６月８日：今日は実数の連続性とその帰結です.
中間テストはまだ採点中です．来週に返却の予定でそのときにテイラー展開などももう少し復習します.

2.4 実数の性質（連続性）

さて，いよいよ，実数の性質に突入する．実のところ，実数をまともにやると２，３回の講義が必要な上に，やっただけの効果があるとも思えない．正直に言うと，僕自身，初めてこれをやったときには有り難みがよくわからず，本当に理解できたのは後で「完備性」という概念を知ったときである．そこでこの講義では，実数の一番大事な性質は認めて，それから僕らの使いたい性質を導いていくことにした．欠けているところを知りたい人は，小平さんの「解析入門 I」または「解析概論」の付録を参照されたい.

我々の出発点は以下の定義である.

定義 2.4.1 (切断) 実数全体を交わりのない二つの集合 A, B に分け,「A に入っている数はすべて，B に入っている数よりも小さい」とできたとき，(A, B) を実数の 切断（または Dedekind の切断）という.

勝手な実数 α を持ってきたとき，α より小さい数を A へ，α より大きい数を B へ入れ，更に α そのものは A に入れると，(A, B) は実数の切断になる．また，α より小さい数を A へ，α より大きい数を B へ入れ，更に α そのものは B に入れても，(A, B) は実数の切断になる．このように，α を一つ決めると実数の切断を作る事ができるが，この逆も正しい（つまり，実数の切断は，その切れ目の数 α を決定する）．これが有名な Dedekind の定理であり，詳しくは以下のようになる

定理 2.4.2 (Dedekind) (A, B) が実数の切断であるとき，A と B の境界の数 α が一意に決まる．このとき，α は A の最大の数（B には最小の数はない）であるか，または α は B の最小の数（A には最大の数はない）であるかのどちらかである.

以下では Dedeind の定理を認めて，実数と極限の性質をいくつか証明していく.

（用語の注）あるものがたった一通りに決まる（存在する）とき，業界用語では「○○が一意に決まる（存在する)」という．この表現はこれからもよく使うから覚えよう（英語の unique, uniquely の訳）.

この定理はなかなかピンと来ないだろうと思うし，今はそれでもかまわない．ただ，何を言いたいのかを理解してもらうために，実数でなければどうなっているのかを見ておこう.

ア. 整数の集合に切断を導入すると，A の最大数，B の最小数が共に存在する.（例：A は 0 以下の整数，B は 1 以上の整数の集合）

イ. 有理数の集合の切断の場合，A, B 共に最大数，最小数がない場合と，どちらかがある場合がある.（前者の例：A は $\sqrt{2}$ より小さい有理数の集合，B は $\sqrt{2}$ より大きい有理数の集合.）

ウ. 実数の場合，上の定理が主張しているように，A, B の片方だけが最大数か最小数を持ち,「両方が持つ」「両方ともない」ということはおこらない.

（もう一言）実は上の定理などをちゃんと証明しようと思うと,「有理数の切断」から話を始めないといけない．略記すると以下のようになる.（詳しくは小平さんの「解析入門 I」または「解析概論」の付録を参照）.

1. まず，(A, B) を有理数の切断として導入する．A の最大数，または B の最小数がある場合，その最大数や最小数は有理数だから，特に面白い事はない.
2. しかし，A が最大数を持たず，更に B が最小数も持たない場合，(A, B) そのものが新しい数（A, B の境界として定義される無理数）を定義すると考える（無理数の定義）.
3. 次に，(A, B) まで交えた（つまり無理数まで交えた）新しい数の体系において，通常の数の大小が定義できる事を見る.
4. この大小を用いて，初めて「実数の切断」が定義でき，Dedekind の定理が証明できる.
5. そのあと，我々が普通に行っている四則演算が（上のようにして定義された無理数の集合で）定義できる事を証明すれば，一応，実数論は完成する.（乗法，除法に関しては，まともに扱うよりも，極限を先に定義してかかった方が楽なようだ.）

実数の話を続けよう．まず，上界（下界）と上限（下限）の概念から

定義 2.4.3 (上界と下界) A を実数の集合とする．ある数 N があって，A の任意の元 a が $a \le N$ を満たすとき，A は上に有界 といい，N を A の 上界 という．同様に，ある数 M があって，A の任意の元 a が $a \ge M$ を満たすとき，A は下に有界 といい，M を A の 下界 という．A が上にも下にも有界な場合は単に 有界 という．

定義からわかるように，上界や下界はギリギリの数でなくても良い．例えば，A を区間 $[0,1]$ とした場合，$-1, -10, -2345$ などはすべて A の下界である．同様に $1, 123, 33556$ などは A の上界である．

でもこの定義では A がどこまで広がっているのかがわからない．そこで，A の端と端を決めるつもりで，以下の定義を導入する：

定義 2.4.4 (上限と下限) A を実数の集合とする．A が上に有界のとき，A の上限（supremum）とは以下を満たす数 α のことである：

- A に属するすべての x に対して，$x \le \alpha$
- $\alpha' < \alpha$ なる α' をとると，必ず，$\alpha' < x$ なる $x \in A$ が存在する

つまり，α とは A の上界の最小値である．同様に A の下限（infimum）は上の不等式の向きを逆にして定義し，A の下界の最大値である．

（注）上では上限や下限が存在するかのごとく書いたが，それらが実際に存在するかどうかは次の定理が保証してくれる．(［$\cdots$］の中はそれぞれ置き換えて読むべし．)

定理 2.4.5 (Weierstrass) 数の集合 S が上に［下に］有界ならば S の上限［下限］が存在する．

（証明）S が上に有界と仮定して上限の存在を証明する．S の上界の全体からなる集合を B とし，それ以外の数の集合を A と書こう．すると，(A, B) は実数の切断になっている．なぜなら，「A に入っている数はすべて，B に入っている数よりも小さい」が成り立っているから．

従って，Dedekind の定理から，A と B の境界の数 α が一意に定まる．この α が S の上限になっている事を証明しよう．そのために，またもや Dedekind の定理を使う．

この定理によると α は A の最大数であるか，B の最小数であるか，のどちらかである．しかし，α が A の最大数であることはあり得ない（次の段落で示す）．従って，α は B の最小数であるが，これは α が S の上限であることを意味する（上限の定義そのもの）．

（α が A の最大数ではないことの証明）α が A の元だとすると，α は S の上界にはなれない（上界になれる数はすべて B に押し込めたから）．よって，α よりも大きく，でも S に属するような数 β が存在するはずである．そこで，この両者の中間，$\frac{\alpha+\beta}{2}$ を考えると，当然，$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ となっている．ところが，$\beta \in S$ で $\frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ であるから，$\frac{\alpha+\beta}{2}$ は S の上界ではない．つまり，$\frac{\alpha+\beta}{2} \in A$ のはずである．しかしこれは「α は A の最大数」であったことに矛盾する．つまり，α が A の元ということはありえない． □

2.5 単調な数列とコーシー列

前節で実数の連続性を延々とやったのには理由がある．既に「行き先がわかっている極限」の定義は散々やってきた．$\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ とは，もちろん，数列 a_n の行き先が α だということであり，

$$\forall\epsilon > 0, \quad \exists N(\epsilon), \qquad n > N(\epsilon) \implies |a_n - \alpha| < \epsilon \tag{2.5.1}$$

という「定義」を行った．また，実際に数列の収束発散はこの定義に従って判定してきた．ところが，この定義は行き先 α がわかっていなければ使い物にならない．でも実際には，行き先の値ははっきりわからなくても，その収束を判定したい数列はいくらでもある．

例えば，e^x のテイラー展開の際に級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ が出てきた．これが収束することは既に見たが，それはこの級数を直接扱ったのではなく，テイラー展開の剰余項を考えることで，いわば搦め手から証明したのである．このよう

なズルい手がいつでも使えないことは，この代わりに級数 $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!+0.1}$ を考えてみたら納得できるだろう．もっと簡単なはずの例では，e の定義（のひとつ）

$$e=\lim_{n\to\infty}\Bigl(1+\frac{1}{n}\Bigr)^n \tag{2.5.2}$$

の極限の存在を考えてみても良い．

という訳で，行き先がわからない数列でも，収束することだけは言える ような定理が欲しい．この部分を補ってくれるのが，この節でやる「単調増加（減少）列」と「コーシー列」の概念である．単調列の方は簡単で直感的だからこちらから行こう．

定義 2.5.1 (単調列) $a_1\le a_2\le a_3\le\ldots\le a_n\le\ldots$ となっている数列 a_n を 単調非減少 数列という（不等号にイコールが入ってないものは単調増加数列という）．不等号が逆向きになったのは単調非増加（単調減少）という．

さて，単調列には，以下の著しい性質がある．直感的にはあたりまえに見えるだろう．

定理 2.5.2 (単調列；教科書の 1.5.7) 数列 a_n が単調非増加または単調非減少，かつ有界である（つまり，大きな数 M があって，すべての n で $|a_n|\le M$ となっている）とする．このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ は存在する．

この定理はあたりまえには見えるが，決してあたりまえではなく，実数の連続性に強く依存している．例えば a_n を，「$\sqrt{2}$ を小数で書いたときの小数点以下 n 桁めまでの数」と定義してみる．a_n のそれぞれは有理数であるが，その極限は $\sqrt{2}$ という無理数である．つまり，極限を有理数の集合の中で探すと，この数列は（収束先が有理数ではないので）収束しないことになってしまう．より広い実数全体の中で極限を探す事で，(かつその実数が連続性を持っているおかげで)，極限の存在が保証されている訳だ．

（証明）a_n が有界かつ単調非減少であるとする（単調非増加の場合は不等号の向きをひっくり返せば同じだから略）．集合 $\{a_1,a_2,a_3,\ldots\}$ の上限を α としよう（上限の存在は定理 2.4.5 で保証されている）．$\alpha=\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ であることを証明すれば十分である．

まず，上限の定義から，$a_n\le\alpha$ が成り立っている事に注意する．従って，a_n を下から $\alpha-\epsilon$ のような形で押さえれば証明は完成する．

そこで，まず任意の $\epsilon>0$ を決めよう．次に，$\alpha'=\alpha-\epsilon$ を考える．すると α が集合 $\{a_n\}$ の上限だから，$\alpha'<a_m\le\alpha$ となるような自然数 m が存在する．そこで，この m を使って $N(\epsilon):=m$ と定義すると，$n\ge N(\epsilon)$ では

$$\alpha'<a_m\le a_n\le\alpha\quad\text{つまり}\quad|a_n-\alpha|<\epsilon \tag{2.5.3}$$

が成り立つ（真ん中の不等号は a_n の単調性から）．これは ϵ-N で書いた収束の定義そのものなので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$ が証明された． □

定義 2.5.3 (コーシー列) 数列 a_n が以下の性質を満たすとき，これを コーシー列（cauchy sequence）という．

勝手に選んだ（小さい）$\epsilon>0$ に対し，(十分大きな）整数 $N(\epsilon)$ がとれて，

$$\text{すべての } m,n\ge N(\epsilon) \text{ に対して}\quad \bigl|a_m-a_n\bigr|<\epsilon\quad\text{とできる} \tag{2.5.4}$$

すぐには呑み込めないかもしれないが，この定義と次の定理の意味を各自で良く理解してほしい．収束先がわからないような数列を考えるのだから，収束先と a_n の差を計算する事はできない．それでも，a_n と a_m の差（の m,n が無限大になった極限）を見れば良い，というのである．

定理 2.5.4 (コーシーの収束条件；教科書の 1.5.6 に対応) 数列 a_n が（何かの値に）収束することと，a_n がコーシー列であることは同値である．つまり，数列が収束することの必要十分条件は，その数列がコーシー列であることだ．

収束列ならコーシー列，の証明

これは簡単だ．数列 a_n の収束先を α と書くと，収束の定義から，勝手な（小さな）$\epsilon > 0$ に対して $N(\epsilon)$ をとって，全ての $n > N(\epsilon)$ では $|a_n - \alpha| < \epsilon/2$ とできる．つまり，$m, n > N(\epsilon/2)$ では

$$|a_m - \alpha| < \frac{\epsilon}{2}, \quad |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.5.5}$$

となっている訳だ．でも三角不等式から，このような m, n では

$$|a_m - a_n| = \big|(a_m - \alpha) + (\alpha - a_n)\big| \le |a_m - \alpha| + |\alpha - a_n| \le \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \tag{2.5.6}$$

が成り立つ．これはコーシー列の条件 (2.5.4) が成り立っていることを意味する． □

コーシー列なら収束列，の証明

こちらの証明が大変だ．実数の連続性を延々とやってきたのは，この証明をやりたかったからである．ただし，この証明を全員が理解する必要はない．完全な証明は参考書を見てもらうことにして，証明の概略を述べる．

1．まず，コーシー列は有界な数列である事をしめす．これは簡単だから，各自やってみると良い．

2．次に，数列 b_n, c_n を

$$b_n := \inf_{m:m\ge n} a_m, \qquad c_n := \sup_{m:m\ge n} a_m \tag{2.5.7}$$

と定義する（ $\inf\limits_{m:m\ge n} a_m$ とは $m \ge n$ なる m について inf をとるという意味），$\sup, \inf$ の定義から，

$$b_n \le b_{n+1} \le b_{n+2} \le \quad \cdots \quad \le c_{n+2} \le c_{n+1} \le c_n \tag{2.5.8}$$

が成り立っている．つまり，b_n は単調非減少，c_n は単調非増加で，更に $b_m \le c_n$ がいつでも成り立つ．また，上限，下限の定義から

$$m \ge n \quad \text{ならば} \quad b_n \le a_m \le c_n \tag{2.5.9}$$

も成り立っている（後で使う）．

3．有界な単調数列は収束するから，定理 2.5.2 から

$$\alpha_1 := \lim_{n\to\infty} b_n, \qquad \alpha_2 := \lim_{n\to\infty} c_n \tag{2.5.10}$$

の極限が存在する．$b_n \le c_m$ から，$\alpha_1 \le \alpha_2$ である（各自，証明を試みよ）．

4．すぐ後で示すように，$\alpha_1 = \alpha_2$ がいえれば良いので，まずこれを狙う．そのためにコーシー列の条件を使おう．（いくら小さくても良いが）$\epsilon > 0$ を一つ決めると，$N(\epsilon)$ があって，$\ell, m \ge N(\epsilon)$ では $|a_\ell - a_m| < \epsilon$ である．

4′．これは特に $a_\ell - a_m < \epsilon$ を意味するが，c_n が上限として定義されているので，$\ell > n$ なる ℓ の中には，a_ℓ が c_n に幾らでも近くなるものがある．従って，この特別な ℓ では a_ℓ を c_n に置き換えてよく，$c_n - a_m < \epsilon$ が得られる．

4″．同様に，b_n が下限として定義されているので，$m > n$ なる m の中には，a_m が b_n にいくらでも近いものがある．よって，a_m を b_n に置き換えてよく，$c_n - b_n < \epsilon$ が得られる．

5．$c_n \ge b_n$ であったので，十分大きな n では $0 \le c_n - b_n \le \epsilon$ が成り立つ事が証明できた．これから直ちに，極限でもこの不等式が成り立つ，つまり $0 \le \alpha_2 - \alpha_1 \le \epsilon$ であることがわかる（各自，証明を試みよ）．ϵ は任意だったので（つまり，いくら小さくても良かったので），この不等式から $\alpha_1 = \alpha_2$ が結論できる．これを改めて $\alpha = \alpha_1 = \alpha_2$ と書こう．

6．以上の結論を a_n の言葉に焼き直せば証明が完成する．b_n, c_n の極限が α だから，どんなに小さい ϵ に対しても N' がとれて

$$n \ge N' \quad \text{では} \qquad \alpha - \epsilon < b_n \le c_n \le \alpha + \epsilon \tag{2.5.11}$$

が成り立つわけだ．ここで (2.5.9) を思い出すと，うえから直ちに

$$n \ge N' \quad \text{では} \qquad \alpha - \epsilon < a_n \le \alpha + \epsilon \tag{2.5.12}$$

が結論できる．これは $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$ を ϵ-N で書いたものに他ならない． □

６月１５日：今日はコーシー列（と連続関数？）です.
中間テストについては別紙をご覧くだされ.

第５回レポート問題（テイラー展開とコーシー列）： 今回は全員にやってほしい問題と，やりたい人がチャレンジする問題に分けました.

問 11： （中間テスト，敗者復活戦）次の関数を $x = 0$ でテイラー展開し，x^6 までの項を求めよ（a は正の定数）．x^6 までというのは，剰余項が $o(x^6)$ になるまでやれ，ということ.

$$a)\ \ e^{a\,x^2} \qquad b)\ \ \frac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{x} \qquad c)\ \ \frac{1+x^4}{1+x+x^2}$$

問 12： 「コーシー列」または「有界単調列」の考えを用いて，次の数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ が収束する事を証明せよ（α は正の定数）．また，c_n の極限値を求めよ.

$$a_n := -\log n + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad\qquad b_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$c_1 := 1, \quad n \ge 1 \ \text{では}\ c_{n+1} := \frac{1}{2}\Bigl(c_n + \frac{\alpha}{c_n}\Bigr)$$

正直，c_n はそこそこ難しいと思うから，ともかく a_n, b_n をやってくれ.

問 13： （テイラー展開を用いたチャレンジ問題；この問題はより詳細に，夏休み前に出すつもりだ．今日は予告.）コーシー列を習ったので，いろいろなテイラー展開の収束性を直接証明できるようになった．そこで（今まで高校で習った sin, cos の定義や性質はいったん忘れて），$\sin x$ と $\cos x$ をそのテイラー級数で定義することにする．そうした場合，いままでみんなが知っていた sin, cos の性質（例：$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$，加法定理，周期 2π の周期性）をこのテイラー級数による定義から導きだせるだろうか？その結果として，みんなが知っているはずの sin, cos を再現できるだろうか？どのように議論したら良いか，各自で考えてみると良い.（夏休み頃にはもっと詳細なプログラムを与える予定.）

番外問題： これまでの講義内容で改善したらよいと思うところ，わかりにくかったところ，講義への要望などがあれば自由に書いてください．また，質問があれば，それもどうぞ．この番外問題は成績には一切関係ないことを保証しますから，次回からの講義を良くするつもりで書いてくださると助かります.

レポート提出について：

上の問に解答し，

６月 20 日（月）午後５時までに，原の部屋（六本松３号館 3-312）の前の箱に

入れてください．整理の都合上，用紙はできるだけ A4 を使ってください（B5 だとなくなっても知らんぞ）．また，２枚以上にわたる場合は何らかの方法で綴じてくだされ.

重要：レポートは友達と相談した結果を書いても良い．ただし，誰と相談したかは明記すること.（「俺は人に教えてやっただけで人からは全く教わってない」と思う人は書かなくても良いが.）相談した人の名前を書かせるのは，それで点数を左右するのが目的ではない.「お世話になった文献，人にはきちんと感謝する」という，科学上の最低ルールを守ってもらうためである.

———————————以下，レジュメの続き ———————————

（余談）上の証明の中で重要な概念を使ったので書いておく．一般に数列 $\{a_n\}$ があったとき，

$$\lim_{N\to\infty}\Bigl(\inf_{n\ge N} a_n\Bigr), \qquad \lim_{N\to\infty}\Bigl(\sup_{n\ge N} a_n\Bigr) \tag{2.5.13}$$

の 2 つの極限を考え，前者を $\liminf_{n\to\infty} a_n$，後者を $\limsup_{n\to\infty} a_n$ と書く．また，別の記法として $\liminf_{n\to\infty} a_n = \varliminf_{n\to\infty} a_n$，$\limsup_{n\to\infty} a_n = \varlimsup_{n\to\infty} a_n$ とも書く．

通常の $\lim_{n\to\infty} a_n$ とは異なり，$\limsup$ と $\liminf$ は（その値として $\pm\infty$ も含めれば）いつでも極限の値が存在し，

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n \tag{2.5.14}$$

を満たす（why?）．更に，$\lim_{n\to\infty} a_n$ が存在する事は，

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n \tag{2.5.15}$$

となることと同値である（ただし，極限の値として $\pm\infty$ も許せば）．(理由は各自で考えよう）．

ついでに，知っておくと便利な定理をあげておこう．

定理 2.5.5 (有界な数列は収束する部分列を含む；教科書の定理 1.5.9) 有界な数列 $a_1, a_2, a_3, \dots$ から収束する部分列 $b_1, b_2, \dots$ を取り出すことができる．

この定理も図を書いてみるとほとんど当たり前ではある．数列が有界なんだから，有界なところに無限個の数列の値を放り込むと，どこかで無限個が溜まった形にならざるを得ない．以下の証明は区間を分割する事で「無限個が溜まる」感じを出している．

（証明の概略）すべての n で $a \le a_n \le b$ であるとし，閉区間 $[a, b]$ を 2 等分して区間 $[a, \frac{a+b}{2}]$ と $(\frac{a+b}{2}, b]$ を作ろう．$\{a_n\}$ は全体で無限個あるから，$[a, b]$ を 2 等分してできた区間の少なくとも片方は無限個の a_n を含んでいるはずだ．そこで例えば左側の区間（これを I_1 とする）に無限個の a_n があったとして，I_1 をまた 2 等分してみる．I_1 には無限個の a_n が入っているから，I_1 を 2 等分した区間の少なくとも一方にはやはり無限個の a_n が入っているはず．無限個入ってるのを I_2 としよう．

以下，こんな調子で $[a, b]$ を分割していくと，区間の列 $I_1, I_2, I_3, \dots$ ができ，I_ℓ の幅は $\dfrac{b-a}{2^\ell}$ になっている．そこで，$\{a_n\}$ が初めて I_ℓ に入ったときの a_n の値を b_ℓ と定義すると，b_ℓ はコーシー列になっている（各自，確かめる）．従ってこの部分列 $\{b_\ell\}$ は収束する． □

コーシー列，有界単調列の応用（重要性）

今までにも強調した通り，ある数列が「収束する」ことと「コーシー列である」ことは同値だ．だから,「コーシー列」であるかどうかは，収束するかどうかの最強の判定条件といえる．実際，ある数列が収束するかどうかの判定のほとんどはコーシー列かどうかで行うと言ってもよい.（有界単調列かどうかの判定の方が簡単だが，問題の数列が単調である事はそんなにない.）

（例）いくつかの例はレポート問題として出したが，より典型的なものを挙げると...

- e^x のテイラー展開 $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ はすべての実数 x で収束する．$x > 0$ なら有界単調列の性質を用いても証明できるが，コーシー列になっていることを確かめた方がすべての x ができて簡単かも．
- $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ もすべての実数 x で収束する．この場合もコーシー列になっていることを確かめるのが簡単だろう．
- $0 < r < 1$ を定数とする．数列 $\{a_n\}$ が，$|a_{n+2} - a_{n+1}| \le r|a_{n+1} - a_n|$ （$n = 1, 2, 3, ...$）を満たすとき，この数列はコーシー列であって，従って収束する.（この例をより一般の空間に拡張したものは「縮小写像の原理」とよばれ，関数解析の強力な手法の一つになっている.）