大変です．でも $N(\epsilon)$ は大きめにとれば良いのだから，別に困りません．今日のレポート問題の問 6 は，このような事情を ϵ-δ でやってもらうものになっています．

- 解答例で述べたように，ϵ は「正で小さい」ものだけを考えれば十分です．なぜなら，ある $\epsilon>0$ で ϵ-N の結論部分が成り立つなら，$\epsilon'>\epsilon$ なる ϵ' でも自動的に成り立つからです．この理由で，証明などでは最初から「$0<\epsilon<1/5$ に対して...」などと ϵ の範囲を制限することがあります．また，そのように制限する理由をいちいち断らないことが多いです．（このように制限すると，数式が簡単になる場合が案外あり，一例を上で示しました．）

- ϵ-N 論法の考え方がわかっても，それを使い場合の計算テク（不等式の扱い）が下手なために困ってる人も多いと思います（高校ではほとんど不等式をやってませんからね）．ここは，ϵ-N 論法などの**考え方がわからないのか**，それとも実際に問題を解く際の**計算テクニックで困ってるのか**，の問題の切り分けが大事です．

- 数学の「概念」は，一旦わかれば非常に明快かつ便利なものです．ですが，それが基礎的なものであるほど，最初はなかなかわかりにくい面があります．ϵ-δ なども（講義で説明するように）「窓に入ってくるかどうかを考える」という，非常に自然なものなのですが，慣れないうちは混乱するかもしれません．いくつかの具体例（講義ノートにもあります）をやってみると，だんだんとわかってくるところがあると思います．

問 1： 最初に「高校のノリ」の解答を書きます．その後に，ϵ-N での解答を書きます．
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} g_n=0$ である．なぜなら，$|g_n|\le\dfrac{1}{n}$ であり，かつ右辺がゼロにいくから，左辺もゼロに行く（はさみうち）．
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} h_n=0$ である．なぜなら，$h_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ であって，分母が無限大に行くから．
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n=2$ である．なぜなら，$p_n=\dfrac{2+1/n}{1+1/n}$ であって，分子は 2 に，分母は 1 に行くから．
$\displaystyle\lim_{n\to\infty} q_n=0$ である．なぜなら，分母が無限大に行くから．

問 2： みなさん，答えは大体あってましたが，特に (1) の理由があやふやでしたね．**任意の〇〇** vs **〇〇が存在する**の区別に慣れてない部分も効いてるようなので，講義でも説明します．
(1) 正しい．証明には背理法，または対偶を取るのが良い．
（背理法を用いた証明）．$a\neq b$ と仮定する．すると，$\epsilon=|a-b|/2$ は正の数である．しかし，このとき，不等式 $|a-b|>|a-b|/2=\epsilon$ が成立してしまうので，仮定が成り立たない．つまり，仮定が成り立つなら，$a\neq b$ は許されない．

（対偶を用いた証明）．対偶は「$a \neq b$ ならば，$|a-b| \geq \epsilon$ となるような正の数 ϵ が存在する」である（ここのところが案外，難しいとは思うが）．でもこの対偶の結論は，$\epsilon = |a-b|$ とか $\epsilon = |a-b|/2$ などとすれば成立するので，対偶は正しい．よって対偶を取る前の命題も正しい．

（2）間違いである．反例は，例えば，$a = 1, b = 2, \epsilon = 2$ などがある．より一般に，$a \neq b$ が与えられた時でも，$\epsilon = 2|a-b|$ などが反例である．

問 3： かなりの人ができていましたが，不等式を n について解く際に間違った人がある程度，いました．

(1) 解くだけ．答えは $n > 10^6$.

(2) 解くだけ．答えは $n > \epsilon^{-3}$.

(3) 最短の解答は，以下のようになります.（上の（2）は，下の $N(\epsilon)$ の選び方を見つけるためのヒントでした.）

任意の $\epsilon > 0$ に対して，$N(\epsilon) = \epsilon^{-3}$ ととってみる．すると，$n > N(\epsilon)$ では，

$$\left| \frac{1}{\sqrt[3]{n}} - 0 \right| = \frac{1}{\sqrt[3]{n}} < \frac{1}{\sqrt[3]{N(\epsilon)}} = \frac{1}{\sqrt[3]{\epsilon^{-3}}} = \epsilon$$

が成り立つ．これは ϵ-N 論法における，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ の定義そのものである．よって極限はゼロ．

問 1 の ϵ-N 論法での解答例：

g_n について

（まず前提として，高校のノリで，極限はゼロだと予想しておく．以下，ϵ-N 論法で，これを証明する.）

任意の $\epsilon > 0$ を固定した時，$N(\epsilon) = 1/\epsilon$ と決めると，

$$n > N(\epsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad |g_n| \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{N(\epsilon)} = \epsilon$$

が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} g_n = 0$ を ϵ-N 論法で書いたものそのものであるから，極限はゼロと証明された．

（注意）講義中に述べるように，$N(\epsilon)$ はもっと大きく取っても良い．例えば，$N(\epsilon) = 5/\epsilon$ などでも構わない．

h_n について

（まず前提として，高校のノリで，極限はゼロだと予想しておく．以下，ϵ-N 論法で，これを証明する.）

任意の $\epsilon > 0$ を固定した時，$N(\epsilon) = 1/\epsilon^2$ と決めると，

$$n > N(\epsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad |h_n| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{N(\epsilon)}} = \epsilon$$

が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} h_n = 0$ を ϵ-N 論法で書いたものそのものであるから，極限はゼロと証明された．

（注意）講義中に述べるように，$N(\epsilon)$ はもっと大きく取っても良い．また，$\epsilon > 0$ は充分に小さいものだけを考えれば十分である．なので，$0 < \epsilon < 1$ のみを考えることにして，$N(\epsilon) = 1/\epsilon^4$ などでも構わない.（注意：$0 < \epsilon < 1$ なら $1/\epsilon^2 < 1/\epsilon^4$ なので，$N(\epsilon)$ を大きめに取ったことになっていて，$N(\epsilon) = 1/\epsilon^4$ でも良い．ところが $\epsilon > 1$ なら $N(\epsilon) = 1/\epsilon^4$ は正しくない．この意味で，ϵ を小さいものに限定しておくのは良い考えである.）

p_n について

（まず前提として，高校のノリで，極限は 2 だと予想しておく．以下，ϵ-N 論法で，これを証明する.）

一発でやるのは大変なので，まずは「前提」となる計算をする．

（前提の計算；どのくらい n が大きければ良さそうか？）

$$p_n - 2 = \frac{2n+1}{n+1} - 2 = \frac{-1}{n+1}$$

であるから，$n > 1/\epsilon - 1$ ならば，上の絶対値は ϵ より小さい．

（上を基にして，極限を求める証明；証明としては以下の部分だけで十分だ）

任意の $\epsilon > 0$ を固定した時，$N(\epsilon) = 1/\epsilon$ と決めると，

$$n > N(\epsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad |p_n - 2| = \frac{1}{n+1} \le \frac{1}{N(\epsilon)+1} < \frac{1}{N(\epsilon)} = \epsilon$$

が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} p_n = 2$ を ϵ-N 論法で書いたものそのものであるから，極限はゼロと証明された．

（注意）上では $N(\epsilon)$ を，ギリギリの値よりもちょっとだけ大きめに取った．ギリギリなら $N(\epsilon) = 1/\epsilon - 1$ である．

<u>q_n について</u>

（まず前提として，高校のノリで，極限は 0 だと予想しておく．以下，ϵ-N 論法で，これを証明する．）

一発でやるのは大変なので，まずは「前提」となる計算をする．

（前提の計算；どのくらい n が大きければ良さそうか？）

$$q_n = \frac{1}{\log(n+1)}$$

なので，$q_n < 1/\epsilon$ を解くと，$n + 1 > \exp(1/\epsilon)$ になる．

（上を基にして，極限を求める証明）

任意の $\epsilon > 0$ を固定した時，$N(\epsilon) = \exp(1/\epsilon)$ と決めると，

$$n > N(\epsilon) \qquad \Longrightarrow \qquad |q_n| = \frac{1}{\log(n+1)} \le \frac{1}{\log\bigl(N(\epsilon)+1\bigr)} < \frac{1}{\log\bigl(N(\epsilon)\bigr)} = \frac{1}{1/\epsilon} = \epsilon$$

が成り立つ．これは $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ を ϵ-N 論法で書いたものそのものであるから，極限はゼロと証明された．

（注意）上では $N(\epsilon)$ を，ギリギリの値よりもちょっとだけ大きめに取った（結果がちょっとだけ簡単になるので）．ギリギリなら $N(\epsilon) = \exp(1/\epsilon) - 1$ であり，もちろん，これでも良い．

最後に，講義ノートの命題 1.1.7 の証明（講義でやるけど，問 7 にも関係あるので再録）

任意の $\epsilon > 0$ を固定する．言いたいことは，この任意の $\epsilon > 0$ に対して，うまく $N(\epsilon)$ をとると，

$$(*) \qquad n > N(\epsilon) \qquad \text{ならば，} \qquad \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha\right| < \epsilon \qquad \text{が成立する}$$

ことである．これを示すため，以下のように進む．

まず，$\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha$ であることから，正の数 $N_1(\epsilon/2)$ が存在して，「$k > N_1(\epsilon/2)$ ならば $|a_k - \alpha| < \epsilon/2$」が成り立つことに注意する．

次に，（十分大きな n のみを考えれば良いことは既に注意してるので）$n > N_1(\epsilon/2)$ を考えて（以下，簡単のため，$N_1(\epsilon/2)$ を N_1 と略記）見たい量を

$$(**) \qquad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - \alpha = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(a_k - \alpha) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{N_1}(a_k - \alpha) + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}(a_k - \alpha) = \frac{1}{n}S_1 + \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}(a_k - \alpha)$$

と分ける — ここで $S_1 = \sum_{k=1}^{N_1}(a_k - \alpha)$ を定義した．するとこの時，第 2 項については，

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}(a_k - \alpha)\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}\bigl|a_k - \alpha\bigr| < \frac{1}{n}\sum_{k=N_1+1}^{n}\frac{\epsilon}{2} = \frac{n - N_1}{n} \times \frac{\epsilon}{2} < \frac{\epsilon}{2}$$

が成り立っている．

残るは第 1 項だが，S_1 はこれまでの定義によって決まった定数なので，n を十分大きくとると，$\frac{1}{n}S_1$ をいくらでも小さくできる．特に，（大きな）$N_2(\epsilon/2)$ を見つけて，「$n > N_2(\epsilon/2)$ ならば $\left|\frac{1}{n}S_1\right| < \epsilon/2$ が成り立つ」ようにできる．

以上の準備の元に，$N(\epsilon) = \max\{N_1(\epsilon/2), N_2(\epsilon/2)\}$ と決める．すると，$n > N(\epsilon)$ ならば，上の（$**$）の第一項，第二項は共に $\epsilon/2$ より小さい．つまり，目的の（$*$）が証明された．

（$*$）は $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$ を ϵ-N 論法で書いたものに他ならないので命題が証明された． □

5 月 18 日：今日はコーシー列を終えて，函数の連続性に入ります．

第 3 回レポート問題：

問 8： 以下の数列が収束するか否かを判定せよ．ただし，極限値は求めなくてもよい．(つまり，極限がわからなくても使える収束の判定法を用いよう，ということだ．)

(1) $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (2) $b_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ (3) $c_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$ (4*) $d_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$

(3) はちょっと難しく見えるかもしれないが，少し工夫するとできる．(4) も似たような問題ではあるが，もう少し工夫が必要．

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，

5 月 16 日（水）の 13:00 までに，基幹教育事務室のレポートボックス 5 番に

折らないで入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

——————先週のレポートの略解——————

問 4：

(1) イメージとしては，e^x の方が x よりもずっと速く無限大になるから，極限はゼロ．厳密にやる方法の一例は以下のような感じ．

$f(x) = e^x - 1 - x - x^2/2$ とおくと，

$$f'(x) = e^x - 1 - x, \quad f''(x) = e^x - 1$$

である．特に，$x > 0$ では $f''(x) > 0$ である．また，$f'(0) = f(0) = 0$ でもあるので，これらから $x > 0$ では $f'(x) > 0$，$f(x) > 0$ がわかる．つまり，$x > 0$ では

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2}, \qquad \frac{e^x}{x} > 1 + \frac{x}{2}$$

である．この右辺は $x \to \infty$ で無限大に行くから，e^x/x も無限大に行く．

（注意）講義の中で注意したように，ある函数 $g(x)$ が $x \to \infty$ で無限大に行くことを言うには，$g'(x) > 0$ のみでは足りない（反例はたとえば，$g(x) = 1 - 1/x$）．この問題では e^x が x よりも「速く」無限大に行くことを言う必要があるので，上の解答例では $e^x \geq x^2/2$ を示した．

(皆さんのうちの一人が書いていた別解．これもなかなかエレガントでよろしいです！)

$x > 1$ では $x < 2^x$ であることを用いると，$x > 1$ では

$$\frac{e^x}{x} > \frac{e^x}{2^x} = \left(\frac{e}{2}\right)^x$$

が成立する．ところで，$e = 2.71\cdots > 2$ なので，上の右辺は $x \to \infty$ で無限大に行く．なので，左辺も無限大に行く．

なお,「上のようにするなら，そもそも $e^x > 2^x$ を分子に用いて，$e^x/x > 2^x/x$ とした方が簡単では？」と思った人がいるかもしれません．それを紹介しなかった理由は以下の通りです．不等式 $e^x/x > 2^x/x$ はもちろん正しいのですが，これでは「2^x が x よりもずっと速く無限大に行く」ことを別途，証明する必要があります．一方，分母では $2^x > x$ のみを用いているわけで，この不等式を証明するのはかなり容易です．こんなわけで，上で紹介したやり方のほうが，難しい部分をわかりやすく分離したという意味で，より優れています．

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^2}{x(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\sin x}{1+\cos x} = 1\times 0 = 0$$

(3) これは問 [1] の g_n と実質的に同じ．極限は 0.

問 5： ある意味，少し出題ミスでした．$x^{1/2}$ が実数の範囲で定義できるためには，$x > 0$ が必要でしたね．何人か，ここを気にしてくれた人がいました．

（裏の計算）極限値の予想は 0．それで $|x|^{1/2}$ が ϵ より小さくなる x の範囲（十分条件）を求めたい．

$|x|^{1/2} < \epsilon$ の両辺を 2 乗して $|x| < \epsilon^2$ となるから，$\delta = \epsilon^2$ とすれば十分だろう．

（表の解答）任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta = \epsilon^2$ ととると，

$$|x| < \delta \quad \text{では} \quad |x^{1/2}| < \delta^{1/2} = \epsilon$$

がなりたつ．これは $\lim_{x\to 1} x^{1/2} = 0$ を ϵ-δ で書いたものに他ならない．よって，極限は 0 である．

問 6：

（裏の計算）極限値の予想は 5．それで因数分解により $|x^4+4x-5| = |x-1|\times|x^3+x^2+x+5|$ であることを利用して，この量が ϵ より小さくなる x の範囲（十分条件）を求めたい．

x が大きいと右辺の $|x^3+x^2+x+5|$ も大きくなって厄介なので，最初から $|x-1| < \delta \le 1$ というように，δ と x の範囲を区切って考える．この場合，$0 < x < 2$ であるから，

$$|x^4+4x-5| = |x-1|\,|x^3+x^2+x+5| < 19|x-1|$$

がなりたつ．つまり，$|x-1|$ を $\epsilon/19$ より小さくとれば，上の量は ϵ よりも小さくなる．

（表の解答）任意の $\epsilon > 0$ に対して $\delta = \min\{1, \epsilon/19\}$ ととると，

$$|x-1| < \delta \quad \text{では} \quad |x^4+4x-5| = |x-1|\,|x^3+x^2+x+5| < \delta\times 19 \le \frac{\epsilon}{19}\times 19 = \epsilon$$

がなりたつ．これは $\lim_{x\to 1}(x^4+3x) = 4$ を ϵ-δ で書いたものに他ならない．よって，極限は 4 である．

（コメント）上で重要なのは，因数分解した時の因子 $(x-1)$ である．これはモロに δ くらいの大きさだから，これ以外の部分 (x^3+x^2+x+5) が**あまり大きくないなら**，この二つをかけた結果をいくらでも小さくできる．

問題は「(x^3+x^2+x+5) が大きくない」ことを示すのが難しく見えるところだろう．皆さんはこれまで，あまりこのような「評価」をやったことがないだろうから，慣れないと戸惑うのは仕方ない．

この辺りは,「何が重要か，どこまで妥協できるか」を考えつつ，経験を積めば，段々とできるようになる．そもそも，x は 1 の近くにいるわけだから， (x^3+x^2+x+5) はそんなに大きなわけがない．この感覚をきちんと言語化できたら O.K. だ.（そこまで行かなくても,「$x\to 1$ だから (x^3+x^2+x+5) は大体 8 くらい」というようなことが分かれば良い．実際，上では $\delta < 1$ としたので $0 < x < 2$ となったが，$\delta < 0.01$ とすれば $0.99 < x < 1.01$ となって，$(x^3+x^2+x+5) < 8.07$ が厳密に言える．なので，このように δ を制限すれば，$\delta = \epsilon/8.07$ でも十分だ.）

問 7： （2018 年 6 月 18 日に追加） ともかく，$\rho_j \equiv 1$ の場合の証明を参考にしてやってみよう．

(PART I) 以下では,「$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\rho_j = \infty$ ならば，b_n の極限が必ず α である」ことを証明する．

まず任意の（小さな）$\epsilon > 0$ を固定する．すると，a_n の極限が α であるから,（大きな）$N_1 = N_1(\epsilon/2)$ が存在して,

$$(*) \qquad n > N_1 \qquad \Longrightarrow \qquad |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}$$

が成立する．そこで，$n > N_1$ に対して

$$(**) \qquad b_n - \alpha = \frac{\sum_{j=1}^{n} \rho_j\, a_j}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j} - \alpha = \frac{\sum_{j=1}^{n} \rho_j\, (a_j - \alpha)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j} = \frac{\sum_{j=1}^{N_1} \rho_j\, (a_j - \alpha)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j} + \frac{\sum_{j=N_1+1}^{n} \rho_j\, (a_j - \alpha)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j}$$

と分けてやる.（$**$）の第 2 項は上の（$*$）のおかげで,

$$\frac{\sum_{j=N_1+1}^{n} \rho_j\, (a_j - \alpha)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j} \le \frac{\sum_{j=N_1+1}^{n} \rho_j\, |a_j - \alpha|}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j} < \frac{\sum_{j=N_1+1}^{n} \rho_j\, \frac{\epsilon}{2}}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j} < \frac{\epsilon}{2}$$

となっている．

一方,（$**$）の第 1 項の分子は，N_1 を決めたら決まる定数である．なので，もしも

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \rho_j = \infty$$

であるならば,（大きな）$N_2 = N_2(\epsilon/2, N_1)$ が存在して,

$$(***) \qquad n > N_2 \qquad \Longrightarrow \qquad \left| \frac{\sum_{j=1}^{N_1} \rho_j\, (a_j - \alpha)}{\sum_{j=1}^{n} \rho_j} \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

を成立させられる．

以上から，$N = \max\{N_1, N_2\}$ と取れば，$n > N$ において,（$**$）の右辺第 1 項，第 2 項ともに，その絶対値が $\epsilon < 2$ より小さくなり，結局,（$**$）の左辺の絶対値は ϵ より小さくなる．つまり,

$$n > N \qquad \Longrightarrow \qquad |b_n - \alpha| < \epsilon$$

が成り立つので，b_n の極限は α になる．以上で，$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \rho_j = \infty$ が，$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ の十分条件であることが示された．

(PART II) 本当は，これが必要条件でもあることも示して欲しい．その前に「必要条件」の意味を明らかにしておく．問題には「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ならば必ず $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる」と書いてあるが，この「必ず」の意味は,

$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ となるようなどんな数列に対しても，$\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ となる

という意味である.（こうなるような ρ_j の（必要十分）条件を求めよ，というのが問題だった.）

さて，上の意味で $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ が必要でもあることを示すには，必要条件の定義そのもので,

$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \rho_j = \infty$ ではない場合には,「$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ ではあるが $\lim_{n\to\infty} b_n = \alpha$ とはならない」数列 (a_n) が存在する

ことを示せば良い.(以下,議論を簡単にするため,「上に有界な単調増加数列は収束する」ことを用いるが,これを使わなくても証明はほとんど同じである.)

いま,$\rho_j > 0$ を仮定しているので,$\sum_{j=1}^{n} \rho_j$ は常に正であり,かつ,n について単調増加である.「$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \rho_j = \infty$ ではない」とは,「$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \rho_j < \infty$」ということだから,これは要するに,数列 $\sum_{j=1}^{n} \rho_j$ が上に有界であることを保証する.したがって,「上に有界な単調増加数列は収束する」定理から,この数列の極限値が存在するはずなので,それを R としよう:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \rho_j = R$$

(この R が正であることは,$\sum_{j=1}^{n} \rho_j$ が正,かつ単調増加であることから明らか.)

ところがこれは,ϵ-N で書くと,($\epsilon = R/2$ などとして)

$$\text{ある } N(R/2) \text{ が存在して } \ n > N(R/2) \ \text{ では } \quad 0 < R - \sum_{j=1}^{n} \rho_j < \frac{R}{2}$$

ということである.最後の不等式は,特に,$n \le N(R/2) + 1$ までの和が $\frac{1}{2}R$ より大きいことを保証している.なぜなら $n = N(R/2) + 1$ に対して上の不等式から

$$\sum_{j=1}^{N(R/2)+1} > R - \frac{1}{2}R = \frac{1}{2}R$$

となるから.

そこで,数列 a_n として,例えば

$$a_n = \begin{cases} \alpha + 1 & (n \le N(R/2) + 1) \\ \alpha & (n > N(R/2) + 1) \end{cases}$$

と取ってみると,この数列はもちろん,α に収束する.

しかし一方で,等式

$$b_n - \alpha = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j \left(a_j - \alpha\right)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j}$$

の右辺の分子の和の中身は $j \le N(R/2) + 1$ のところのみゼロでなくて

$$b_n - \alpha = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N(R/2)+1} \rho_j \left(a_j - \alpha\right)}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j} = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N(R/2)+1} \rho_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j}$$

となっている.この上の分母は R 以下,分子は $\frac{1}{2}R$ 以上であることはすでに見た.これを用いると,全ての $n > N(R/2) + 1$ に対して,

$$b_n - \alpha = \frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{N(R/2)+1} \rho_j}{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \rho_j} \ge \frac{R/2}{R} = \frac{1}{2}$$

が成り立つことがわかる.これでは,b_n は α に収束しようがない !! というわけで,$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \rho_j = \infty$ が必要条件であることも証明できた. $\square$

5 月 18 日：今日から微分に入ります．まず初日の今日は，ほとんど高校の復習みたいなもんですが，まあ，聞いて下さい．

第 4 回レポート問題：

問 9： （return match!）以下の数列が収束するか否かを判定せよ．

$$(1)\quad a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} \qquad\qquad (2^*)\quad b_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}}$$

問 10： 以下の導関数を計算せよ（高校のノリで十分）．f' と f'' はもちろん，f の一階，二階の導関数を表す．

$$(1)\quad f(x) := \cos(x^3) \qquad \text{に対して} \qquad f'(x) \quad \text{と} \quad f''(x)$$
$$(2)\quad g(x) := \bigl(e^{x^2}+1\bigr)^3 \qquad \text{に対して} \qquad g'(x)$$

上で e^{x^2} とは，指数関数の肩に x^2 が乗っているものである．

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，

5 月 23 日（水）の 13:00 までに，基幹教育事務室のレポートボックス 5 番に

折らないで入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

――――――――――先週のレポートの略解――――――――――

まず，番外問題への回答から：「定理などを習った後，1 問で良いから，それを使った例題をやってほしい」との意見がありました．気持ちはわかりますし，必要と思う場合には，これも行いますが（実際,「この定理はこう使う」という使い方は講義中にも説明していると思う），それ以上については，原は以下のように考えています．

- 「数学に上達する秘訣は問題演習だ」と主張する人がいますが，原は賛同しません．特に，ある程度の理解なしに問題演習に走って「問題の解き方」を覚えようとするのは，大学生レベル以上では（本当は高校でも中学でも）邪道であると原は考えます．
- また，人間の理解力はアヤフヤなもので,「話を聞いた直後にはわかったつもりでも，少し時間が経つとわからなくなる」ことはよくあります．
- そのため，定理などを解説した「直後」に，それを利用した問題の「解法を」解説することには慎重であるべきだと思います．
- この理由から，僕は授業中の例題解説よりも（家に帰って）「レポート問題をやってもらう」ことを重視しています．少し時間が経った方が，自分の理解が不十分なことがよくわかり，結果として理解が深まるからです．（ただし，授業のあったその日のうちに取り組みましょう．数日経つと，きちんとわかってたことも忘れてしまいます．）
- 以上は最初の授業でも少し説明したことだと思いますが，一つ，新たに付け加えたいことがあります．それは「**上に書いたような方法でレポート問題を解こうとしても解けないから，例題を授業で解説してほしい**」と思ってる人へのメッセージです．結論から言うと，**レポートの問題が解けなくても，その解答例などを理解して，期末試験までに解けるようになれば全く問題ない**ということです．以下にもう少し詳しく説明します．

  – 最初に宣言した通り，この授業ではレポートの成績は最終成績にはほとんど反映されません．
  – その理由はまさに，**レポート問題をやろうとしてもよくわからない人**のうち，**中間試験や期末試験までに勉強してきちんと問題が解けるようになった人**が不利にならないように，です．
  – いうまでもなく，この授業の目的は（この授業でカバーすべき）**題材を授業の最後までにマスターしてもらうこと**であり，その習得の速さは問題にしません．
  – 最初はレポートが解けなくても，レポート問題の解説を理解して，試験の時に解けるようになれば，全く問題ないのです．

- このような理由から，例題の解説はあまり授業で行わず，それをレポート出題とその解説を通して行うのが僕のスタイルです．レポートができないのは少し苦痛かもしれませんが，試験までにできるようになれば良いので，しばらく我慢してください．
- なお，皆さんが苦戦している場合には，その次のレポートでも似たような問題をだしてフォローします（今回のように）．

問 8： 皆さん，かなり苦戦してました．もともと「有界性」や「コーシー列であること」を示すのが難しい上に，「有界単調列の収束」と「コーシー列の収束」のどちらを使うのかで迷ったこともあると思います．以下では何通りかのやり方を書きますが，上でも注意したように，レポート提出の段階ではできなくても構いません．なお，最後の注意も参照して下さい．

「有界な単調数列は収束する」を用いる方法

(1) これは収束しない．実際，積分を用いて評価すると

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \log(k+1) - \log(k)$$

となる．右辺は $n \to \infty$ で無限大に行くから，a_n も無限大に行く．

(2) まず，b_n は単調増加であることに注意する．次に，

$$b_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2} \leq 1 + \int_1^{n} \frac{1}{x^2} dx = 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$$

つまり，$b_n \leq 2$ で上に有界．よって単調増加かつ有界である (b_n) は収束する．

(3) この問題も次の問題も，問題の数列はそのままでは単調ではない．n が偶数，奇数で分けて考え，後で両者が同じ極限に行くことを示す．

n が偶数のとき，$n = 2m$ と書くと，

$$c_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{-1}{2l-1} + \frac{1}{2l} \right) = -\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{2l(2l-1)}$$

これは単調減少であり，また，以下に示すように下に有界である．従って，(c_{2m}) は $m \to \infty$ で収束する．(下に有界の証明は以下の通り)

$$\sum_{l=2}^{m} \frac{1}{2l(2l-1)} \leq \int_1^{m} \frac{1}{2x(2x-1)} dx = \int_1^{m} \left(\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x} \right) dx = \frac{1}{2} \log\left(\frac{2m-1}{2m} \right) + \frac{1}{2} \log 2 \leq \frac{1}{2} \log 2.$$

次に，n が奇数の時であるが，$n = 2m+1$ と書くと，

$$c_{2m+1} - c_{2m} = -\frac{1}{2m+1}$$

であって，この差は $m \to \infty$ でゼロに行く．(c_{2m}) が収束するので，(c_{2m+1}) も同じ極限に収束する．

結果として，(c_n) は，n が偶数でも奇数でも同じ極限に収束する．なお，この極限の値は $-\log 2$ であるが，なぜなのかは「テーラー展開」を学べばわかる．（もっと巧妙に $-\log 2$ を出す方法もあるが，ここでは触れない．）ともかく，ここで大事なことは極限値そのものよりも，この数列が収束する（理由を述べられる）ことだ．

(4) この問題も (3) と同じように解ける．

まず，n が偶数のとき，$n = 2m$ と書くと，(3) と同様にして

$$d_{2m} = \sum_{l=1}^{m}\left(\frac{-1}{\sqrt{2l-1}} + \frac{1}{\sqrt{2l}}\right) = -\sum_{l=1}^{m}\frac{\sqrt{2l}-\sqrt{2l-1}}{\sqrt{2l-1}\,\sqrt{2l}} = -\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2l-1}\,\sqrt{2l}\,(\sqrt{2l}+\sqrt{2l-1})}$$

これは単調減少である．また，

$$\sum_{l=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{2l-1}\,\sqrt{2l}\,(\sqrt{2l}+\sqrt{2l-1})} \le \sum_{l=1}^{m}\frac{1}{(\sqrt{2l-1})^3} \le 1 + \int_1^m \frac{1}{(\sqrt{2x-1})^3}dx = 1 + 1 - \frac{1}{\sqrt{2m-1}} \le 2$$

であるため，(d_{2m}) は下に有界．従って，(d_{2m}) は収束する．

また，

$$d_{2m+1} - d_{2m} = -\frac{1}{\sqrt{2m+1}} \quad \longrightarrow \quad 0 \qquad (m \to \infty)$$

なので，(d_{2m+1}) も (d_{2m}) と同じ極限に収束する．

結果として，(d_n) は収束する．

(3)(4) に対するかっこいい方法（あくまで参考まで；気にしなくて良い）

(3) を例にして説明する．上では，c_{2m} が単調減少であることを，$c_{2m+2} - c_{2m}$ を計算して示した．同様にして，c_{2m+1} が単調増加であることもすぐにわかる．さらに，$c_{2m+1} < c_{2m}$ であることも上で見ている．従って，これらの情報から，c_n の大きさについて

$$c_1 < c_3 < c_5 < \cdots < c_{2m+1} < \cdots < c_{2m} < \cdots < c_6 < c_4 < c_2$$

がわかる．これは要するに，(c_{2m}) は（c_1 より大きいので）下に有界な単調減少数列であることを示しており，(c_{2m}) は収束するとわかる．同様に，(c_{2m+1}) は（c_2 よりも小さいので）上に有界な単調増加数列であることを示しており，(c_{2m+1}) も収束するとわかる．最後に，c_{2m} と c_{2m+1} の差がゼロに行くから，これらは同じ極限に収束する．

「コーシー列か否か」を用いる方法（下の例で見るように，問題によってはこちらの方が簡単な時もある）

(1) 任意の $m > n$ に対して

$$a_m - a_n = \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k} \ge \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{m} = \frac{m-n}{m} = 1 - \frac{n}{m}$$

である．特に，$m = 2n$ ととると，

$$a_{2n} - a_n = \frac{1}{2}$$

となるが，これは (a_n) がコーシー列でないことを示している．なぜなら，もしコーシー列なら，上の差は $n \to \infty$ でゼロに行くはずだからだ．よってこの数列は収束しない．

（注意）コーシー列で**ある**ことを示すには，「$m, n > N$ なる全ての m, n に対して $|a_m - a_n| < \epsilon$」を示す必要があるが，コーシー列で**ない**ことを示すには，上を否定するような適当な m, n を見つければよい．なので，上では $m = 2n$ を特に考えた．

(2) $m > n$ の時に $a_m - a_n$ を計算してみると

$$a_m - a_n = \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2} \le \sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n}$$

となる．$a_m - a_n$ は正でもあるから，これから

$$\text{任意の}\ \epsilon > 0\ \text{に対して，}N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon}\ \text{と決めると，}\Bigl(m, n > N(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |b_m - b_n| < \epsilon\Bigr)\ \text{が成り立つ}$$

が証明できた．(b_n) はこのようにコーシー列であり，従って，収束する．

注意：コーシー列の定義では $m, n > N$ ならば... となっていて，$m < n$ の場合も考えているように見えるが，$n > m$ の場合は m と n を取り替えて考えれば同じことである．その意味で，上では $m > n$ のみを考えた．以下でも同様である．

(3) この問題も次の問題も，上の (2) と同じノリで進むが，$(-1)^k$ のために，もうちょっとだけややこしい．ともかく $m > n$ の時，計算すると，

$$c_m - c_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} - \cdots \pm \frac{1}{m}\right]$$

となる（最後の $\pm$ は，$m - n$ が偶数ならマイナス，奇数ならプラス）．

$m - n$ が偶数なら，隣り合った 2 項をうまくまとめて正負を考えると，上のカッコ内が

$$0 \le \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} - \cdots - \frac{1}{m} \le \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n+1}$$

であることがわかる．また，$m - n$ が奇数の場合も同様にして，カッコ内が

$$0 \le \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} - \cdots + \frac{1}{m} \le \frac{1}{n+1} - \frac{1}{m-1} + \frac{1}{m} \le \frac{1}{n+1}$$

であることがわかる．要するにどちらの場合でも，$m > n$ ならば

$$|c_m - c_n| \le \frac{1}{n+1}$$

が成り立つと言える．よって，

$$\text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して}, N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon} \text{ と決めると}, \Big(m, n > N(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |c_m - c_n| < \epsilon\Big) \text{ が成り立つ}$$

が証明できた．(c_n) はこのようにコーシー列であり，従って，収束する．

(4) この問題も (3) と同じように解ける．(3) と同様の計算を行うと

$$d_m - d_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} = (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n+4}} - \cdots \pm \frac{1}{\sqrt{m}}\right]$$

となる（最後の $\pm$ は，$m - n$ が偶数ならマイナス，奇数ならプラス）．またもや (3) と同様に議論すると，$m - n$ が偶数でも奇数でも，

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}} + \frac{1}{\sqrt{n+3}} - \frac{1}{\sqrt{n+4}} - \cdots \pm \frac{1}{\sqrt{m}} \le \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

が言える．従って，

$$\text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して}, N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^2} \text{ と決めると}, \Big(m, n > N(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |d_m - d_n| < \epsilon\Big) \text{ が成り立つ}$$

が証明できた．(d_n) はこのようにコーシー列であり，従って，収束する．

特に注意：

- 数列の収束をいうには，有界性だけでも単調性だけでも不足で，**両方が必要**です．当たり前に見えたのかもしれないけど，この両方はきちんと念を押しましょう．
- この問題のような和の場合，和の中身の各項がゼロに行っても，和の結果が有界とは限りません（(1) のように）．この点，間違った人がある程度いたので，よくよく，注意しましょう．

5 月 25 日：微分の 2 回目です．テイラー展開の基礎となる,「平均値の定理」を中心にやります．今日は,「テイラーの定理」を黒板に書いたくらいで終わりました．

授業では，ここに「レポート問題」を書いたプリントを配りましたが，結果的に，レポート問題を十分に解けるまで授業が進まなかったので，今週はレポート問題は出題しません．

——————先週のレポートの略解——————

問 9： 大体は前回の問題と同じなので，簡単にします．

「有界な単調数列は収束する」を用いる方法

(1) 和の中身は正なので，この数列は単調増加である．さらに，これから示すように，これは上に有界である．従って，収束する．以下，有界性の証明：

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3} = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} \le 1 + \int_1^n \frac{1}{x^3} dx = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n^2} \le \frac{3}{2}$$

となるから．(証明終わり)

積分を使わないやり方としては，例えば，$k^3 \ge k(k^2-1) = (k-1)k(k+1)$

$$a_n = 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^3} \le 1 + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{(k-1)k(k+1)} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{(k-1)k} - \frac{1}{k(k+1)} \right] = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2n(n+1)} \le 1 + \frac{1}{2}$$

などとする手もある．

(2) n が偶数のとき，$n = 2m$ と書くと，

$$b_{2m} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}} = \sum_{l=1}^{m} \left(\frac{-1}{\sqrt[3]{2l-1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{2l}} \right) = -\sum_{l=1}^{m} \frac{\sqrt[3]{2l} - \sqrt[3]{2l-1}}{\sqrt[3]{2l-1}\,\sqrt[3]{2l}}$$

となる．ここで分子を有理化したい．$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ を用いて，

$$b_{2m} = -\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\sqrt[3]{2l-1}\,\sqrt[3]{2l}\,\{(\sqrt[3]{2l-1})^2 + \sqrt[3]{2l-1}\sqrt[3]{2l} + (\sqrt[3]{2l})^2\}}$$

を得る．これで b_{2m} が単調減少であることが言えた．次に，これが下に有界であることを言いたい．要するにこの和を上から押さえたいので，分母を少し簡単にして

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\sqrt[3]{2l-1}\,\sqrt[3]{2l}\,\{(\sqrt[3]{2l-1})^2 + \sqrt[3]{2l-1}\sqrt[3]{2l} + (\sqrt[3]{2l})^2\}} \le \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\sqrt[3]{2l-1}\,\sqrt[3]{2l}\,(\sqrt[3]{2l})^2} = \sum_{l=1}^{m} \frac{1}{\sqrt[3]{2l-1}\,2l}$$
$$= \frac{1}{2} + \sum_{l=2}^{m} \frac{1}{\sqrt[3]{2l-1}\,2l} \le \frac{1}{2} + \sum_{l=2}^{m} \frac{1}{l^{4/3}}$$

などとする．この右辺の和は積分を使って，例えば

$$\sum_{l=2}^{m} \frac{1}{l^{4/3}} \le \int_1^m \frac{1}{x^{4/3}} dx = 3\Bigl(1 - m^{-1/3}\Bigr) \le 3$$

などと押さえられるので，b_{2m} が下に有界であることも言えた．結果として下に有界で単調現象なので，(b_{2m}) は収束する．

最後に，$b_{2m+1} - b_{2m} = \dfrac{-1}{\sqrt[3]{2m+1}}$ は $m \to \infty$ でゼロに行くから，b_{2m+1} も同じ極限に収束する．

(2) に対するかっこいい方法 もやはり存在するが，これは前回の $(c_n), (d_n)$ と全く同じなので，略．

「コーシー列か否か」を用いる方法

(1) 任意の $m > n$ に対して

$$a_m - a_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^3} = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^3} \le \int_n^m \frac{1}{x^3} dx = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right] \le \frac{1}{2n^2}$$

である．$a_m - a_n$ は正でもあるから，これから

$$\text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して}, N(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \text{ と決めると}, \Big(m, n > N(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |a_m - a_n| < \epsilon\Big) \text{ が成り立つ}$$

が証明できた．(a_n) はこのようにコーシー列であり，従って，収束する．

(2) 前回の (c_n)，(d_n) とほとんど同じである．前回同様の計算を行うと

$$b_m - b_n = \sum_{k=n+1}^{m} \frac{(-1)^k}{\sqrt[3]{k}} = (-1)^{n+1}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+4}} - \cdots \pm \frac{1}{\sqrt[3]{m}}\right]$$

となる（最後の $\pm$ は，$m - n$ が偶数ならマイナス，奇数ならプラス）．前回と同様に議論すると，$m - n$ が偶数でも奇数でも，

$$0 < \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n+3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{n+4}} - \cdots \pm \frac{1}{\sqrt[3]{m}} \le \frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}$$

が言える．従って，

$$\text{任意の } \epsilon > 0 \text{ に対して}, N(\epsilon) = \frac{1}{\epsilon^3} \text{ と決めると}, \Big(m, n > N(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |b_m - b_n| < \epsilon\Big) \text{ が成り立つ}$$

が証明できた．(b_n) はこのようにコーシー列であり，従って，収束する．

特に注意：

- （しつこいけど）数列の収束をいうには，有界性だけでも単調性だけでも不足で，**両方が必要**です．当たり前に見えたのかもしれないけど，この両方はきちんと念を押しましょう．

問 10： 単なる計算問題で，大抵の人はできてましたが，10 人弱，色々と間違った人がいました．特に，「合成函数の微分」がアヤフヤになってる人が数人いたようです．そういう人は，この機会に高校の復習をやってください！

(1) ともかく微分します．

$$f'(x) = -\sin(x^3) \times (x^3)' = -3x^2 \sin(x^3)$$

これをもう一回微分して（前の x^2 と後ろの $\sin(x^3)$ と，それぞれの微分から 2 項出ることに注意！）

$$f''(x) = -6x \sin(x^3) - 3x^2 \times \cos(x^3) \times 3x^2 = -6x \sin(x^3) - 9x^4 \cos(x^3)$$

(2) ともかく微分します．

$$g'(x) = 3(e^{x^2}+1)^2 \times \frac{d}{dx}(e^{x^2}+1) = 3(e^{x^2}+1)^2 \times e^{x^2} \times (x^2)' = 3(e^{x^2}+1)^2 \times e^{x^2} \times 2x = 6x\, e^{x^2} (e^{x^2}+1)^2$$

6 月 1 日：今日はテイラーの定理とテイラー展開です．高校ではやってないはずなので，しっかり勉強して下さい．中間試験についての**現時点での暫定的な**情報は以下の通りです．

- 中間試験は，今やってる「微分」が完了した後，一週間程度の期間を置いてから行います．
- 試験日は今の所，6/22 または 6/29 の可能性が高いですが，これは**まだまだ変更の可能性もある**ので，今後のアナウンスに注意してください．
- 試験場所は（恐らく，いまの教室では小さすぎるので）別の大きな教室にする予定です．
- 試験範囲は，これまでにやった「極限」「微分」です．「微分」には当然，「テイラー展開」なども含みます．
- 何度も強調したように，「極限の厳密な理論」ができなくても十分に単位が出せる問題にします．
- 具体的には，「高校のノリで微分を計算する」「高校のノリで極限を計算する」「与えられた関数をテイラー展開する」（これ以外にも付け加える可能性あり；来週以降に注意）などの計算問題が半分以上（2/3 以上？）になります．なので，高校での範囲も含めて，「計算がしっかりできる」ようにはなってください．（計算問題が壊滅的では，どうしようもありません．）
- 「極限の厳密な理論」に関する問題もちょっと（1/3 くらいとか）出します．
- なお，最終成績をどのように出すか，などは最初に宣言した通りです．
- より詳しくは追い追い，アナウンスします．

第 5 回レポート問題：一回は自分で手を動かしてやっておくべきものです．なお，以下の問題で「最初のゼロでない 3 項」とは，例えば展開の結果が（$x = a$ の周りでの展開の場合）

$$f(x) = c_1(x-a) + c_5(x-a)^5 + c_9(x-a)^9 + c_{13}(x-a)^{13} + \cdots$$

となっていた場合，最初の 3 項，つまり

$$c_1(x-a) + c_5(x-a)^5 + c_9(x-a)^9$$

の部分を指します（テイラー展開した結果，その係数がゼロであった項は数えないで，最初から 3 項の意味）．

問 11： （テイラー展開の計算問題）以下の関数を，$x = 0$ の周りでテイラー展開した場合の，最初のゼロでない 3 項を求めよ．（公式通りに地道に計算すること．）

$$f(x) = e^x, \qquad g(x) = \sin(x), \qquad h(x) = \cos(x), \qquad p(x) = \sqrt{1+x}$$

問 12： （テイラー展開の応用）

(1) $f(x) = \sin(x)$ を，$x = a$ の周りでテイラー展開した場合の，最初のゼロでない 3 項を求めよ．ここで a は定数である．

(2) $\sin(31^\circ)$ の値を小数点以下 2 桁まで正確に求めよ（31° とは度数法 —— 円周一周が 360° —— での角度である）．この際，$\sin(x)$ の $x = \pi/6$ の周りでのテイラー展開を用いて考えると良い．
数値計算には電卓を使用してよい．

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，

6 月 6 日（水）の 13:00 までに，基幹教育事務室のレポートボックス 5 番に

折らないで入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

6 月 8 日：今日はテイラーの定理とテイラー展開の 2 回目です．引き続きしっかり勉強して下さい．中間試験についての**現時点での暫定的な**情報は以下の通りです．

- 中間試験は，今やってる「微分」が完了した後，一週間程度の期間を置いてから行います．
- 試験日は暫定的に 6/22 に決めました．来週の 6/15 に正式決定の予定．
- **試験場所は 2305** にします（ゆったり試験を受けてもらうため；講義では言えなかった新しい情報）．
- 試験範囲は，これまでにやった「極限」「微分」です．「微分」には当然,「テイラー展開」なども含みます．
- 何度も強調したように,「極限の厳密な理論」ができなくても十分に単位が出せる問題にします．
- 具体的には,「高校のノリで微分を計算する」「高校のノリで極限を計算する」「与えられた関数をテイラー展開する」（これ以外にも付け加える可能性あり；来週に注意）などの計算問題が半分以上（2/3 以上？）になります．なので，高校での範囲も含めて,「計算がしっかりできる」ようにはなってください．(計算問題が壊滅的では，どうしようもありません.)
- 「極限の厳密な理論」に関する問題もちょっと（1/3 くらいとか）出します．
- なお，最終成績をどのように出すか，などは最初に宣言した通りです．
- 今後のアナウンス（web page を含む）にも注意してください．

第 6 回レポート問題： 以下の問題で「最初のゼロでない 3 項まで」とは，例えば展開の結果が（$x = a$ の周りでの展開の場合）

$$f(x) = c_1(x-a) + c_5(x-a)^5 + c_9(x-a)^9 + c_{13}(x-a)^{13} + \cdots$$

となっていた場合，最初の 3 項，つまり

$$c_1(x-a) + c_5(x-a)^5 + c_9(x-a)^9$$

の部分を指します（テイラー展開した結果，その係数がゼロであった項は数えないで，最初から 3 つの意味）．

問 13： （テイラー展開の計算問題）以下の関数を，$x = 0$ の周りでテイラー展開した場合の，最初のゼロでない 3 項までの和を書け．

$$f(x) = \sin(x^2), \qquad g(x) = \tan(x^3), \qquad h(x) = \sqrt{1+x^3},$$

問 14*： （テイラー展開の応用）次の極限を求めよ．(ロピタルやっても良いけどね...)

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x^3} + \sqrt{1-x^3} - 2}{\tan(x^2) - \sin(x^2)}$$

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，

6 月 13 日（水）の 13:00 までに，基幹教育事務室のレポートボックス 5 番に

折らないで入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

——— 先週のレポートの略解 ———

原が意図した形の答えでないものもありましたが，一理あるので，それらはもちろん，不利にならないように配慮しています．以下のコメントなども参照してください．

問 11： 題意について：「最初の 3 項と求めよ」と言った場合，(それが $a_1 + a_2 + a_3$ だった時），原は単に「和の形で」$a_1 + a_2 + a_3$ と書いて欲しかったのですが，皆さんのなかには a_1, a_2, a_3 と書いた人もいました．確かに「最初の 3 項」だからこれが正しいかもしれません．なので，不利にならないように採点しました． 「最初の 3 項までの和」と書けば問題ないとは思うのですが，「その和を綺麗に整形する必要がある」などと余分な心配を呼ぶ可能性もあるので躊躇してしまいました．

(1) 微分すると

$$f(x) = e^x,\ f'(x) = e^x,\ f^{(2)}(x) = e^x, \dots$$

であるから，いつまで微分しても e^x のままである．よって，テイラーの定理の主要項（ゼロでない最初の 3 つ）は

$$1 + x + \frac{x^2}{2}$$

である．

(2) 微分すると

$$g'(x) = \cos x, \quad g''(x) = -\sin x, \quad g^{(3)}(x) = -\cos x, \quad g^{(4)}(x) = \sin x = g(x) \qquad \text{（以下，繰り返し）}$$

となる．注意すべきは，$x = 0$ にすると，偶数階の微係数がみんなゼロになること．なので，答えは

$$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$$

である．

(3) 同様に計算する．今回は奇数階の微係数がゼロになるので，答えは

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

である．

(4) 微分すると

$$p'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad p''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}, \quad p'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2}$$

などとなっている（2 階微分までで十分だったが）．答えは

$$1 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2!}\Big(-\frac{1}{4}\Big)x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

である．

問 12： 題意について：(2) で「小数点以下 2 桁」と言った場合，四捨五入するのか，それとも 3 桁目以上を切り捨てるのか，確かに曖昧でした．原の周囲では「四捨五入」派が大多数であることは確実ですが，「3 桁目以上を切り捨て」派もいるのかもしれません．もちろん，採点ではどちらも満点にしています． （最初，「四捨五入して！」と書いて減点していましたが，減点しない方針に変更しました．）

(1) テイラーの公式から

$$\sin(a) + \frac{1}{1}\cos(a)\,(x-a) - \frac{1}{2!}\sin(a)\,(x-a)^2 = (\sin a) + (\cos a) \times (x-a) - \frac{(\sin a)}{2}\,(x-a)^2$$

が答え．

（補足）$a = 0$ などの特殊な場合はゼロの項がでてくるのでもっとややこしくなりますが，そこまでは要求するつもりはなかったです．ちゃんとやった人は，大変に良かったと思います．そのような特殊な場合も考えた答えは以下の通りです．

$a = n\pi$（n は整数）とかける場合：

$$(\cos a) \times (x-a) - \frac{(\cos a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{(\sin a)}{5!}(x-a)^5 = (\cos a) \times \Big[(x-a) - \frac{1}{3!}(x-a)^3 + \frac{1}{5!}(x-a)^5\Big]$$

$a = (n+\frac{1}{2})\pi$（n は整数）とかける場合：

$$(\sin a) - \frac{(\sin a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{(\sin a)}{4!}(x-a)^4 = (\sin a) \times \Big[1 - \frac{1}{2!}(x-a)^2 + \frac{1}{4!}(x-a)^4\Big]$$

上の 2 つ以外の場合：

$$(\sin a) + (\cos a) \times (x-a) - \frac{(\sin a)}{2}(x-a)^2$$

(2) すべて弧度法（ラジアン）に直して計算する．

$$a = 30^\circ = \frac{\pi}{6}, \qquad x = 31^\circ = \frac{\pi}{6} \times \frac{31}{30} = \frac{31}{180}\pi, \qquad x-a = 1^\circ = \frac{\pi}{180}$$

として，(1) の式を用いると（本当は残項を考えるべきだが，この問題ではそこは無視して良いことにする）

$$\sin(31^\circ) \approx \sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big) + \cos\Big(\frac{\pi}{6}\Big) \times \frac{\pi}{180} - \frac{1}{2}\sin\Big(\frac{\pi}{6}\Big) \times \Big(\frac{\pi}{180}\Big)^2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{180} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \Big(\frac{\pi}{180}\Big)^2 \approx 0.51503884034700513827$$

となるので，答えは $0.515 \approx 0.52$.（正確な値は $\sin(31^\circ) = 0.51503807491005421008\ldots$）

（補足）残項まで考えて，きちんと誤差評価をすると，以下のようになります．残項まで入れたテイラーの公式は

$$\sin x = (\sin a) + (\cos a) \times (x-a) - \frac{(\sin a)}{2}(x-a)^2 - \frac{(\cos \xi)}{6}(x-a)^3 \qquad (\xi \text{ は } a \text{ と } x \text{ の間})$$

となっている．この残項の大きさはどのくらいか，が問題であるが，一番簡単には $0 < \xi < \pi/2$ より $0 < \cos\xi < 1$ を用いて，$x > a$ では

$$0 < \frac{(\cos \xi)}{6}(x-a)^3 \le \frac{(x-a)^3}{6} = \frac{1}{6}\Big(\frac{\pi}{180}\Big)^3 \approx 8.86 \times 10^{-7}$$

などとすれば良い．これによると，この残項を考えに入れて厳密に

$$\sin(31^\circ) \le \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{180} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \Big(\frac{\pi}{180}\Big)^2 \approx 0.51503884034700513827$$

および

$$\sin(31^\circ) \ge \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\pi}{180} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \Big(\frac{\pi}{180}\Big)^2 - \frac{1}{6}\Big(\frac{\pi}{180}\Big)^3 \approx 0.51503795425084943697$$

が得られる．これを見ると，小数点以下 2 桁どころか 5 桁までは確実にとれていることがわかる．

（注意）

- しょうもない計算間違いをした人が，何人かいました．また，途中計算では正しくできているのに，最終結果を書くところで $\pm$ を間違うなどのミスも目立ちました — 特に，[11](4)．注意しましょう．
- 計算間違いでも目立つのが，分母の $k!$ を忘れるケースです．注意しましょう．
- $2! = 4(??)$ だと思ってる人が 5 人以上いるようです...
- 上の間違いがあったので，試験で同様の問題を出した時は，$2!, 3!$ **などの具体的数値を書いた結果を要求**することにします.（今回，$2!, 3!$ などのままで [11](2)(3) の答えを書いた人のうち，その後で $2! = 4(??)$ が発覚した人がいますが，減点してません．ですが，試験の場合には，これをしっかり $2! = 2, 3! = 6$ などの値を入れた結果まで書いてもらいたい，ということです.）もちろん，もし一般的な $n!$ などが出てくる答えの場合には，$n!$ のままで置いておいて大丈夫です．
- 問 12(2) では，弧度法に直さなかった人が 10 人近くいました．$\sin 31^\circ$ が 0.5 から非常に離れてたらおかしいと思わないかなあ...

6 月 15 日：今日は偏微分に入ります.
中間試験についての情報は以下の通りです.

- **試験日は 6/22** に決めました.
- **試験場所は 2305** にします.
- 試験範囲は，これまでにやった「極限」「微分」です.「微分」には当然,「テイラー展開」なども含みます.「偏微分」は中間試験の範囲ではありません.
- 何度も強調したように,「極限の厳密な理論」ができなくても十分に単位が出せる問題にします.
- 具体的には,「高校のノリで微分を計算する」「高校のノリで極限を計算する」「与えられた関数をテイラー展開する」**など**の計算問題が半分以上（2/3 以上？）になります．なので，高校での範囲も含めて,「計算がしっかりできる」ようにはなってください.（計算問題が壊滅的では，どうしようもありません.）
- （上への補足）ただし,「見かけは極限の問題だけど，テイラー展開をしないと解き難い（レポートの 14 番みたいに)」なども出る可能性があります．習ったことを十分に習得しておれば解ける問題ばかりであるのは確かですが.
- （補足 2）授業中に言ったように,「函数の極値問題」は中間試験では出題しません（高校で散々やってるはずなので）.
- 「極限の厳密な理論」に関する問題もちょっと（1/3 くらいとか）出します.
- なお，最終成績をどのように出すか，などは最初に宣言した通りです.
- まず無いとは思いますが，緊急の予定変更の場合，web page を使う可能性がありますので，注意して下さい.

———————————先週のレポートの略解———————————

問 13： できるだけ，手を抜いて（つまり，効率の良いやり方で）やりましょう．最後に $O(x^{14})$ などを書いてありますが，ここまでは要求していません．ただし，将来の誤差評価のためには，この項も書くようにした方が良いです．以下のいずれも，$X = x^3$ などの置き換えをしないと，ほぼ確実に死にます.

$f(x)$ について.

$$\sin(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + O(t^7)$$

であるところに $t = x^2$ を代入して

$$\sin(t) = x^2 - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^{10}}{5!} + O(x^{14})$$

が答え.

$g(x)$ について.

ともかく，$\tan(t)$ の展開を求めた上で，$t = x^3$ とおきましょう．微分しない方法をまず，示します.

$$\tan(t) = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + O(t^7)}{1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + O(t^6)}$$

である．分母を扱うために $X = \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + O(t^6)$ として考えると，分母は

$$\frac{1}{1-X} = 1 + X + X^2 + O(X^3) = 1 + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^4}{4!} + \frac{t^4}{4} + O(t^6) = 1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{5}{24}t^4 + O(t^6)$$

とわかる．従って

$$\tan(t) = \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + O(t^7)\right) \times \left(1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{5}{24}t^4 + O(t^6)\right) = t + \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{15}t^5 + O(t^7)$$

が得られる．従って，

$$\tan(x^3) = x^3 + \frac{1}{3}x^9 + \frac{2}{15}x^{15} + O(x^{21})$$

が答え．

（上の variation）おそらく上のやり方が一番簡単だと思いますが，最初から級数の形に置いてしまって，係数を決める方法もあります．まず，$\tan t$ は t の**奇函数**であることに注意すると，展開した場合には t **の奇数次**しかでてこないはず．なので，

$$\tan(t) = at + bt^3 + ct^5 + O(t^7)$$

と仮定して（a, b, c はこれから決める定数）みる（もしこれで「最初のゼロでない 3 項」に足りないなら，dt^7 なども後で加える）．結果

$$at + bt^3 + ct^5 + O(t^7) = \tan(t) = \frac{\sin t}{\cos t} = \frac{t - \dfrac{t^3}{3!} + \dfrac{t^5}{5!} + O(t^7)}{1 - \dfrac{t^2}{2!} + \dfrac{t^4}{4!} + O(t^6)}$$

となる．この両辺が等しいように，a, b, c を決めたい．そのためには分母を払ってしまうのが簡単だろう．分母を払うと

$$\Bigl\{at + bt^3 + ct^5 + O(t^7)\Bigr\} \times \Bigl\{1 - \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + O(t^6)\Bigr\} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + O(t^7)$$

ということになる．左辺を展開すれば

$$at + \Bigl(b - \frac{1}{2!}a\Bigr)t^3 + \Bigl(c - \frac{1}{2!}b + \frac{1}{4!}a\Bigr)t^5 + O(t^7) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + O(t^7)$$

これが成り立つためには,「5 次より高く近似」する多項式の一意性により，両辺の係数が等しくなければならない．つまり，

$$a = 1, \qquad b - \frac{1}{2!}a = -\frac{1}{3!}, \qquad c - \frac{1}{2!}b + \frac{1}{4!}a = \frac{1}{5!}$$

ということである．これを a, b, c の順に解けば，

$$a = 1, \qquad b = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} = \frac{1}{3}, \qquad c = \frac{1}{5!} + \frac{1}{2!}\frac{1}{3} - \frac{1}{4!} = \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{20 - 5 + 1}{5!} = \frac{16}{5!} = \frac{2}{15}$$

となって，$\tan(t) = at + bt^3 + ct^5 + O(t^7)$ に代入すると答えを得る．

（ガンガン微分する方法）もちろん，$q(t) = \tan t$ を何回も微分して，テイラーの公式を用いても良いが，かなり計算が大変だ．コンピューターに聞いた結果は以下の通り．(最近は高校でやらないかもしれないけど，$\sec(t) = 1/\cos(t)$ です)

$$q'(t) = \sec t, \qquad q''(t) = 2\bigl(\sec t\bigr)^2\ \tan t, \qquad q^{(3)}(t) = 2\bigl(\sec t\bigr)^4 + 4\bigl(\sec t\bigr)^2\ \bigl(\tan t\bigr)^2$$

$$q^{(4)}(t) = 16\bigl(\sec t\bigr)^4 \tan t + 8\bigl(\sec t\bigr)^2\ \bigl(\tan t\bigr)^3, \qquad q^{(5)}(t) = 16\bigl(\sec t\bigr)^6 + 88\bigl(\sec t\bigr)^4\ \bigl(\tan t\bigr)^2 + 16\bigl(\sec t\bigr)^2\ \bigl(\tan t\bigr)^4$$

$t = 0$ にすると当然のことながら偶数階の微分はゼロで

$$q'(0) = 1, \qquad q''(0) = 0, q^{(3)}(0) = 2, q^{(4)}(0) = 0, q^{(5)}(0) = 16$$

となる．あとはテイラーの公式に入れて，分母の $k!$ などを忘れずに計算すると，答えにたどり着く．

$h(x)$ について．

前回，

$$\sqrt{1+t} = 1 + \frac{1}{2}t - \frac{1}{8}t^2 + O(t^3)$$

を得たので，$t = x^3$ として

$$\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{8}x^6 + O(x^9)$$

を得る．

問 14： ともかく，分母子ともにテイラー展開しよう．どのくらいの次数までやるべきかは，やってみないとわからないが，まあ，x^6 や x^9 くらいまで見てみて，足りなかったらまた考える．なお，以下の計算では $\sqrt{1-x^3}$ などが必要になるが，これらは $t=-x^3$ と置いてみれば，$\sqrt{1-x^3}=\sqrt{1+t}$ となって，問 13 での計算がそのまま使える．

分母は

$$\tan(t)-\sin(t)=t+\frac{1}{3}t^3+\frac{2}{15}t^5+O(t^7)-\left\{t-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^5}{5!}+O(t^7)\right\}=\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{8}t^5+O(t^7)$$

より

$$\tan(x^2)-\sin(x^2)=\frac{1}{2}x^6+O(x^{10}).$$

（分母，分子とも，ゼロでない最初の項まで見れば十分である — 本当に十分かは以下のようにやってみないとわからないが — ので，x^6 までをとった．ただしこの場合も，誤差をしっかり評価するために，$O(x^{10})$ などを明記するのが良い．）

分子も同様に，

$$\sqrt{1+x^3}+\sqrt{1-x^3}-2=1+\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^6+O(x^9)+\left\{1-\frac{1}{2}x^3-\frac{1}{8}x^6+O(x^9)\right\}-2=-\frac{1}{4}x^6+O(x^9)$$

とわかる．従って，求める極限は

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}x^6+O(x^9)}{\frac{1}{2}x^6+O(x^{10})}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{4}+O(x^3)}{\frac{1}{2}+O(x^4)}=\frac{-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}=-\frac{1}{2}$$

とわかる．

（注）闇雲にロピタルを使おうとすると分母と分子を 6 回微分しないといけないので（なぜ 6 回とわかるかというと，上の計算で分母子が x^6 から始まってるから），たいていの人は死ぬと思います．一応，僕もやって（正確にはコンピューターに計算させて）みましたが，あまりに式が汚いのでここに書く気をなくしました．もちろん，分母を分子を別々に考えるつもりで，分子では $x^3=t$，分母では $x^2=t$ とおくなどの工夫をすれば，分子は 2 回，分母は 3 回の微分で済みます．でもそこまで知恵のある人なら，迷わずにテイラー展開をしましょう —ロピタルというのも，煎じ詰めればテイラー展開を使ってるわけだから．

7 月 6 日：今日は連鎖律と高階の偏導函数です．テイラー展開に入る予定でしたが，緊急通報などを考慮して，16:00 ごろに切り上げました．(とはいえ，みなさんは 5 限もあったようですね...)
なお，火曜日の 15:00 以降は，原が自室（W1-C-601）にいる可能性が高いです．質問などに利用してください．

第 7 回レポート問題：(授業で配れなかったもの)

問 15： 以下の偏微分を計算せよ．単なる計算ですが，試験では案外ミスが目立つので．

$$(1) \qquad f(x,y) := x^2 + 3xy + 4xy^2 \qquad \text{の時に} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} \quad \text{と} \quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$(2) \qquad g(x,y,z) := x^3 \times e^{y^2+z^3+xy} \qquad \text{の時に} \qquad \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{と} \quad \frac{\partial g}{\partial z}$$

問 16：

$$f(x,y) := \sin(x^2 + xy), \quad x(u,v) = u^3 + v^2, \qquad y(u,v) = uv$$

と定義して，合成関数 $g(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$ を考える．このときに偏微分 $\dfrac{\partial g}{\partial u}$ と $\dfrac{\partial g}{\partial v}$ を計算せよ．闇雲にやってもできますが，できれば連鎖律の練習問題としてやってほしい．(その方が間違いも少ないはず．)

問 17： 2 変数の関数 $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ を考える．また変数 x, y と変数 r, θ は平面の曲座標の関係，つまり $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ を満たしているものとする．このとき，合成関数 $h(r,\theta) = f\bigl(x(r,\theta), y(r,\theta)\bigr)$ の，変数 r と θ に関する一次偏導関数をそれぞれ計算せよ．結果にはもちろん，$\frac{\partial x}{\partial r}$， $\frac{\partial y}{\partial r}$ などの偏微分が登場するだろう．

なお，微分できない点があるかもしれないが，今はそれは無視して良い．つまり，微分できる点で偏導関数を求めればよい．

（ヒント）合成関数の微分法（連鎖律）を用いて計算することをまずはやってほしいが，h を r, θ の関数として具体的に書き下してから偏微分してもできる．余力のある人は，両方やってみることをお奨めしたい．

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，

7 月 11 日（水）の 13:00 までに，基幹教育事務室のレポートボックス 5 番に

折らないで入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

7 月 13 日：今日は主に多変数函数のテイラー展開＋極値問題です．
なお，火曜日の 15:00 以降は，原が自室（W1-C-601）にいる可能性が高いです．質問などに利用してください．(ただし，7/17 は 16:00 以降はセミナー出席のため不在.)
期末試験についての**暫定的情報（変更の可能性あり）**は以下の通りです．

- **試験日時と場所は，大学指定の** 通り．
- 試験範囲は，これまでにやった「極限」「微分」「偏微分」です．「微分」「偏微分」には当然，「(多変数函数の）テイラー展開」なども含みます．**7/20 に変更：「極値問題」は範囲外とします．**
- 何度も強調したように，「極限の厳密な理論」ができなくても十分に単位が出せる問題にします．
- 具体的には，「与えられた函数を（偏）微分する」「与えられた極限を計算する」「与えられた（多変数）函数をテイラー展開する」**など**の計算問題が大半（2/3 以上？）になります（以上はあまり厳密性は要求しない）．なので，高校での範囲も含めて，「計算がしっかりできる」ようにはなってください．(計算問題が壊滅的では，どうしようもありません.)
- （上への補足）ただし，「見かけは極限の問題だけど，テイラー展開をしないと解き難い問題」なども出る可能性があるのは中間試験と同じです．習ったことを十分に習得しておれば解ける問題ばかりであるのも中間試験と同じです．
- 「極限の厳密な理論」に関する問題もちょっと（1/3 くらい以下？）出します．
- なお，最終成績をどのように出すか，などは最初に宣言した通りです．
- 緊急の予定変更の場合，この科目の web page を使う可能性がありますので，注意して下さい．

期末試験では「A4 の紙一枚（片面だけに書いたもの；原則として手書きだが，自分の「オリジナルまとめ」をコンピューターなどで打ち込んだものも可)」の持ち込みを認めます．学生番号と氏名を書いて，試験当日，答案とともに提出して下さい．「自分は持ち込み無しで受ける」という人は，学生番号と名前を書いた「A4 の紙」を提出して下さい．

（補足説明）

- 原則として，持ち込み用紙は採点しません．ただし，(以下の方針から判断して）非常に良いものを作った場合には，ホンの少しだけ良いことがあるかもしれません．
- 持ち込みを認める理由：ある程度の分量の概念を学習したため，**持ち込み用紙を自分で書いて，全体を整理して勉強する手助けとしてもらいたい**，というのが最大の狙いです．
- 「持ち込み用紙を自分で準備することを通して勉強する」ことが最大の狙いですから，皆さんには，自分で持ち込み用紙を準備する事を奨めます．友達と協力して持ち込み用紙を作成した場合は，**「○○さんと一緒に作りました」と明記**して下さい．このような明記がないのに非常によく似たものが複数現れた場合，また，酷似したものがネットにあった場合，には，それなりの措置を講じるかもしれません．
- まちがっても，「試験対策委員の作成したものを多数の人間が持ち込む」などはやらないでくださいね．しつこいけども，自分で勉強してまとめる，のが最大の目的です．試験対策委員の作ったものを持ち込んでも何の役にも立ちません．(自分でまとめが作れない人は，その程度の実力だということです．その時点で諦めるか，死にものぐるいで勉強するかしかないでしょう.)
- 例題とその解答を延々と書く事はルール違反ではないけども，勉強にならないので，お勧めしません．(書くなら，要点だけを書くのが良い.) あまりに酷い場合には減点する可能性があります．
- なお，このように持ち込み用紙は提出してもらうので，提出前にコピーを取っておく方が無難です — 持ち込み用紙も答案と一緒に返却の予定ですが，返却までのタイムラグがありますから（特に再調査をやる場合，再調査までに勉強し直したい人は注意してください）．

言わずもがなの注意：持ち込みを認めるのは，半年にしてはそこそこの分量をやったからです．決して「持ち込みだから楽勝」などと思わないでください．

第 8 回レポート問題：時間の関係で，これが最後のレポート問題となるでしょう．

問 18： 2 次元極座標を考える．つまり，普通の x, y 座標を，動径の長さ r と角度 θ を用いて

$$x = r\,\cos\theta, \qquad y = r\,\sin\theta \qquad\qquad (-\pi < \theta \le \pi)$$

と書くのである．今，x, y の 2 変数の函数 $f(x, y)$ が与えられているとし，x, y を上のように極座標で表して新しい函数

$$g(r, \theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

を定義する．このとき，以下の 2 階偏微分で書かれた量を，「r, θ に関する g の適当な偏微分」を用いて表せ（「適当な偏微分」には，2 階以上の偏微分も含む可能性がある）：

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

このような書き換えは，皆さんが「量子力学」または「量子化学」を学ぶ際に必ず出会うであろう．

注意：2 階も偏微分するところが大変，かつ非常に間違いやすいので注意．

問 19： 函数 $f(x, y) = (1 + 2x + y)^{1/3}$ の，$x = y = 0$ の周りの 2 次までのテイラー展開を，以下の二通りの方法で求めよ．(「2 次までの展開」とは，x, y の合計次数が 2 次以下の項を全て求める，という事である．つまり，$0, x, y, x^2, xy, y^2$ までの項を求める．ただし，「和の形」で書けば良い．)

(1) 「2 変数函数のテイラー展開」の公式を用いて求めてみる．

(2) 適当な変数に置き直して，1 変数函数のテイラー展開として求める．

もちろん，(2) の方が簡単なのだが，ここは 2 変数函数の練習問題として，(1) もやって欲しい．

番外問題：これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります．

レポート提出について：

レポートには**学生番号と氏名を明記**のうえ，

7 月 18 日（水）の 13:00 までに，基幹教育事務室のレポートボックス 5 番に

折らないで入れて下さい．整理の都合上，用紙は A4（この用紙と同じ大きさ）を使ってください．また，2 枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ．

———————————— 先週のレポートの略解 ————————————

問 15： 単に微分するだけで，何のひねりもありませんが，数人の人が間違ってました．

(1)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y + 4y^2, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 8xy$$

(2)

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 3x^2 e^{y^2+z^3+xy} + x^3 e^{y^2+z^3+xy} y = (3x^2 + x^3 y)\, e^{y^2+z^3+xy}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = x^3\, e^{y^2+z^3+xy}\, (3z^2) = 3x^3 z^2 e^{y^2+z^3+xy}.$$

問 16： 連鎖律を使いましょう．

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(u,v)}{\partial u} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \cos(x^2+xy)\,\times\,(2x+y)\times 3u^2 + \cos(x^2+xy)\,\times\,x\times v \\ &= \cos(x^2+xy)\,\times\,\{(2x+y)\,3u^2 + xv\} \qquad \text{ここで}\quad x=u^3+v^2,\quad y=uv \\ &= (6u^5+4u^3v+6u^2v^2+v^3)\,\cos\bigl((u^3+v^2)(u^3+uv+v^2)\bigr)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial g(u,v)}{\partial v} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = \cos(x^2+xy)\,\times\,(2x+y)\times 2v + \cos(x^2+xy)\,\times\,x\times u \\ &= \cos(x^2+xy)\,\times\,\{(2x+y)\,2v + xu\} \qquad \text{ここで}\quad x=u^3+v^2,\quad y=uv \\ &= \ (u^4+4u^3v+3uv^2+4v^3)\cos\bigl((u^3+v^2)(u^3+uv+v^2)\bigr)\end{aligned}$$

上の答えは x, y の中に「ここで...」の中身を代入して最後の形にしても良いし，最後から 2 行目で止めていても良いです（後の注意参照）．将来，このような式を実際にコンピューター上で使う場合など，x, y などでまとめた形にしておいた方が間違いもなくて便利でもあります．

問 17： 「曲座標」というのはもちろん,「極座標」の間違いでした．指摘してくれた人，どうもありがとう．ともかく連鎖律を用いましょう．

f の x, y による偏微分を計算しておくと（計算途中でできるだけ綺麗にまとめておくことが肝要），

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{1}{2}xy(x^2+y^2)^{-3/2}2x = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}$$

である．また，

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

である．従って，連鎖律から

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(r,\theta)}{\partial r} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} = \frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\cos\theta + \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,\sin\theta = \sin^3\theta\,\cos\theta + \sin\theta\,\cos^3\theta \\ &= \sin\theta\,\cos\theta\,(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2 = \sin\theta\,\cos\theta = \frac{1}{2}\sin(2\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial h(r,\theta)}{\partial \theta} &= \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = -\frac{y^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}\,r\sin\theta + \frac{x^3}{(x^2+y^2)^{3/2}}2\,r\cos\theta \\ &= r(\cos^4\theta - \sin^4\theta) = r(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = r\cos(2\theta)\end{aligned}$$

（別解）$h(r,\theta)$ を具体的に書いてみると

$$h(r,\theta) = \frac{r^2\sin\theta\,\cos\theta}{\sqrt{r^2}} = \frac{r}{2}\sin(2\theta)$$

となって，まあ，簡単なのだった．という訳で，普通に偏微分して

$$\frac{\partial h(r,\theta)}{\partial r} = \frac{1}{2}\sin(2\theta)$$

$$\frac{\partial h(r,\theta)}{\partial \theta} = \frac{r}{2}\cos(2\theta)\times 2 = r\cos(2\theta)$$

となる．この問題では連鎖律を使わずに直接微分する方が簡単である．

注意：

- 連鎖律を誤解している人（例えば問 17 で，x による偏微分だけを挟んでいる）が数人，見られました．よく復習してください．
- 計算が下手な人（というより，工夫して綺麗に計算しようとしない人）が散見されました．例えば，問 17 の $\frac{\partial f}{\partial x}$ などを綺麗に整理せずに次の段階に進み，結果的にどれかの項を書き落としたり．また，共通因子でくくれるところをくくらないママにしたり... 日頃から分かりやすく間違わない計算法を工夫しておかないと後々困りますよ．
  なお，期末試験においては，今回のレポートと同じく，あまりに汚い（綺麗にまとまってない）結果は減点の対象とします．
- 問 17 のコメントを誤解した人がいたようです（わかりにくい書き方だったかもしれない）．$\frac{\partial x}{\partial r}$ などが登場する，というのは，これを計算する必要はないという意味ではなく，これらが（連鎖律の結果）出てくるよ，という意味でした．

番外問題より：「答えをどの変数で書いたら良いのかわからない」との質問がありました．問 15 の答えは一意ですが，問 16 なら,「すべて u, v に直してしまうか，x, y を部分的に残すか？」問 17 も「すべて r, θ で書くか，x, y を部分的に残すか？」などの自由度はあり得ます．

質問に対する一般的な答えは「どのような変数を使っても，正しい答えなら，一応は良い．ただし，使いやすいように，またわかりやすいように，できるだけ工夫することが望ましい」となります．どのように工夫するか，ということですが...

- 問 17 の場合は，もともと x, y であったものを r, θ で表したい（座標変換したい）ので，すべてを r, θ で書く方が自然です．x, y を下手に残すと，座標変換を仕切れていない感じがするからです．
- 問 16 の方も，座標変換と思えば，すべて u, v で書いてしまうのが自然です．ただ，極座標への変換と違って，すべて u, v で書いてもあまり綺麗になりません．このような場合には，x, y を部分的に残すのもアリです．
- 解答例の途中でも注意したように，結果を数値計算する場合など，下手に u, v に直すより，x, y を残しておいた方がミスが少なくなる可能性もあります．

というわけで，特に良い指針があるわけではありません．間違いが起こりにくいように，用途に応じて適切に工夫することが大事です．どのように表すかも，ある意味，センスの問題です．

7 月 20 日：今日は主にレポートの解説，および逆函数についての補足などです．
なお，火曜日の 15:00-17:00 ごろは，原が自室（W1-C-601）にいる可能性が高いです．必要なら質問などに利用してください．
期末試験についての情報（一応確定のつもり）は以下の通りです．

- **試験日時と場所は，大学指定の** 通り．
- 試験範囲は，これまでにやった「極限」「微分」「偏微分」です.「微分」「偏微分」には当然,「（多変数函数の）テイラー展開」なども含みます．**「偏微分」は「多変数函数のテイラー展開」までです．「極値問題」は範囲外とします．この点，先週のプリントと異なるので要注意です !!**（みなさんのレポートの結果などを見て，あまり無理して範囲にしても良くないと判断しました.）
- 何度も強調したように,「極限の厳密な理論」ができなくても十分に単位が出せる問題にします．
- 具体的には,「与えられた函数を（偏）微分する」「与えられた極限を計算する」「与えられた（多変数）函数をテイラー展開する」**など**の計算問題が大半（2/3 以上？）になります（以上はあまり厳密性は要求しない）．なので，高校での範囲も含めて,「計算がしっかりできる」ようにはなってください.（計算問題が壊滅的では，どうしようもありません.）
- （上への補足）ただし,「見かけは極限の問題だけど，テイラー展開をしないと解き難い問題」なども出る可能性があるのは中間試験と同じです．習ったことを十分に習得しておれば解ける問題ばかりであるのも中間試験と同じです．
- 「極限の厳密な理論」に関する問題もちょっと（1/3 くらい以下？）出します．
- なお，最終成績をどのように出すか，などは最初に宣言した通りです．
- 緊急の予定変更の場合，この科目の web page を使う可能性がありますので，注意して下さい．

期末試験では「A4 の紙一枚（片面だけに書いたもの；原則として手書きだが，自分の「オリジナルまとめ」をコンピューターなどで打ち込んだものも可)」の持ち込みを認めます．学生番号と氏名を書いて，試験当日，答案とともに提出して下さい.「自分は持ち込み無しで受ける」という人は，学生番号と名前を書いた「A4 の紙」を提出して下さい．

（補足説明）

- 原則として，持ち込み用紙は採点しません．ただし,（以下の方針から判断して）非常に良いものを作った場合には，ホンの少しだけ良いことがあるかもしれません．
- 持ち込みを認める理由：ある程度の分量の概念を学習したため，**持ち込み用紙を自分で書いて，全体を整理して勉強する手助けとしてもらいたい**，というのが最大の狙いです．
- 「持ち込み用紙を自分で準備することを通して勉強する」ことが最大の狙いですから，皆さんには，自分で持ち込み用紙を準備する事を奨めます．友達と協力して持ち込み用紙を作成した場合は，**「○○さんと一緒に作りました」と明記**して下さい．このような明記がないのに非常によく似たものが複数現れた場合，また，酷似したものがネットにあった場合，には，それなりの措置を講じるかもしれません．
- まちがっても,「試験対策委員の作成したものを多数の人間が持ち込む」などはやらないでくださいね．しつこいけども，自分で勉強してまとめる，のが最大の目的です．試験対策委員の作ったものを持ち込んでも何の役にも立ちません.（自分でまとめが作れない人は，その程度の実力だということです．その時点で諦めるか，死にものぐるいで勉強するかしかないでしょう.）
- 例題とその解答を延々と書く事はルール違反ではないけども，勉強にならないので，お勧めしません.（書くなら，要点だけを書くのが良い.）あまりに酷い場合には減点する可能性があります．
- なお，このように持ち込み用紙は提出してもらうので，提出前にコピーを取っておく方が無難です — 持ち込み用紙も答案と一緒に返却の予定ですが，返却までのタイムラグがありますから（特に再調査をやる場合，再調査までに勉強し直したい人は注意してください）．

言わずもがなの注意：持ち込みを認めるのは，半年にしてはそこそこの分量をやったからです．決して「持ち込みだから楽勝」などと思わないでください．

―――先週のレポートの略解―――

問 18： まあ，間違いやすいし，計算が大変です．とてもこのままでは試験に出せるものではありません.（試験の際にはもっと時間の要らない問題にしますので，ご安心を.）ただ，これは将来,「量子化学」で出てくるはずですから，そのときのために，一生に一回くらいは計算してもらいたいと思って出しました.

お詫び： 逆三角関数をきちんとやっていなかったのでできなかった人が一定数いたようです．これについては講義で解説します.（逆三角関数を使わなくても，以下のようにできますが...）

（方法 1）正攻法： ともかく，一回微分すると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial y} \qquad (*)$$

である．もう一回微分しないといけないけど，上に出ているいろんな偏微分を先に計算しよう．x, y と r, θ の関係から，我々は

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, \qquad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta, \qquad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta$$

はすぐに計算できる．しかし我々が欲しいのは $\frac{\partial r}{\partial x}$ であり，先週の講義中に注意したように，$\frac{\partial r}{\partial x}$ は $\frac{\partial x}{\partial r}$ の逆数ではないので注意が必要だ．上から出すなら，逆行列の関係を用いて

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & \frac{\partial r}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} & \frac{\partial \theta}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\frac{\sin\theta}{r} & \frac{\cos\theta}{r} \end{pmatrix}$$

を得る（別の出し方は後述）.

これを用いて上の (*) を見ると

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial \theta}, \qquad (**)$$

を得る．これをまた x, y で微分したい．直接微分しても良いし，または形式的に (*) を x で微分して（ここで，$\frac{\partial r}{\partial x}$ などすべてが x, y に依存しうるので連鎖律を使うべきであること，および「積の微分」になってることに注意；(偏微分はその直後の項だけにかかる；これを少しでも表現するために，$\times$ を入れた)

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left[\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial g}{\partial r}\Big)\times\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{\partial g}{\partial r}\Big)\times\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\Big)\times\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{\partial r}{\partial x}\Big)\times\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] \\ &\quad + \left[\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial g}{\partial \theta}\Big)\times\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{\partial g}{\partial \theta}\Big)\times\frac{\partial \theta}{\partial x}\right]\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial \theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\Big(\frac{\partial \theta}{\partial x}\Big)\times\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \theta}\Big(\frac{\partial \theta}{\partial x}\Big)\times\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] \qquad (***)\end{aligned}$$

を用いてもよい（また，y で 2 階偏微分したものは，上で x を y に変えれば良い）．正直，この (***) を使うのはそれほど効率が良くないけども,「これだけたくさんの微分をする必要がある」ことを示すには適していると思ったので書いてみた.

計算が大変で死にそうだが，ともかく頑張って (**) や (***) に具体的な偏微分を放り込んでいくと（偏微分はその直後の項だけにかかる）

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \left[\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\Big(-\frac{\sin\theta}{r}\Big)\right]\cos\theta + \frac{\partial g}{\partial r}\left[\frac{\partial\cos\theta}{\partial r}\cos\theta + \frac{\partial\cos\theta}{\partial\theta}\Big(-\frac{\sin\theta}{r}\Big)\right] \\ &\quad + \left[\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta}\cos\theta + \frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}\Big(-\frac{\sin\theta}{r}\Big)\right]\Big(-\frac{\sin\theta}{r}\Big) + \frac{\partial g}{\partial\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\Big(-\frac{\sin\theta}{r}\Big)\times\cos\theta + \frac{\partial}{\partial\theta}\Big(-\frac{\sin\theta}{r}\Big)\times\Big(-\frac{\sin\theta}{r}\Big)\right] \\ &= \cos^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\theta}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} + \frac{\sin^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} + \frac{\sin^2\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\sin 2\theta}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\theta}\end{aligned}$$

を得る.

同様に（似たようで似てない計算なのでいよいよ嫌になってくるのだが）y で微分したものを同様にやると,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sin^2\theta\,\frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{\sin 2\theta}{r}\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial\theta} + \frac{\cos^2\theta}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2} + \frac{\cos^2\theta}{r}\frac{\partial g}{\partial r} - \frac{\sin 2\theta}{r^2}\frac{\partial g}{\partial\theta}$$

となる.

この二つを足すと，いくつかの項は奇跡的に消えて，最終結果が

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}$$

と求められる．

（方法 2）答えをある程度知ってやるズルい方法

上で何が大変だったかというと，まず，$\frac{\partial r}{\partial x}$ などが求めにくいこと，更に一階微分の表式のなかに $\cos\theta$ と $\frac{\partial g}{\partial r}$ の積などがでてきて，この両方をまた x で微分しないといけない（積の微分で項数が増える）こと，などがある．これらを避ける手はないだろうか？

どうせ答えには g の 2 階微分が出てくるはずだから，$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}$ などを x,y の微分で表して，その結果をうまく足し引きして $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ を出してみることを試みよう（こうすると，x,y などの微分の代わりに，r,θ による微分をどんどん計算したら終わるので少しだけ楽かも）．

ともかくやってみると

$$\frac{\partial g}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

が得られる（上では $\frac{\partial x}{\partial r},\frac{\partial y}{\partial r}$ が必要になったけど，$\frac{\partial r}{\partial x}$ などは必要なかったことに注意）．これを r でもう一回微分したいのだが，幸いなことに，θ は r と独立なので微分してもゼロ，つまり（ここでも積の微分があるのだが，実質的にはうしろの $\frac{\partial f}{\partial x}$ などだけを微分すれば良い）

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}=\cos\theta\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}\right]+\sin\theta\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial r}\right]=\cos^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\sin^2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\sin 2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

となる．同様に

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}=-r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

より（今度は $\cos\theta,\sin\theta$ を直接 θ で微分する項もでてくる；つまり積の微分をやらんといかん）

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}&=-r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}-r\sin\theta\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right]+r\cos\theta\left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta}+\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta}\right]\\&=-r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}-r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}+r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-r^2\sin 2\theta\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}+r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\end{aligned}$$

を得る．これを r^2 で割ったものを先に得たものと足して，

$$\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-\frac{1}{r}\left[\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right]$$

を得る．

ところが，この最後の項は上で既に求めた $\frac{\partial g}{\partial r}$ を r で割ったものである．よって，

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\left[\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}\right]=\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}$$

となるのである．まあ，こちらも計算は大変だけど,「正攻法」よりは少し楽だ．とはいえ，これはある程度答えを知っていないとできないので，このような効率的な解法にあまりこだわる必要はない．

$\frac{\partial r}{\partial x}$ などの別の求め方：「正攻法」では逆行列の関係を用いて $\frac{\partial r}{\partial x}$ などを求めた．以下のようなやり方もある：

(1) 上の「ズルイ方法」で

$$\frac{\partial g}{\partial r}=\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial y},\qquad \frac{\partial g}{\partial \theta}=-r\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial x}+r\cos\theta\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

を得た．ので，これを $\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial y}$ についての連立方程式だと思って解くと，$\frac{\partial f}{\partial x}$ と $\frac{\partial f}{\partial y}$ を，$\frac{\partial r}{\partial x}$ などを具体的に求めずとも一気に求めることができる．

(2) $\frac{\partial r}{\partial x}$ を求めたいのなら，もう直接，r を x,y の函数として表せば良い：$r=\sqrt{x^2+y^2}$．これを x で微分して $\frac{\partial r}{\partial x}=x/\sqrt{x^2+y^2}=x/r=\cos\theta$ がわかる．θ の方も，$\theta=\arctan(y/x)$ と表して微分すれば良い．ただし，この講義では arctan などについて説明していなかったので，急遽，今日やることにした．

（方法 3）更に補足： 半分，答えを知ってから書いている部分もあるのだが，以下のような「かっこいい」議論の仕方もない訳ではない（が，もちろん，今の講義のレベルを超えているので気にしなくて良い）．このような議論はもっと複雑な場合には案外有効なので，頭の片隅にとどめておくのが良いだろう．

(1) 最終結果は g の一次式のはずである（定数項はない）．なぜなら，f を 2 倍にすると，最終結果も 2 倍になるはずだから，g は丁度 1 次でないといけない．

(2) しかし，最終結果に g そのものは出ないはず；なぜなら，もし f が定数の場合，$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ であるが，g そのものが残ってると結果がゼロにならない．

(3) 表したい量 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ は 2 階微分で書かれているので，これを g の r,θ 微分で表しても，最終結果には 2 階微分以下しか出ないはずである．

(4) 以上 (1)(2)(3) から，最終結果は g の一階微分または二階微分の一次式のはずだ．つまり

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=A\frac{\partial g}{\partial r}+B\frac{\partial g}{\partial \theta}+C\frac{\partial^2 g}{\partial r^2}+D\frac{\partial^2 g}{\partial r\partial \theta}+E\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

の形のはずだ（係数 A〜E は r,θ の函数かもしれない）．

(5) これらの係数を決めるには，適当な 5 つ以上の特殊な f について，(4) の両辺を計算して，係数 A〜E に関する連立方程式を作れば良い．たとえば，

$$f=x^2+y^2=r^2,\quad f=(x^2+y^2)^2=r^4,\quad f=x=r\cos\theta,\quad f=y=r\sin\theta,\quad f=xy=r^2\sin\theta\cos\theta$$

とすると（後ろの 3 つについては $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ であるので，かなり計算が楽である），最初の 2 つから $C=1, A=1/r$ が決まり，そのあとの 2 つから $E=1/r^2$ と $D=-Br$ がわかる．5 つ目も合わせると $B=D=0$ がわかる．

（さらに補足すると）「x,y 平面での回転対称性」に着目すると，上の B と D は計算する前からゼロであるべきであることもわかる．

問 19： こちらは計算だけですね．

(1) テイラー展開の公式を用いる．そのためには 2 階微分までを計算する必要があるので，やってみる．

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{1}{3}(1+2x+y)^{-2/3}\times 2=\frac{2}{3}(1+2x+y)^{-2/3},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{3}(1+2x+y)^{-2/3}$$

かつ

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{4}{9}(1+2x+y)^{-5/3}\times 2=-\frac{8}{9}(1+2x+y)^{-5/3},$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{4}{9}(1+2x+y)^{-5/3},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{2}{9}(1+2x+y)^{-5/3}$$

ということで，これらの原点での値は

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{2}{3},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{3},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-\frac{8}{9},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=-\frac{4}{9},\qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-\frac{2}{9}$$

従って，テイラー展開の結果は

$$f(x,y)\approx 1+\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y-\frac{4}{9}x^2-\frac{4}{9}xy-\frac{1}{9}y^2=1+\Bigl(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y\Bigr)-\Bigl(\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}y\Bigr)^2$$

(2) $t=2x+y$ とおいて，一変数函数 $(1+t)^{1/3}$ のテイラー展開を用いると

$$f\approx 1+\frac{1}{3}t-\frac{1}{9}t^2=1+\frac{2x+y}{3}-\frac{(2x+y)^2}{9}$$

となって，もちろん，(1) と一致する．

注意：かなりの人が,「偏微分係数の $(a,b)=(0,0)$ の値を使う」ことを失敗していました．そのような人でも (2) の方はできていたりします．一変数の時と対比して，もう一度，きちんと復習してください．