

6月22日:今日はコーシー列の残りと言連続関数です。これで一応、今学期の1変数の微積分はおしまい。来週からは「偏微分」を少しやります。

2.6 連続関数

さて、実数の連続性やコーシー列をやったので、連続関数をちゃんと扱えるようになった。定義を思い出しておくと、

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (2.6.1)$$

となる場合、 $f(x)$ は $x = a$ にて 連続 というのだった。また、 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a)$ ならば f は $x = a$ で左連続、 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a)$ ならば f は $x = a$ で右連続、という。また、 $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で連続とは、

$$c \in (a, b) \text{ では } \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c), \quad \text{かつ} \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = f(b) \quad (2.6.2)$$

となることである(区間の中では普通の連続、区間の端点では左(右)連続)。

ここで証明したいのは、以下の2つの定理である。

定理 2.6.1 (連続関数の最大値, 最小値; 教科書の 1.5.10) 閉区間で連続な関数は必ず、その区間内で最大値, 最小値をとる。従って特にこのような関数は有界である。

(注) 閉区間で連続であることは重要な条件である。例えば、関数 $f(x) = 1/x$ を开区間 $(0, 1)$ で考えると、こいつは最大値を持たず、有界でもない。

定理 2.6.2 (中間値の定理) 閉区間 $[a, b]$ で連続な関数 $f(x)$ を考える。 $f(a)$ と $f(b)$ の間にある任意の数 F に対して、 $f(c) = F$ なる $c \in [a, b]$ が存在する。つまり、 x が a から b に動くとき、 $f(x)$ は $f(a)$ と $f(b)$ の間のすべての値を(少なくとも一回は)とる。

この定理も実数の連続性があって初めて成り立つものだ。例えば関数 $f(x) = x^2 - 2$ が $f(x) = 0$ をとるような x の値を考えてみる。無理数まで含めれば、もちろん、 $x = \pm\sqrt{2}$ でゼロになる訳だが、有理数の範囲ではそのような x は存在しない。この例では問題になる x の値が具体的にわかっているから「 $x = \sqrt{2}$ を数の集合に加える」ことで対症療法的に対処できるが、一般の関数で同じことをやるのはまず、不可能だ。その意味でも数の集合を「連続性」をもつ集合まで広げておく事は不可欠だったのだ。

以下、これらの重要な定理を証明するが、その前に(実数の連続性とは関係なく成り立つ)簡単な性質を述べておこう。

定理 2.6.3 (教科書の命題 1.4.5) 点 a を含むある区間で定義された関数 $f(x)$ が $x = a$ で連続で、かつ $f(a) > 0$ ならば、 a の十分近くでは $f(x) > 0$ である(x の範囲をもっと絞れば、 $f(x) > \frac{1}{2}f(a)$ とも言える)。

$f(a) < 0$ の時は不等号の向きをひっくり返せば同様の結論がなりたつ。

(証明) $f(x)$ が $x = a$ で連続であることの定義を $\epsilon\delta$ で書けばすぐに出るから略(教科書の p.18 を各自、読む事)。

定理 2.6.1 の証明: 問題の閉区間を $[a, b]$ とし、最大値の存在を示す(最小値も同様にできる)。

連続な変数 x についての最大は考えにくいので、区間 $[a, b]$ を n 等分した点をまず考えて、この $(n+1)$ 個の点の中での最大値をまず探すことにしよう。あとで $n \rightarrow \infty$ としてやることで、本当の最大値を探す作戦だ。

そこで、この $(n+1)$ 個のなかで $f(x)$ を最大にするもの(これが複数ある場合はそのうちのどれでも良い)を x_n と書くことにする。 $n = 1, 2, 3, \dots$ とすると、数列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ ができる。この数列は有界な数列であるから、定理 2.5.5 から収束する部分列を含む。その部分列の要素を $y_\ell = x_{i_\ell}$ と書こう。(この意味は、 y_ℓ はもともとの $x_1, x_2, \dots$ の添字が i_ℓ となったもので与えられている、つまり y_ℓ は i_ℓ 等分した時の分点である、ということ。)

さて、 $\alpha := \lim_{\ell \rightarrow \infty} y_\ell$ と書いたとき、この α で $f(x)$ が最大になる事を証明しよう。そのためには、任意の x を一つとり ($a \leq x \leq b$)、この x に対して $f(\alpha) \geq f(x)$ であることを示せば良い。そこで、 y_ℓ を定義した時の i_ℓ 分点の中から、 x に一番近いものを選んで、それを z_ℓ と書く事にする。 i_ℓ 分点の中で $f(x)$ が最大のものを y_ℓ としたから、

$$f(z_\ell) \leq f(y_\ell) \quad (2.6.3)$$

がなりたっている。

この両辺で ℓ を無限大にしてみよう。右辺の y_ℓ は α に収束する (α の定義)。一方、 $\ell \rightarrow \infty$ では分点の数も無限大に (従って、分割は限りなく細かく) なるから、左辺の z_ℓ は x に収束するはずだ。従って、 f が連続であることも考えに入れると、左辺は $f(x)$ に、右辺は $f(\alpha)$ に収束するはずである。つまり、

$$f(x) \leq f(\alpha) \quad (2.6.4)$$

が言え、 x は任意だったから、これから $f(\alpha)$ が最大値であるとわかる。 $\square$

定理 2.6.2 の証明： $f(a) < F < f(b)$ の場合を考えれば十分だ。 $f(a) > f(b)$ の場合に以下の証明をどう変えるかは明らかだろうし、 $f(a) = f(b)$ または $f(a) = F$ などの場合は $c = a$ とでもすれば良い。

考えやすいように $g(x) := f(x) - F$ を考える。仮定から $G(a) < 0, G(b) > 0$ であり、我々は $G(c) = 0$ となるような c を探したい。

さて、 $x = a$ から出発して x を段々と大きくしていく事を考える。出発点では $g(a) < 0$ で、かつ $g(x)$ は連続だから、定理 2.6.3 によって $x = a$ のものすごく近くでは $g(x) < 0$ のはずである。つまり、 a に十分近い y では、

$$a \leq x < y \text{ なるすべての } x \text{ にて } g(x) < 0 \text{ が成り立つ}$$

ようにできるわけだ。このような y の全体を Y と書こう。 $g(b) > 0$ だから、上のような y は b を超える事はない。つまり、 Y は有界である。従って特に、 Y の上限 α が存在する (ここで実数の連続性から出る定理 2.4.5 を使った)。以下では $g(\alpha) = 0$ であることを示して、証明を完結する。そのためには、 $g(\alpha) < 0$ と $g(\alpha) > 0$ が共に許されない事を示せば良い。

まず、 $g(\alpha) < 0$ と仮定すると、上の定理 2.6.3 から、 α の近くの x でも $g(x) < 0$ が結論される。これは Y が α よりも右にのびている事を意味し、 Y の上限としての α の定義に矛盾する。

次に、 $g(\alpha) > 0$ と仮定すると、やはり定理 2.6.3 から、 α の近くの x でも $g(x) > 0$ が結論される。つまり、 $\delta > 0$ が存在して、 $\alpha - \delta < x \leq \alpha$ なる x でも $g(x) < 0$ となってしまう。これでは Y の上限は α よりも左にあることになり、やはり Y の上限としての α の定義に矛盾する。

以上から $g(\alpha) = 0$ しかあり得ないことがわかった。つまり、定理の結論は $c = \alpha$ で成り立つ。 $\square$

(連続関数の効用) ここまでの準備を経て、 x^α (α は実数、 $x > 0$)、指数関数、対数関数などを自然に定義することができる。例えば、 x^α を定義するには、まず α に収束するような有理数の列 a_n を考え、

$$x^\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{a_n} \quad (2.6.5)$$

とする。つまり、 x^α が α について連続になるように定義するわけだ。