A　微積 B への補足（この章は完全におまけ）

今回，時間の関係から微積 B の講義ではちゃんとは扱えなかったことについて，少し補足のページを作りました(大半は前年度までの講義ノートの切り貼り)．今年度の微積 B では要求しませんが，興味のある人は読んでくれるとありがたいです．

A.1　コーシー列についての補足

コーシー列についてもう少し知りたい，との要望があり，また数学概論ではコーシー列をうまく避けているようなので，少し補足しておきましょう．

コーシー列の定義は講義で触れた通り，またある数列がコーシー列であることと，その数列が収束列であることは同値です（これも講義でやりました）．この節ではいくつかの具体例を考えます．

例 1. 数列 $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ がコーシー列であることを，その定義に基づいて示せ．

（答え）コーシー列の定義は

$$\forall\epsilon > 0 \quad \exists N(\epsilon) \qquad \Big(m, n \ge N(\epsilon) \quad \Longrightarrow \quad |a_n - a_m| < \epsilon \Big) \tag{A.1.1}$$

であったので，この条件がなりたっていることを具体的に示せば良い．任意の m, n に対して

$$|a_m - a_n| = \left| \frac{(-1)^m}{m} - \frac{(-1)^n}{n} \right| \le \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \tag{A.1.2}$$

である．ので，$m, n \ge N$ ならば

$$|a_m - a_n| \le \frac{1}{m} + \frac{1}{n} \le \frac{2}{N} \tag{A.1.3}$$

がなりたっている．そこで，$\dfrac{2}{N} \le \epsilon$ となるように N を選ぶと，つまり，

$$N(\epsilon) \ge \frac{2}{\epsilon} \tag{A.1.4}$$

ととってやれば，コーシー列の条件 (A.1.1) が満たされる．　□

例 2. 数列 $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ は収束しないことを示せ．

（解 1）積分で評価して

$$a_n \ge \int_1^n \frac{1}{x} dx = \log n \tag{A.1.5}$$

だから，無限大に発散する．

（解 2）無理矢理コーシー列に持ち込む（これはこの問題では明らかに効率が悪いが，もっと複雑な問題で,「コーシー列でない」ことを示す例として）．

$$a_{2n} - a_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \ge \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \tag{A.1.6}$$

つまり，いくら N を大きくとっても，$m = 2n, n$（$n > N$）に対して

$$a_m - a_n \ge \frac{1}{2} \tag{A.1.7}$$

が成り立ってしまうのだ．これはコーシー列の条件を破っているので，この数列は収束しない．

例 3. 数列 $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k^2}$ が収束することを示せ．

（答え）この数列は分子の $\sin k$ のためにコロコロ符号を変え，そのために単純な「有界な単調列は収束」のような理屈を使いにくい．そこで，この数列がコーシー列であることを示すことによって，この数列が収束することをしめそう．目標はコーシー列の条件 (A.1.1) である．

この条件を示すため，まずは $|a_m - a_n|$ を計算する．$m > n$ とすると

$$|a_m - a_n| = \Big| \sum_{k=n+1}^{m} \frac{\sin k}{k^2} \Big| \le \sum_{k=n+1}^{m} \Big| \frac{\sin k}{k^2} \Big| \le \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \le \int_n^m \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} \le \frac{1}{n} \tag{A.1.8}$$

であるから，$N(\epsilon) = \dfrac{1}{\epsilon}$ と選んでやれば，(A.1.1) が成り立つことがわかる．よって，この数列はコーシー列であり，収束する． □

（ええと，以下の２つの問題はコーシー列とは直接の関連はない —— ただし，アーベルの定理の証明にはコーシーの条件を使うのが一般的 —— が，数列や級数の収束に関して面白いので，出しました．）

例 4. 上の関連問題として，$\alpha > 0$ に対して数列 $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k^\alpha}$ を定義して，これが収束するかどうかを考えてみよう．(k^α に限らず，分母がどのくらいの速さで無限大に行くと収束するか？逆にどのくらい遅いと収束しないでしょうか？）例 2 と同様にすれば，$\alpha > 1$ なら収束することは直ちに証明できるが，実はもっと小さな α でも収束することがわかる.「アーベルの交代級数の定理」が十分条件を与えてくれるのではあるが，まずは自分で考えることをお奨めする．

例 5***. 上の発展問題として，今度は $\alpha > 0$ に対して数列 $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin k}{k^\alpha}$ を考える．この数列はどんな α に対して収束するだろうか？分子の $\sin k$ は（中間試験でも出たように）周期的でないためになかなか大変だが，これもアーベルの示した定理でカバーできる．

このような問題（例えば単純な上の例 1）がなかなか解けない，という人が多いと思われるが，それは予想の範囲内だ．このような問題では（どのような数学の問題でも）

- 何を示すべきか，のゴールをはっきり設定する
- そのゴールを示すために、適切な評価や計算をする

の２つの能力が要求される．新しい，または「難しい」概念が導入された時は，まず最初のゴールの設定のところでつまずく人が多い．しかし，正しくゴールが設定されたとしても（今の例ならコーシーの条件 (A.1.1) を示せばよい），そのゴールを示すための評価や計算で死ぬ人も多いと思われる．１つめのゴールの設定は割合短期間にできるようになるかもしれない（新しく習ったところを重点的に学修する）が，２つめの「適切な評価や計算」はこれまでの数学の総合力の勝負になるため，できるようになるには時間がかかる．
従って，このような問題に困難を感じる場合は，その原因が何なのか，上の一番目と二番目のどちらが原因なのかを切り分けて考えることが重要である．
なお，上の二番目を改善するには，もう経験がものを言うとしか，言いようがない．いろいろな例を地道にやって行く上で「どのように進めば良いか」の勘が醸成されるものであり，それ以外の王道はない．そのためにも，いろいろな場合に自分で試行錯誤をくり返すことが特に重要である．

A.2　一様収束と極限の順序交換

この節の内容は「数学概論 I」とも重複する部分が多いと思われるので，基礎的な部分に絞って述べることにする．いろいろな応用例は多分，数学概論にお任せすることになるだろう（教科書では 4.3 節）．

まず，一様収束の定義を書いておこう．比較のために，普通の収束も書くと，以下のようになる．

定義 A.2.1 (一様収束) 区間 $[a,b]$ で定義された関数の列 $f_n(x)$ がある（$n=1,2,3,\ldots$）．この列について：
(i) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 $[a,b]$ で関数 $f(x)$ に 各点収束 するとは各点 x で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ となること，つまり

$$\forall\epsilon>0 \quad \forall x\in[a,b] \quad \exists N(\epsilon,x) \qquad \Bigl(n>N(\epsilon,x) \quad\Longrightarrow\quad |f_n(x)-f(x)|<\epsilon \Bigr) \tag{A.2.1}$$

が成り立つ場合をいう．
(ii) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が区間 $[a,b]$ で関数 $f(x)$ に 一様収束 するとは

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists N(\epsilon) \quad \forall x\in[a,b] \qquad \Bigl(n>N(\epsilon) \quad\Longrightarrow\quad |f_n(x)-f(x)|<\epsilon \Bigr) \tag{A.2.2}$$

となることをいう．(この状況を「$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ の収束が一様である」ということもある.)

各点収束と一様収束の違いは N が x に依存するかしないか である．より正確に言うと，x に依存しないように N をとることができれば一様収束，いくら頑張っても N が x に依存してしまう場合が（一様収束でない）各点収束，である．なお，定義をよく見ればわかるように，一様収束であれば各点収束の条件も満たされている．この意味で，一様収束は各点収束よりも強い（より強い性質を要求する）概念である．

以下では，この一様収束の概念が，如何に自然に現れるかを，いくつかの「２つの極限の問題」を通してみていく事にしよう．以下では特に断らない限り，ある有限な区間 $I=[a,b]$ で定義された関数の列 $f_n(x)$（$n=1,2,3,\ldots$）を考える．

A.2.1　一様収束，極限と積分の順序交換

まずは積分つながりで,「積分と極限の交換」から行ってみよう．積分自身がリーマン和の極限で定義されているから，これはれっきとした「極限の順序交換」の問題である．新居さんの数学入門でもプロジェクト問題の一つとして考えた．

関数列 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = \begin{cases} n & (0<x<1/n) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{A.2.3}$$

と定義する．このとき，

$$(??) \qquad \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 f_n(x)dx\right] = \int_0^1 \Bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Bigr)dx \qquad (??) \tag{A.2.4}$$

が成り立つだろうか？

答えは「成り立たない」である[20]．つまり，この関数列については，極限 $\lim_{n\to\infty}$ と積分 $\int_0^1$ を交換することはできないのだ．しかし一方で，極限と積分が交換できるような例もある．例えば,

$$g_n(x) = \begin{cases} 1 & (0<x<1/n) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases} \tag{A.2.5}$$

に対しては

$$\lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 g_n(x)dx\right] = \int_0^1 \Bigl(\lim_{n\to\infty} g_n(x)\Bigr)dx \tag{A.2.6}$$

が成り立つ（両辺ともにゼロ）．この２つのケースの違いは何だろうか？

もう少し問題を整理したい．$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ と書くと (A.2.4) は

$$(??) \qquad \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 f_n(x)dx\right] = \int_0^1 f(x)dx \qquad (??) \tag{A.2.7}$$

[20] なぜ成り立たないのか，各自で納得すること．少なくとも「数学入門」ではここのところが怪しかった人が多かったと聞いている

と等価であり，これは

$$(??) \qquad \lim_{n\to\infty}\left[\int_0^1 \Big\{f_n(x)-f(x)\Big\}dx\right]=0 \qquad (??) \tag{A.2.8}$$

とも等価である．そこで $g_n(x)=f_n(x)-f(x)$ と書けば，問題は次のように定式化される．

> 問題：区間 $[a,b]$ で定義された関数列 $g_n(x)$ がすべての x で $\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0$ をみたす場合，$\lim_{n\to\infty}\int_a^b g_n(x)=0$ と言えるだろうか？一般にこうとは言えないならば，言えるための十分条件は何だろうか？

少し発見法的に考えてみよう．$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0$ ということは

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists N(\epsilon,x) \qquad n>N(\epsilon,x) \quad\Longrightarrow\quad |g_n(x)|<\epsilon \tag{A.2.9}$$

ということだ．一見，これで十分のように見える．なぜなら，もしすべての x に対して $|g_n(x)|<\epsilon$ と なっているなら，

$$\left|\int_a^b g_n(x)dx\right| \le \int_a^b |g_n(x)|dx \le (b-a)\epsilon \tag{A.2.10}$$

となるからだ．上の「もし」以下は完全に正しい．問題はむしろ,「もし」以下の条件がなりたつとは限らない点にある．というのは，$\lim_{n\to\infty} g_n(x)=0$ というだけでは，(A.2.9) の N は一般には x にも依存するからだ．つまり，すべての x に対して $|g_n(x)|<\epsilon$ となるような n がとれないかもしれないのである．実際，(A.2.3) の $f_n(x)$ に対して $g_n(x)=f_n(x)-0$ （この例では $f_n(x)$ の極限は恒等的にゼロだから）を考えると，上のような n がとれないことがわかる．

逆にいうと，もし適当な n に対して，すべての x で $|g_n(x)|<\epsilon$ が成り立つならば何も問題なく，(A.2.10) が結論できる．つまり，普通の収束よりつよい，新たな収束の概念が必要とされている訳だ．これが「一様収束」に他ならない．

以上の発見法的な議論から直ちに，極限と積分の順序交換に関する以下の定理が証明できる．この定理を見れば,「一様収束」の概念は割合自然に見えるであろう．

> **定理 A.2.2 (積分と極限の交換；教科書の定理 4.3.9+α)** 区間 $[a,b]$ で定義された積分可能な関数の列 $f_n(x)$ （$n=1,2,3,\ldots$）がこの区間で $f(x)$ に 一様収束 するなら，
>
> $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b\Big\{\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Big\}dx=\int_a^b f(x)dx \tag{A.2.11}$$
>
> が成立する．つまり，極限と積分を交換できる．

（注）一様収束は (A.2.11) の順序交換ができるための 十分条件 にすぎないことは強調しておく．一様収束していなくても (A.2.11) ができる例はいくらでもある．

証明 $-\alpha$

この定理，$f_n(x)$ は積分可能と仮定しているが，$f(x)$ そのものの積分可能性は仮定していない.（仮定しなくても f の積分可能性が導かれるのが面白いところである.）しかし，その部分の証明は少しうるさいので，以下では $f(x)$ の積分可能性は仮定した話を書く．

上に書いた事でほとんどつきているが，非常に重要だから書いておく．一様収束の定義から

$$\forall\epsilon>0 \quad \exists N(\epsilon) \quad \forall x\in[a,b] \qquad n>N(\epsilon) \quad\Longrightarrow\quad |f_n(x)-f(x)|<\epsilon \tag{A.2.12}$$

である．上の ϵ を固定して積分の差を計算すると

$$\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx=\int_a^b\{f_n(x)-f(x)\}dx \tag{A.2.13}$$

なので，両辺の絶対値をとって

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx-\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f_n(x)-f(x)|dx \le \int_a^b \epsilon\, dx=\epsilon(b-a) \tag{A.2.14}$$

が得られる．ところが，ϵ は（n を大きくとる事で）いくらでも小さくできる．これはつまり，上の左辺の差が（n を十分に大きくとると）いくらでも小さくできる事を意味する．つまり左辺の $n \uparrow \infty$ での極限はゼロである． □

上の $f_n(x)$ が級数の形の場合を特に書いておくと，以下のようになる.（これは「数学概論」の範囲だが，参考のために載せた.）

系 A.2.3 (教科書の定理 4.3.14 など)
(i) 区間 $I = [a, b]$ で $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ が $F(x)$ に一様収束し，かつ各 $f_n(x)$ が連続である時，

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_a^b f_n(x)dx\right] = \int_a^b \left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right]dx = \int_a^b F(x)dx.$$

(iii) べき級数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ の収束半径を R とすると，$f(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ は $(-R, R)$ 内の任意の閉区間 $[a, b]$ において

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\int_a^b a_n x^n dx\right]$$

を満たす．特に，$a = 0, b = x$ として $|x| < R$ では

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

（補足１）積分と極限の順序交換については，一様収束を仮定しない，より一般の形の定理が成り立つ．例えば，

定理 A.2.4 (Arzelà の定理，小平の本の定理 5.10, 5.11)
区間 $I = (a, b)$ で定義された連続関数の列 $\{f_n(x)\}$ が

- n について一様有界，つまり n, x によらない定数 M があってすべての $n \geq 0$ と $x \in I$ に対して $|f(x)| \leq M$
- 極限 $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在して区間 I で連続

を満たしているとする．このとき，$\int_a^b dx$ と極限 $n \to \infty$ は交換できる．つまり

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \Bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Bigr)dx = \int_a^b f(x)dx \tag{A.2.15}$$

が成り立つ．

（補足２）考えている区間が無限の場合（広義積分）の積分と極限の順序交換はもう少し大変だ．単に一様収束しているだけでは足りない．その場合の典型的な定理は以下のようになる

定理 A.2.5 (ルベーグの優越収束の定理もどき；小平の本の定理 5.12)
区間 $I = (a, \infty)$ で定義された連続関数の列 $\{f_n(x)\}$ と関数 $g(x)$ が

- g は f の優関数，つまりすべての $n \geq 0$ と $x \in I$ に対して $|f(x)| \leq g(x)$
- $\displaystyle\int_a^{\infty} g(x)dx < \infty$ （広義積分として）
- 極限 $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ が存在して区間 I で連続

を満たしているとする．このとき，$\int_a^{\infty} dx$ と極限 $n \to \infty$ は交換できる．つまり（積分は広義積分として解釈して）

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_a^{\infty} \Bigl(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\Bigr)dx = \int_a^{\infty} f(x)dx \tag{A.2.16}$$

が成り立つ．

この定理で要求されている条件は単なる一様収束よりは強い事に注意しよう．単なる一様収束では足りない例を考えてみると，理解が深まるだろう．また，小平の本の 5.4 節にはこのようなことが一杯載っているから，興味のある人は一読をお勧めする．

（補足３） 何回か言ったように,「リーマン積分」はその定義が少しきつすぎる（条件が厳しくて，リーマン積分が定義できない関数が多すぎ）．それを改良した，もっと自然な「ルベーグ積分」というものがあり，現在の解析学ではこのルベーグ積分を使う事が普通になっているし，それが自然である．そのような訳で，リーマン積分ではややこしい条件（一様収束）つきの定理もルベーグ積分で書けば簡単になる事は多い．実際，上の定理 A.2.5 は，実はルベーグ積分で成り立つ定理を翻訳したものである．

ただし，ルベーグ積分を理解するには,「測度論」をかなり一生懸命やる必要があり，一年のこの時期では少し無理があると思われるので，この講義では触れない．

A.2.2 極限と連続性

今度は「連続性と極限の交換」を考える．と言っても，これでは何の事かわからんかもしれないが，要するに以下の問題を考えるわけ．

> 区間 $I = [a,b]$ で定義された関数の列 $f_n(x)$ （$n = 1,2,3,\ldots$）があって，各点 $x \in I$ で $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ が存在する．更に，各 n では $f_n(x)$ は x について連続である．このとき，極限の $f(x)$ は x について連続だろうか？

極限をとる前の関数が連続なら，極限の後も連続か，ということで，形式的には「極限と連続性の交換」という感じの問いかけである．

まあ，もう予想がついているだろうが，上の問いに対する答えも，一般には「なりたたない」である．例えば，区間 $[-1,1]$ で定義された関数列を

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (-1 \le x \le 0) \\ nx & (0 < x \le 1/n) \\ 1 & (1/n < x \le 1) \end{cases} \tag{A.2.17}$$

と定義すると，これは連続である．しかし $n \to \infty$ の極限は

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (-1 \le x \le 0) \\ 1 & (0 < x \le 1) \end{cases} \tag{A.2.18}$$

となって，$x = 0$ で連続ではない！

そこで上の問いの結論が「成り立つ」ための十分条件として，またもや一様連続が登場するのである：

> **定理 A.2.6 (極限と連続性；教科書の定理 4.3.8)** 区間 I で $\{f_n\}$ が $f(x)$ に一様収束し，かつ各 $f_n(x)$ が連続である時， $f(x)$ も連続である．

（証明らしきもの）ちゃんとした証明はどの本にも書いてあるから，ここでは発見法的に理解する事を試みる．やりたいのは $f(x)$ の連続性の証明だから，$I = [a,b]$ 内の一点を c として，

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c), \quad \text{つまり} \quad \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0 \quad |x-c| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(c)| < \epsilon \tag{A.2.19}$$

という事だ．これが証明できるとしたら「$f_n(x)$ が連続であること」しか手がかりが無いだろうから，こいつを使うつもりで書き直していく．つまり，$f(x) - f(c)$ を $f_n(x) - f_n(c)$ で近似しようと思って書き直すと，恒等式：

$$f(x) - f(c) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(c) + f_n(c) - f(c) \tag{A.2.20}$$

に三角不等式を使って

$$|f(x) - f(c)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(c)| + |f_n(c) - f(c)| \tag{A.2.21}$$

が得られる．ここで右辺の３つの項はそれぞれゼロに行くように見える：$f_n(x) - f(x)$ と $f_n(c) - f(c)$ は，共に f_n が f に収束するから $n \to \infty$ でゼロに行く．$f_n(x) - f_n(c)$ は f_n が連続だから，$x \to c$ でゼロに行く．

さて問題は，我々はここで 2 つの極限（$x \to c$ と $n \to \infty$）をとる必要があることだ．(A.2.21) の第３項は（c が固定されているから）$n \to \infty$ だけ考えれば良くって，何も問題ない．しかし，第１項と第２項は x と n の関係によっては，うまく行かないかもしれない．つまり，x を固定した上で $n \to \infty$ とするなら第１項はゼロになるけども，$x \to c$ と動きつつ $n \to \infty$ でなら，どうなるかわからない．第２項も，n を固定して $x \to c$ ならゼロになるけど，n が無限大にいくのと同時進行されると，良くわからない．困った事に，第一項と第二項がうまく行くための極限の順序が逆のようなのだ．そのため，単に「各点収束」だけでは困った事が起こりうる．

実際，(A.2.17) の関数に対して $c = 0$ として，(A.2.21) を考えてみよう．n を固定して $x > 0$ を 0 に近づけると，第２項はゼロに近づくが第一項は $1 - 0 = 1$ に近づく．逆に $x > 0$ を固定して $n \to \infty$ とすると，第１項はゼロに行くけど，第２項は $1 - 0 = 1$ に近づく．どっちにせよ，うまく行かない．

この問題を解決してくれるのが「一様収束」である．すなわち，一様収束を仮定すれば，$x \to c$ と $n \to \infty$ は以下のようにとっていくと良い．

- まず勝手な $\epsilon > 0$ を決める．以下では (A.2.21) の各項が ϵ より小さくなる事を示そう．
- 一様収束の定義から，$N(\epsilon)$ がとれて（これは x に依存しない事にくれぐれも注意！），$n \geq N(\epsilon)$ ならば第一項と第３項は ϵ より小さくできる．そこで，このような n を一つ固定する．
- 次に，上で決めた $N(\epsilon)$ に対して，(A.2.21) の第２項が ϵ より小さくなるような x の範囲を考える．$f_{N(\epsilon)}(x)$ は連続だから，ある $\delta(\epsilon, N(\epsilon)) > 0$ がとれて，$|x - c| < \delta(\epsilon, N(\epsilon))$ ならば (A.2.21) の第２項が ϵ より小さくなる．

以上から $\epsilon, N(\epsilon), \delta(\epsilon, N(\epsilon))$ の順番に決めていくことができ，この時に (A.2.21) の各項が ϵ より小さくなる事がわかった．つまり，このとき，(A.2.21) は 3ϵ よりも小さい．任意の ϵ に対して，$|x-c|$ を十分小さくすると $|f(x)-f(c)| < 3\epsilon$ とできるのだから，これは $f(x)$ が $x = c$ で連続である事を意味する．□

A.2.3　極限と微分の順序交換

次に，微分と極限をみてみよう．残念ながら，積分と極限の時ほど条件は簡単ではない．特に，$f_n(x) \to f(x)$ の収束が一様収束だけでは足りない．

定理 A.2.7 (極限と微分) (i) $f_n(x)$ は $I = [a, b]$ で連続的微分可能（C^1-級），$\{\frac{d}{dx} f_n(x)\}$ がある関数に I で一様収束し，かつ $\{f_n(x)\}$ は一点 $x_0 \in I$ で収束しているとする．この時，$\{f_n(x)\}$ は I のすべての点で収束し，連続的微分可能（C^1-級）で

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{d}{dx} f_n(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right] = \frac{d}{dx} f(x).$$

(ii) $f_n(x)$ は I で連続的微分可能（C^1-級），$\sum_n \frac{d}{dx} f_n(x)$ がある関数に I で一様収束し，かつ $\sum_n f_n(x)$ は一点 $x_0 \in I$ で収束しているとする．この時，$\sum_n f_n(x)$ は I のすべての点で収束し，連続的微分可能（C^1-級）で

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{d}{dx} f_n(x)\right] = \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right].$$

(iii) べき級数 $\sum_n a_n x^n$ の収束半径を R とすると，$f(x) \equiv \sum_n a_n x^n$ は $(-R, R)$ で微分可能で，その導関数は

$$\frac{d}{dx} f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

を満たす．

この定理は教科書には載っていないので，春学期の最初に紹介した参考書を参照されたい．(数学概論 I では習ったんですよね．)

A.2.4　積分と微分の順序交換

最後に，積分と微分を考えよう．とは言っても，同じ変数で微分・積分をするのは互いに逆演算なだけであるので，領域 $R \equiv \{(x,y) | x \in [a,b], y \in [c,d]\}$ で定義された 2 変数の関数 $f(x,y)$ を問題にしよう．この $f(x,y)$ を x だけで積分すると，結果は y の関数になる：

$$I(y) \equiv \int_a^b f(x,y)dx.$$

この $I(y)$ を y で微分するとどうなるか？

定理 A.2.8 (積分下の微分) 関数 $f(x,y)$ が領域 R で定義されていて，各 $y \in [c,d]$ に対して上の積分 $I(y)$ が存在するものとする．更に，この領域 R で $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x,y)$ が連続であるとする．この時，$y \in [c,d]$ に対して $I(y)$ は微分可能で，その導関数は

$$\frac{d}{dy} I(y) = \frac{d}{dy}\left[\int_a^b f(x,y)dx\right] = \int_a^b \left[\frac{\partial}{\partial y} f(x,y)\right] dx$$

つまり，積分記号の下で y で微分して良い．

A.2.5　最後に：このような順序交換はなぜ大事なのか？

「数学概論」でも強調されていると思うが，我々が扱わなければならない関数は非常に多種多様であり，大抵のものは何らかの級数としてしか表せないことが多い．そのような訳のわからない関数に対しては，当然，その微分や積分なども良くわからない．

良くわからないけども，級数の形で書けている関数に対しては，級数の各項を微分・積分する事で形式的に微分や積分を行う事が可能だ．つまり，

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{ならば} \qquad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n\, n x^{n-1} \qquad (??) \tag{A.2.22}$$

でも，これが本当に正しいかどうかはわからない．左辺は級数の和をとった後で微分，右辺は微分してから和をとっているので，正に「微分と極限（和）」の交換をしているからだ．

定理 A.2.2，系 A.2.3 と定理 A.2.7 から，べき級数に関しては，その収束半径の中では極限，微分，積分の交換を勝手にやって良いことがわかる．このおかげで，冪級数の方法は非常に強力なものとなる．(例：ある関数の積分を求めたい時，非積分関数を冪級数に展開してから，項別に積分すればよい．）この考えが形をなしてきたのは，Newton, Leibnitz の頃からである．彼らが解析学の祖と言われる所以である．

（ついでに）今のところ，関数の引数 x は（暗黙のうちに）実数と仮定している．しかし，これを複素数に拡張し，その際に自然な「微分可能性」の定義を考えていくと，非常に面白い事が見えてくる．特に，一階微分できれば何回でも微分できる，とか,（その結果として）微分可能な関数はベキ級数に展開できる，とか,（そのベキ級数にこの節の定理を用いて）項別微分，項別積分などがやり放題になるとか... このように大変に奇麗な理論が存在するのだが，それは「複素関数論」でじっくりと習う事になるだろう.（なお，この段落に関しては細かい条件を落として書いているので，少し数学的に不正確なところがあるので，ご注意.）