確率論 I，確率論概論 I（原　隆 — 多元数理科学研究科，理 1 号館 508 号室） 2002.04.16

Tel: 052-789-5392 (e-mail: hara@math.nagoya-u.ac.jp, http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html)

概要：確率論はそれ自身，興味深いものであるが，同時に解析学の重要な応用例をも与える．この講義では確率論における極限定理，およびランダムウォークやブラウン運動について学ぶ．

内容予定：

> **重要なお断り：以下の予定表はあくまで「予定」で，大ざっぱな進行の感じを与えるために書いてある．だから，皆さんの反応やレポートの出来次第では大幅に変更する可能性が大で，特に，以下に書かれてある日付は一，二週間くらいの誤差でずれることは必至であろう．実際に講義に出席したり，僕の web page をチェックするなどして進行状況を把握していただきたい．**

1. まずこの講義の目指すところを説明する（4/16）
2. 次に確率論の大まかな設定（確率空間，確率変数，条件付き確率）を簡単に述べる（4/16, 4/23）． 1～2回で確率論の基礎を完全にこなすのは無理だが，この部分は後で必要に応じて補っていく．
3. 次に，基本的な極限定理（大数の法則と中心極限定理）を述べる．これらは確率論における非常に重要で美しい一般原理を表現しているものであるから，前半の山場になる．また，この過程で確率変数の色々な収束概念（概収束，確率収束,...）や特性関数（フーリエ変換）の手法を学習（復習）する．具体的には
   (a) 大数の弱法則（4/30）と色々な収束概念のまとめ（4/30, 5/7）
   (b) 大数の強法則（5/7）
   (c) 中心極限定理 I（5/14）．ここではまず，定理の主張を具体的に計算できる例で確かめ，理解する．
   (d) 中心極限定理 II（5/14, 5/21）特性関数を使った一般的な定理を証明（説明）する．
4. 続いて，後半部分に入る．確率論の大きなテーマであり，応用上も大事なランダムウォークについて学習する．あまり問題を難しくしないよう，空間も時間も離散的なウォークに話を限り，その基本的な性質（特に再帰性と推移性）について考える．具体的には
   (a) １次元の simple random walk の定義と基本的性質や遷移確率の計算（5/28）
   (b) simple random walk の再帰性，推移性の概念．再帰的かどうかどうやって判断するか． — １次元では再帰的であることを，具体的計算で確かめる（5/28, 6/4）．
   (c) ２次元での再帰性と３次元以上での推移性．ここでも具体的計算と母関数を用いる方法を説明（6/18, 6/25）
   (d) 7/2 には予備日としての性格を持たせ，これまでに遅れた部分があればこの日で吸収する．予定通り進んでいる場合には random walk の面白い性質をいくつか紹介する予定．
5. 最後に，ランダムウォークの連続極限に相当するものとしてブラウン運動を考える．ここのところが一番問題で，どのくらい深くやるか（出来るか）詰め切っていない．今のところの考えは以下の通り：
   (a) まず直感的に連続極限を考え，時間と空間を正しくスケールすると行き先がありそうなことを納得する（7/9）．
   (b) 次に，天下りにブラウン運動の測度を定義し，その性質が上の「直感的」なものと一致することを確かめる（7/16）．
   (c) 最後に両者の関係を厳密に扱いたい（7/23）のだが，かなりの準備が必要で，完全にやりきることは不可能だろう．基本的な考え方は伝えたいと思っている．
6. 上記の中で一回，中間試験を行う．現在のところ，中間試験の日取りには 6/4, 11, 18 のどれかを予定しているが，これ以外になる可能性もある．また，この辺りに，原の国際会議出席のために休講が入る可能性もある．これらについては確定次第，講義や web page でお知らせするから注意しておいて欲しい．

教科書と参考書：

教科書は指定しないが，以下の参考書で適宜補うこと．

- 西尾真喜子：確率論（実教出版，1978）— 確率論全般についての良い教科書であるが，少し難しいと言う印象を持つかも知れない．

- Ya.G. シナイ：確率論入門コース（シュプリンガーフェアラーク東京，1995）— 著者は統計力学（の数理的理論）の世界的権威で，非常にすばらしい仕事を数多くしている．この本は普通の確率論のテーマを扱いながらも，随所に著者の独自の切り口が見られて非常に面白い．
- 福島正俊：確率論（裳華房，1998）—「易しいことから始めて，難しいことは必要になる都度学習する」スタイルで書かれ，最終的にはブラウン運動の入り口まで到達している．上の２つの本を難しいと感じる人はこの本から読んでみるのが良いかも知れない．
- 以上の本では物足りない，と言う人には，A.N. Shiryayev: Probability (Springer, 1984) を奨める．非常に大部な本であるが，旧ソ連の教科書らしく，深いところまで懇切丁寧に書かれている．

評価方法：

何回かのレポートや小テスト，中間試験，期末試験を総合して採点する．試験に関しては A4 レポート用紙一枚くらいの持ち込みを認めるかも知れないが，これについてはそれぞれの試験の前に厳格にルールを定めるので早とちりしないようにして欲しい．今年からの新しい試みとして「講義内容要約」を学期終わりに提出していただく．場合によってはこの内容も成績に反映させるかも知れない．

この科目に関するルール：

最近の世相の移り変わりは激しく，学生気質も僕の頃とはかなり異なっているようです．後でお互いに不快な思いをすることがない様，この科目に関して，以下のルールを定めます.（４年生や院生に対してこんなこと言うのは失礼かとは思うのだが，念のため.）

- まず初めに，学生生活の最大の目的は勉強することであると確認する.（少なくとも，講義にでている間はそうである.）
- 講義中の私語，ケータイの使用はつつしむ．途中入室・退室もできるだけ避ける（どうしても必要な場合は周囲の邪魔にならないように）．これらはいずれも講義に参加している他の学生さんへの最低限のエチケットです．
- 重要な連絡・資料の配付は原則として講義，掲示板および原の web page（http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~hara/lectures/lectures-j.html）を通して行う．
- レポートを課した場合，その期限は厳密に取り扱う．
- 講義中の質問， e-mail による質問はいつでも大歓迎である（hara@math.nagoya-u.ac.jp）．ただ，e-mail の回答までには数日の余裕を見込んで下さい．
- 講義中に聞いているだけでは不十分であるから，レポート問題などに積極的に取り組み，理解を深めて欲しい．

中間テストまたは休講予告：

原の国際会議出席のため 6 月 4,11,18 日ぐらいに中間テスト（と休講？）が入る可能性があります．予定が確定したら講義と web page を通してお知らせしますので，頭の隅に留めておいて下さい．

履修に必要な知識：

微分積分学, 線形代数学の基本的事項は既知とする．測度論や確率論については，予備知識は仮定しない．ただし，既に測度論や確率論を履修している人が退屈しないように努力をしたい．

配布プリントについて：

講義ではレジュメを配ります．これはあくまでレジュメであって，要点しか書いていません．足りないところは各自，教科書や参考書で補って下さい．要点しか書かない理由は，一つには僕の時間が足りないためですが，もう一つには要点を書き出すことで集中して学習すべき事を浮き彫りにする効果を狙っていることもあります．

なお，これらのプリントにもミスプリなどがあると思うので，ある程度直した時点で僕の web page に掲載することを考えています．

皆さんの知識量調査アンケート

これはこれまでの皆さんの学習経過を調べるもので成績には一切関係しません．今後の講義の進め方の参考にしたいので，ご協力お願い申し上げます.

以下の問に全く答えられなくても今後の講義には差し支えがないようにします．正直のところ，ほとんどの人が何も答えられないことを前提に講義準備を進めています．だから心配しないでください．

1．今までに「確率論」と名の付く講義をとったことがありますか？

a. ない.　　b. 高校で少しやった.　　c. 大学で少しやった.

d. 今まで一杯やったからどんどん進んだことをやってくれ.

2．区別の付くコインを２枚投げます.「両方とも表」になる確率と,「一枚が表，一枚が裏」になる確率はそれぞれどのくらいと考えられますか？

3．上のコインの問題に対する「確率空間」はどのように定義するのが自然でしょうか？また，この場合の「事象」をすべて書き出してください.

4．一般に,「確率空間」はどのようなものを言うか（定義），ご存知ですか？知っていたら定義を書いてください.

5.「確率変数」と言う言葉を聞いたことがありますか？あればその定義を書いてみてください.

6．確率変数の「特性関数」について聞いたことはありますか？あれば知っていることを書いてください.

7.「大数の法則」について，知っていることがあれば，自由に書いてください.

8.「中心極限定理」について，知っていることがあれば，自由に書いてください.

講義ノートの最終回がなかなか完成しないので（学期の終わりでちょっと疲れが...），ともかく前回のレポート問題の解答だけ簡単に.

問１４.

1. 定義 4.3.1 の仮定 (iii) から，B_s と D_t は独立である．だから，B_s の特性関数を $f(\xi)$，D_t の特性関数を $g(\xi)$，$B_{s+t} = B_s + D_t$ の特性関数を $h(\xi)$ とすると，

$$h(\xi) = f(\xi)\, g(\xi)$$

が成り立つ．ところで，B_s と B_t はそれぞれ分散が s, t の正規分布であるから（仮定 (ii)），それらの特性関数は

$$h(\xi) = \exp\Bigl(-\frac{s+t}{2}\xi^2\Bigr), \qquad f(\xi) = \exp\Bigl(-\frac{s}{2}\xi^2\Bigr)$$

となる．よって，わり算して

$$g(\xi) = \frac{h(\xi)}{f(\xi)} = \exp\Bigl(-\frac{t}{2}\xi^2\Bigr)$$

が得られた．これは平均がゼロ，分散が t の正規分布の特性関数であるので，D_{t-s} が平均がゼロ，分散が t の正規分布に従うことが結論できる（特性関数は分布を一意に定めるから）.

2. 以上から，$B_t - B_s$ $(s < t)$ が，平均がゼロ，分散が $t - s$ の正規分布に従うことがわかった．特に，$B_t - B_s$ $(s < t)$ は $t - s$ のみによる.

問１５.

(ii) から (v) は，問１４で言った．(v) から (ii) は，$s = 0$ とおけば，まあ出る.

なお，正規分布の特性関数の計算法であるが，なん通りかある．手短に説明しよう.

(i) 一番標準的なのは複素積分を使うことであろう．計算したいのは

$$\begin{aligned} f(\xi) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} e^{-x^2/(2s)}\, e^{i\xi x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigl(-\frac{x^2}{2s} + i\xi x\Bigr) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigl(-\frac{1}{2s}(x - is\xi)^2 - \frac{s}{2}\xi^2\Bigr) dx = e^{-s\xi^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigl(-\frac{1}{2s}(x - is\xi)^2\Bigr) \frac{dx}{\sqrt{2\pi s}} \end{aligned}$$

であるので，最後の積分が計算できればよい．これは $-is\xi$ がなければ普通のガウス積分で，積分の値は丁度 1．今は $-is\xi$ があるので少しだけ困るのだが，ここは複素平面で積分路を変更して考える.

つまり，問題の積分は

$$\int \exp\Bigl(-\frac{1}{2s}z^2\Bigr) \frac{dz}{\sqrt{2\pi s}}$$

と言う形である（z は $\mathrm{Im}z = -s$ と言う直線に沿って動く）ので，複素平面内で積分路をずらして $\mathrm{Im}z = 0$ まで持ってくる．これができる理由は（１）非積分関数 $e^{-z^2/(2s)}$ は複素平面全体で正則であり，かつ（２）$\mathrm{Im}z = -s$ と $\mathrm{Im}z = 0$ をつなぐための $\mathrm{Re}z = \pm\infty$ のところの寄与がゼロになる，ためである（複素積分の復習であるから，各自確かめて欲しい）.

$\mathrm{Im}z = 0$ まで持って来た後は，普通のガウス積分であるから，積分値は 1.

(ii) もう少し泥臭いやり方は以下の通り．$e^{isx\xi}$ がイヤなんだから，指数関数の展開

$$e^{ix\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} x^n$$

を積分の中に放り込んで，積分と和の順序を交換すると（どっちも絶対収束しているから交換可能）

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigl(-\frac{x^2}{2s} + i\xi x\Bigr) \frac{dx}{\sqrt{2\pi s}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^n}{n!} \int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp\Bigl(-\frac{x^2}{2s}\Bigr) \frac{dx}{\sqrt{2\pi s}}$$

を得る．後ろのガウス積分は

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^n \exp\Bigl(-\frac{x^2}{2s}\Bigr) \frac{dx}{\sqrt{2\pi s}} = \begin{cases} s^{n/2}(n-1)!! & (n \quad \text{が偶数}) \\ 0 & (n \quad \text{が奇数}) \end{cases}$$

であるので，

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigl(-\frac{x^2}{2s} + i\xi x\Bigr) \frac{dx}{\sqrt{2\pi s}} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\xi)^{2m}}{2m!} \times s^m \, (2m-1)!! = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-s\xi^2)^m}{(2m)!!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-s\xi^2/2)^m}{m!} = \exp\Bigl(-\frac{s\xi^2}{2}\Bigr) \end{aligned}$$

と計算できる．

(iii) 更に，以下のようなやり方もある．

$$f(\xi) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Bigl(-\frac{x^2}{2s} + i\xi x\Bigr) \frac{dx}{\sqrt{2\pi s}}$$

と定義し，f の満たすべき微分方程式をたてる．$f(\xi)$ を ξ で微分すると（積分が絶対収束しているから以下の計算は正当化できる）

$$\begin{aligned} f'(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} ix \exp\Bigl(-\frac{x^2}{2s} + i\xi x\Bigr) \frac{dx}{\sqrt{2\pi s}} = \int_{-\infty}^{\infty} i\Bigl(-s\frac{d}{dx} e^{-x^2/(2s)}\Bigr) e^{i\xi x} \frac{dx}{\sqrt{2\pi s}} \\ &= is \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(2s)} \Bigl(\frac{d}{dx} e^{i\xi x}\Bigr) \frac{dx}{\sqrt{2\pi s}} = -s\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/(2s)} \, e^{i\xi x} \frac{dx}{\sqrt{2\pi s}} = -s\xi f(\xi) \end{aligned}$$

となる（途中で部分積分した）．この微分方程式を，$f(0) = 1$ の初期条件の下で解くと，

$$f(\xi) = \exp(-s\frac{\xi^2}{2})$$

を得る．

(iii) のやり方は以前から知ってはいたが，本当にやった人がいたのにはちょっと驚いた．自分で考えついたのなら大変に良いことです．

確率論 I，確率論概論 （原）I 夏休み特別レポート問題（2002.07.29）

期末試験の時にも言いましたが，試験にそぐわない題材を中心に,「夏休みレポート」を出題します．特別レポート出題の趣旨は,「テストよりも高度でじっくり解くべき問題を楽しんでもらう」ことにあり，余力のある人向けです．興味のないことを点が欲しいがためにやるほど馬鹿らしいことはないから，興味のない人はやらなくても相応の点が出るように,「学期中のレポート」や「期末試験」の結果から成績を算出します．だからやりたくもないのにやるようなことは決してしないで下さい.（お互いの時間の無駄ですからね.）

かなり注意をして作ったが，印刷直前まで大幅に問題を変えたりしていたので，間違いが紛れ込んでいる可能性も高い．おかしいと思ったら e-mail などで遠慮なく問い合わせて欲しい．なお，万が一間違いが発見された場合は web page でも知らせるつもりである．

問 16： 大数の強法則について，もう少し考えよう．$X_1, X_2, X_3, \ldots$ を独立・同分布な確率変数とし，以下の 2 つの命題を定義する：

命題 1： ある定数 μ が存在して $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \xrightarrow{a.s.} \mu$ が成り立つ

命題 2： $E[\,|X_1|\,] < \infty$ である

実は命題 1 と命題 2 は同値なのだが，これについて，以下に答えよ．

(i) 命題 1 が成り立っているなら $\mu = E[\,X_1\,]$ であることを示そう．

(ii) 命題 1 が成り立っているなら命題 2 も成り立つことを示そう.（一つのやり方：Borel-Cantelli の補題などを使って $\displaystyle\sum_n P[\,|X_n| \geq n\,] < \infty$ であることを示し，上の和と期待値 $E[\,|X_1|\,]$ の関係を考える.）

(iii) 命題 2 が成り立っているなら命題 1 もなりたつことを示そう．

（註）(iii) はいろいろな本にいろいろな方法が書いてあるだろうが，どれもなかなか大変だろう．いろいろと調べる過程で概収束についての理解が深まることを期待し，敢えてヒント無しで出題する．

問 17： 最後に，ランダムウォークの性質について，もう少し見ておきたい．テーマは arcsin law である．この問題は，講義でやり残した面白い性質を紹介する意味合いもあるから，いろいろと自分で調べて自由に解答することを望む.

考える対象は今まで何回も取り上げた一次元の対称なランダムウォークである．時刻 n での位置は,

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \tag{1}$$

と書けている（ここで $X_1, X_2, \ldots$ は独立同分布な確率変数で，その分布は確率 $\frac{1}{2}$ で ± 1 になるもの）．これについては例えば大数や中心極限定理，更には再帰性などを議論した．そこで，この問題では，もう少し詳しい性質，特に

> $2n$-歩のランダムウォークを一つ決めた時，最後に 0 に戻ってきたのはいつか？最後に戻ってきた時刻を T_{2n} と書くとき，$\dfrac{T_{2n}}{2n}$ の分布は何か？

と言う問題を考えたい.（一応，式で書いておくと，ランダムウォークが１つ与えられたとき，T_{2n} とは，

$$S_{T_{2n}} = 0, \qquad \text{かつ} \qquad T_{2n} < j \le 2n \text{ では } S_j \neq 0 \tag{2}$$

となるような時刻のことである.）この答は次の定理で与えられることがわかっている.

定理（arcsin law）「最後に原点に戻ってきた時刻」T_{2n} について，以下の極限定理が成り立つ：

$$\lim_{n\to\infty} P[\,T_{2n} \le 2nx\,] = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x} \qquad (0 \le x \le 1) \tag{3}$$

この定理を理解しようと言うのが問題の趣旨である．以下にとらわれる必要はないが，考えやすいようにいくつかの小問を与えておく.（Arcsin law は reflection principle を用いて証明されることが多いが，以下に従えば reflection principle 無しでもできる.）

1. まず，証明に入る前に，定理の意味を少し見ておこう．Arcsin law が面白いのは，それが直感に反しているように思えることである．大数の法則をええ加減に解釈すると，

   > S_n/n がゼロに収束（概収束または確率収束）するのは S_j がプラスの所とマイナスのところがキャンセルするからで，そのためには S_{2n} は頻繁に符号を変える必要がある．だから $x < 1$ である限り，$\lim_{n\to\infty} P[\,T_{2n} \le 2nx\,] = 0$ だろう

   と言いたくなる．しかし，上の定理によると，$P[\,T_{2n} \le 2n \times x\,] \approx \frac{1}{2}$ となる x は，大きな n に対しては丁度 $\frac{1}{2}$ である．つまり $\frac{1}{2}$ もの確率で，$2n$ 歩の内の後半の n 歩は原点に一回も戻ってこない訳だ．これは n がいくら大きくてもそうだから,「頻繁に符号を変える」とは全く異質な現象に見える.
   自分なりにこの辺りを納得するように努め，特に上で展開した「ええ加減」な議論のどこに穴があり得るのか，など自由に考えてみよう.（勿論，以下の証明をやってから考えてもよい.）

2. 上の定理を証明する一つの流れは以下のようになるだろう．まず，記号を導入する（一つ目の等式の後の量は，我々が講義で使った記号，講義ノートの p.49 辺りを参照）

$$u_{2n} \equiv P_{2n}(0) \equiv P\Big[\,S_{2n} = 0\,\Big] = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}, \tag{4}$$

$$f_{2n} \equiv F_{2n}(0) \equiv P\Big[\,S_{2n} = 0, \text{ かつ } 1 \le j \le 2n-1 \text{ で } S_j \neq 0\,\Big] \tag{5}$$

   ただし，$f_0 \equiv 0$ と定義する.

3. f_{2n} と u_{2n} の間には

$$f_{2n} = u_{2n-2} - u_{2n} = \frac{1}{2n-1}u_{2n} \qquad (1 \le n) \tag{6}$$

   の関係が成り立つことを示す.（実はこの関係式を経由しなくても証明できるが，この関係はそれ自身でも面白いのでここに書いた.）

4. $1 \le k \le n$ について

$$P\Big[\,T_{2n} = 2k\,\Big] = u_{2k} \times u_{2n-2k} \tag{7}$$

   であることを示す（上の $u_{2k} \times u_{2n-2k}$ は u_{2k} と u_{2n-2k} の単なる積であるが，添え字がごちゃごちゃヤヤコシイので $\times$ を挟んだ）.

5. Stirling の公式などを用いて u_{2k} などを近似し，これから

$$P[\,T_{2n} \le 2nx\,] = \sum_{k \le nx} P\Big[\,T_{2n} = 2k\,\Big] \tag{8}$$

を計算する．

(6) **のヒント，その１**

(6) を示すには少なくとも２通りの方法がある．その一つは「母関数」を使うことである．母関数については講義では触れなかったが，特性関数と非常に似たものである．少し説明しておく．

(0) 数列 a_n の母関数とは $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, z^n$ で定義される z の関数のことである．(非負の値をとる確率変数 X があって，$a_n = P[X = n]$ である場合，形式的に $z = e^{it}$ とおくと特性関数に一致する．)

(i) f_{2n} と u_{2n} の間には

$$u_{2n} = \sum_{k=1}^{n} f_{2k}\, u_{2n-2k} \qquad (n \ge 1) \tag{9}$$

が成り立つことを示す．

(ii) f_{2n} と u_{2n} の母関数をそれぞれ $F(z), U(z)$ とする

$$F(z) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} z^n\, f_{2n}, \qquad U(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, u_{2n} \tag{10}$$

時，上の関係式から

$$U(z) = 1 + F(z)\, U(z) \tag{11}$$

が成り立つことを示す．

(iii) u_{2n} の具体形から

$$U(z) = (1 - z)^{-1/2} \tag{12}$$

であることを示す

(iv) 以上から $F(z)$ を求め，これを z の級数として表すことで f_{2n} の表式を求める．

(v) 最後に，求めた f_{2n} の表式を u_{2n} などの表式と比べて，(6) を証明する．

(6) **のヒント，その２**

(6) を示すもう一つの方法は，Reflection Principle を用いることである．Reflection Principle について解説しようと思ったのだが，段々力が尽きてきた．少し進んだ確率論の本には解説してあるし，この原理自身が非常に面白いものであるから，興味のある人は調べてみて欲しい．(一例は下の (14) である．)

(7) **のヒント**

(7) を示す方法も，少なくとも２通りある．

- まず考えている確率を以下のように分解する：

$$P\Big[T_{2n}=2k\Big]=P\Big[S_{2k}=0 \text{ かつ } 2k<j\le 2n \text{ では } S_j\ne 0\Big]$$
$$=P\Big[S_{2k}=0\Big]\times P\Big[1\le j\le 2n-2k \text{ に対して } S_j\ne 0\Big] \tag{13}$$

（上の２番目の等号はなぜ成り立つのだろうか？）この最初の確率は u_{2k} であるので，２番目の確率が問題で,

$$P\Big[1\le j\le 2n \text{ に対して } S_j\ne 0\Big]=P\Big[S_{2n}=0\Big] \tag{14}$$

が言えればよい．なお，(14) はそれ自身でもなかなか面白く，初めて見るとかなり面食らうと思う．左辺は「$2n$ までに原点に返ってこない確率」であり，右辺は「時刻 $2n$ で丁度原点にいる確率」だ．この２つが等しいなどとはなかなか思えない...

- (14) を示す一つの方法は (6) を用いることである．具体的には，左辺の確率をいろいろな f_{2j} によって表してから (6) を用いて f_{2j} を消去する.（この際，１次元のランダムウォークは再帰的であること，つまり $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} f_{2n}=1$ を使う必要があるかも.
- (14) を示すもう一つの方法は Reflection Principle を用いることである.

問 17a：　（これは本当のおまけ）

Arcsin law には，以下のもう一つのバージョンがある．興味のある人はこれも考えてみよう．一見何の関係もなさそうな T_{2n} と N_{2n} （以下で定義）が全く同じ確率分布に従っているのは，かなり不思議である．

問 17 と同じく，長さ $2n$ のランダムウォークを考え，どのくらいの j が $S_j>0$ を満たしているかを考える．より正確には $2n$ 個のステップ $(j-1,j)$ （$j=1,2,3,\ldots,2n$）の内，$S_{j-1}>0$ または $S_j>0$ なるものを「正にいるステップ」と言い，この「正にいるステップの数」を N_{2n} で表すことにする．このとき,

$$P\Big[2n \text{ までに丁度 } 2k \text{ の「正にいるステップ」がある}\Big]=P\Big[N_{2n}=2k\Big]=u_{2k}\times u_{2n-2k} \tag{15}$$

が成り立ち，$P\Big[N_{2n}=2k\Big]$ は (3) と全く同じ形の arcsin law に従う.

締め切りなど：

締め切りは 2002 年 9 月 20 日（金）の 17:00,
提出場所は僕の部屋（理 1-508）の前の封筒かポスト
用紙はできうる限り A4 の紙を用いる（B5 などの小さい紙は紛れてなくなるかも）

とします.

（いつも通りの）レポートのお約束：

- 友達と相談しても，本を調べても，何をやっても良いから，自分で理解した範囲を書くこと．その際，参考文献や議論した友達の名前も明記すること.（友達と議論したり，本を見たからと言って悪い点をつける，などと言うことは絶対にしない．一番大事なのは自分でわかったところを表現することだから，それまでの過程で何をやっても問題ない.）
- なお，この講義内容・講義形態についての感想，不満，文句，このように改善すべしとの意見などもあれば歓迎します．この講義は終わってしまったわけですが，今後のいろいろな講義の参考にします.

確率論（概論） 期末テスト（原）　問題用紙

2002.07.23 実施予定

注意事項

- 使用した答案用紙に，氏名と学生番号を明記せよ．
- 大体は基本的な問題である．ともかく，全問に解答せよ．
- 答案用紙の裏も使用して良い．ただし，裏を使用する場合は,「裏に続く」などと明記すること.（答案用紙が足りなくなった場合は追加を渡すから，その旨言ってください.）
- 解答に至るまでの道筋，理由等を説明すること．最終的な結果のみ書いた場合には，全く点がないこともあり得る．必要以上に神経質になる必要はないが，どのように説明するかも評価のうちと思っていただきたい．
- 講義中に予告したとおり，以下の要領で持ち込みを認めている．
  - 持ち込めるものは A4 の大きさの紙の<u>片側に自筆で書いたもの</u>一枚のみ．裏側まで書いたり，コピーしたりしたものは無効である．
  - 持ち込んだ紙には名前と学生番号を書いて，答案用紙と共に提出すること.（持ち込み無しで試験を受けようと言う人も，白紙に名前と学生番号を書いて提出してください.）
- 問題は裏に，２ページに渡ってある．

なお，この講義で扱った題材にはテストになじまないもの（ランダムウォークやブラウン運動）が多く含まれている．そこで，これを補う意味で「夏休み特別レポート」を出題する．本来ならばこのテスト問題用紙と同時に出題したかったのだが，他の用事をどうしても優先する必要があってできなかった．そこで，最後のページにある要領で「夏休み特別レポート」を出題する．意欲のある人は挑戦して欲しい．

問題は裏に

問 1： （確率変数などの定義を訊く基本問題）6 つの面が等確率で出るようなサイコロを一回だけ投げる．出た目の数を表す確率変数を X とする．また，確率変数 Y は，出た目が偶数の時に 0，奇数のときに 1 の値をとるものとする．

1. 確率変数 X と Y の期待値と分散をそれぞれ求めよ.
2. 確率変数 X と Y の（累積）分布関数をそれぞれ求めよ.
3. 確率変数 X と Y は独立か？

問 2： （独立性の意味を訊く基本問題）適当な確率空間で定義された事象 A, B, C で，以下の 2 条件のどちらかを満たすが，独立ではないものの例を挙げよ．具体的な事象の例を作っても良いし，その代わりに $P[A \cap B]$ などを全て矛盾なく（確率の公理を満たすように）与えてもよい．後者の場合はベン図を書いて，確率を割り振っても構わない.（ううむ，ここまでヒントを与えてしまって良いものか？）

1. 2つづつペアにして考えると（A と B，B と C，C と A）独立である
2. $P[A \cap B \cap C] = P[A]\,P[B]\,P[C]$ が成り立つ.

（注意）上の 2 条件の両方が成り立ったら，これは 3 つの事象が独立と言うことの定義そのものだ．だから題意を満たす例は 2 条件の片方しか満たせない.

問 3： サイコロを n 回投げることを考える（$n \geq 40$ くらいとしておく）．勿論，サイコロの 6 つの面はどれも等確率で出て，かつ一回ごとのサイコロ投げの結果は独立だと仮定してよい.

1. n 回のうちで 1 の目が出た回数を N_n と書くとき，N_n の期待値と分散を計算せよ.
2. $P[\frac{n}{6} - \sqrt{n} \leq N_n \leq \frac{n}{6} + \sqrt{n}] \geq \frac{31}{36}$ が成り立つことを示せ（ヒント：チェビシェフの不等式）.
3. 更に極限
$$\lim_{n\to\infty} P[\frac{n}{6} - \sqrt{n} \leq N_n \leq \frac{n}{6} + \sqrt{n}]$$
を，適当な積分で表せ（積分の値まで評価する必要はない）.

問 4： 以下は法則収束，確率収束，特性関数などに関する,（部分的に）少しだけ高度な問題である.

1. 実確率変数の列 $X_1, X_2, X_3, \ldots$ が，$n \to \infty$ で，ある実定数 c に法則収束することがわかっている．このとき，確率収束の意味でも X_n は c へ収束することを証明せよ.（短く言うと：X_n が定数 c に法則収束するなら，実は確率収束している.）
2. 実確率変数の列 $X_1, X_2, X_3, \ldots$ と確率変数 Y, Z があり，X_n は Y と Z に確率収束している：
$$X_n \xrightarrow{P} Y, \qquad X_n \xrightarrow{P} Z$$
このとき，確率 1 で $Y = Z$ である（つまり，$P[Y = Z] = 1$ である）ことを証明せよ.

3. 実確率変数 X に対し，その特性関数を（講義通り）$\phi(t) \equiv E\big[e^{itX}\big]$ で定義する．X が有限の期待値 μ を持つならば，

$$\phi(t) = 1 + i\mu t + o(t)$$

が成り立つことを示せ．ここで $o(t)$ は「小さな O」で，$\lim_{t\to 0} \frac{o(t)}{t} = 0$ を満たすような項を表す．

4. （これは難しいと思う．）実確率変数の列 $X_1, X_2, X_3, \ldots$ と確率変数 Y があり，X_n は Y に確率収束している：

$$X_n \xrightarrow{P} Y$$

このとき，単調増加する数列 $n_1, n_2, n_3, \ldots$ をうまく選ぶと，列 $\{X_{n_i}\}_{i=1}^{\infty}$ が Y に概収束するようにできることを示せ．(短く言うと：確率収束する確率変数の列は，概収束する部分列を含む．）ヒント：概収束の十分条件の一つに，

任意の $\epsilon > 0$ に対して，$\sum_{n=1}^{\infty} P\big[\,|X_n - Y| > \epsilon\,\big] < \infty$ が成り立つこと

と言うのがある．これを証明して用いても良い．

問 5： 次の形の大数の弱収束を証明せよ（ヒント：上の問 4 の小問たち．勿論，他の方法で証明できるなら，それでも良い．）．

証明すべき定理： $X_1, X_2, X_3, \ldots$ を独立かつ同分布で，有限の期待値を持つ確率変数の列とする．X_j の期待値（各 j に共通）を μ と書き，$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ と定義すると，

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow{P} \mu \qquad \text{（収束は確率収束）}$$

が成り立つ．

（註）「X_i が有限な分散を持つ」場合は講義でも取り扱い，チェビシェフの不等式などで証明した．ここでは「分散が有限」の条件をはずしても定理が成り立つことがポイント．
（余談）実は上の定理の条件の下では大数の強法則（つまり，概収束）も成り立ってしまう．だけどもその証明はもう一段面倒なので，ここでは訊かないことにした．大数の弱法則は上より更に弱い条件の下で成り立つことが知られている（実際，強法則が成り立つけども弱法則が成り立たないような例はいろいろある）．

夏休み特別（自由）レポートについて

期末テストは「最低限を訊く」ことに重点を置いたので，これでは不満の残る人が出ると思う．また本来，大学院の講義で扱うような題材には，時間の限られた試験という形式にあわないものも多い（この講義では後半部分が相当する[1]）．そこで，このような不満を解消すべく,「特別レポート」を出すことにした．

今回，出題が間にあわなかったので，以下の要領で出題することにした．

- 特別レポート出題の趣旨は,「テストよりも高度でじっくり解くべき問題を<u>楽しんでもらう</u>」ことにある．要するに，上で述べたような「試験ではできないこと」をやってもらうのが狙いで，余力のある人向けだ．
- 特別レポートの問題は，７月２９日までに完成させるつもり（本当は今週中を目指しているが，ずれ込むことも予想して）．
- 問題完成後はプリントとして僕の部屋の前のポストに入れておく．同時に，僕の web page でも公開する（問題ができたかどうかの最新情報も web page に載せる）．
- なお，帰省などで学校に来れず，web からもダウンロードできない人には，住所を教えてもらえれば，郵送することもできる．希望者はこの試験の後に直接，またはメイルで請求してください．
- レポート〆切は大体，９月の中旬（または下旬）を予定している．確定した〆切はレポート問題と共に提示する．

なお，この特別レポートの採点上の位置づけは，以下の通りである．

- 原則として,「特別レポート」は楽しんでもらうためのもので,「ボーナス問題」のようなものと思ってくれればよい．興味のないことを点が欲しいがためにやるほど馬鹿らしいことはない．だから，<u>興味のない人はやらなくても相応の点が出るように</u>,「学期中のレポート」や「期末試験」の結果から成績を算出する．
- 逆に言うと，期末テストが無茶苦茶だった人が「特別レポート」で挽回することはなかなか難しいだろう.「うんうん，ここまでわかっていれば良いな」と思わせるような非常に立派なレポート（もちろん，自分の言葉で理解したことが書いてある）が出てきた場合には，少しは挽回できるかもしれないが.
- （言わずもがなの注意）この特別レポートに関しては，あくまで「楽しむ」ためのものであるから，「人のレポートの丸写し」は絶対にやらないで欲しい．本で調べるのも人と相談するのも一向に構わないが，その際は誰と相談したか，どの本を見たかなどを明記した上で，自分の言葉でまとめること．特別レポートがあってもなくてもそれなりの成績は出るのだから，興味を持った人だけがやってくれればよい．

[1] ランダムウォークやブラウン運動の問題を試験に出そうと大分頑張ったのだが，どれも簡単すぎるか時間がかかりすぎるかになってしまい，諦めた．ランダムウォークやブラウン運動をよく勉強してきた人がいたら，ご免なさい

解答編

簡単に略解を載せる．

問 1：

定義通り計算するだけなので答のみ書く．

$$E[X] = \frac{7}{2}, \qquad \mathrm{Var}[X] = \frac{35}{12}, \qquad E[Y] = \frac{1}{2}, \qquad \mathrm{Var}[X] = \frac{1}{4}$$

X の累積分布関数は

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ j/6 & j \le x < j+1 \quad (j = 0,1,2,3,4,5) \\ 1 & x \ge 6 \end{cases}$$

Y の方は

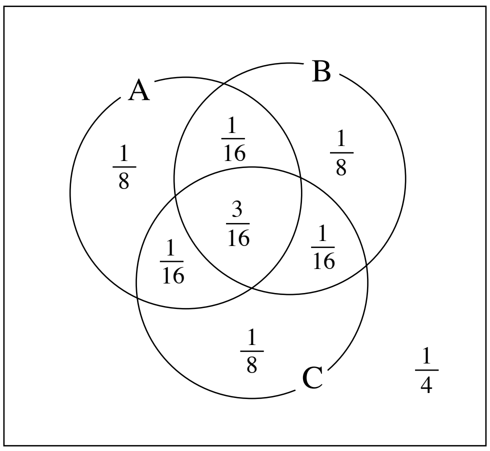
$$F_Y(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/2 & 0 \le x < 1 \\ 1 & x \ge 1 \end{cases}$$

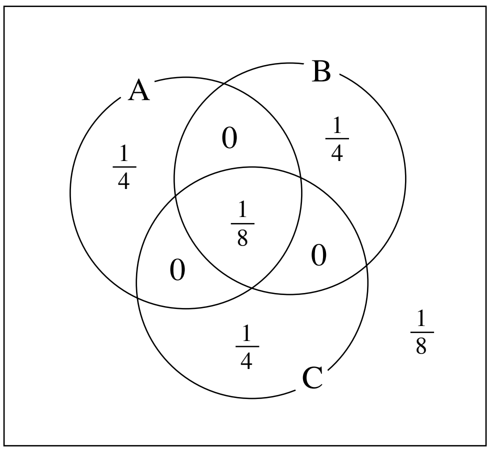
X と Y は独立ではない．例えば， $P[\{X=2\} \cap \{Y=1\}] = 0$ であるが，$P[X=2]\,P[Y=1] = \frac{1}{12}$ で，両者は等しくない！

問 2：

基本的にベン図に確率を割り振ればよいが，<u>全確率が 1 を超えないように</u>気をつける必要がある．何人かの人が平気で 1 を超えていた．

下に一例を与える．左側が 1 を満たす例，右側が 2 を満たす例．





問 3：

$$X_i = \begin{cases} 1 & （確率 \frac{1}{6}）\\ 0 & （確率 \frac{5}{6}）\end{cases}$$

とすると，$N_1 = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ である．期待値と分散は

$$E[N_n] = nE[X_i] = \frac{n}{6}, \qquad \mathrm{Var}[N_n] = n\mathrm{Var}[X_1] = n(\frac{1}{6} - \frac{1}{36}) = n\frac{5}{36}$$

である．よって，チェビシェフから

$$P[|N_n - \frac{n}{6}| \geq \sqrt{n}] \leq \frac{\mathrm{Var}[N_n]}{n} = \frac{5}{36}$$

よって，

$$P[\frac{n}{6} - \sqrt{n} \leq N_n \leq \frac{n}{6} + \sqrt{n}] \geq \frac{31}{36}$$

となる．最後に確率の極限を求めるには CLT を用いる．

$$Z_n \equiv \frac{1}{\sqrt{\mathrm{Var}[N_n]}}(N_n - E[N_n]) = \frac{6}{\sqrt{5n}}(N_n - \frac{n}{6})$$

が $N(0,1)$ に行くので，これで書き直すと，

$$\lim_{n\to\infty} P[\frac{n}{6} - \sqrt{n} \leq N_n \leq \frac{n}{6} + \sqrt{n}] = \lim_{n\to\infty} P[|Z_n| \leq \frac{6}{\sqrt{5}}] = \int_{-6/\sqrt{5}}^{6/\sqrt{5}} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

を得る．

問 4：

1. $X_n \xrightarrow{D} c$ と言うことは，distribution function で考えて，($F_n(x) \equiv P[X_n \leq x]$ と書く)

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & (x < c)\\ 1 & (x > c)\end{cases}$$

と言うことだ（$x = c$ では極限の分布関数が不連続なので，$x = c$ についてはわざとぼかしてある）．これは任意の $\epsilon > 0$ を固定したとき，

$$P[X_n > c + \epsilon] = 1 - F_n(c + \epsilon) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 - 1 = 0$$

$$P[X_n \leq c - \epsilon] = F_n(c - \epsilon) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

を意味する．つまり

$$\lim_{n\to\infty} P[|X_n - c| > \epsilon] = 0$$

が成り立つので，確率収束する．

講義中に「法則収束は<u>有界な</u>関数の期待値の収束と同じ」と言った．$E[|X-c|]$ の期待値に注目した人がいたが，これは有界ではないから，法則収束するからと言って $E[|X-c|]$ の収束は保証されない．

2. 定義から，

$$\lim_{nto\infty} P[\,|X_n - Y| > a\,] = 0, \qquad \lim_{nto\infty} P[\,|X_n - Z| > a\,] = 0$$

が全ての $a > 0$ に対して成り立つ．ので，

$$\forall a > 0,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists N > 0,\quad \text{s.t.}\quad n > N \implies P[\,|X_n - Y| > a\,] < \epsilon \ \text{かつ}\ P[\,|X_n - Z| > a\,] < \epsilon$$

である．(本当は Y, Z 別々に N を決めるべきだが，上の N は2つの N の大きい方だと思えばこれでも正しい.)

さて，

$$|Y - Z| = |Y - X_n + X_n - Z| \le |Y - X_n| + |X_n - Z|$$

であるから，$n > N$ では

$$P[\,|Y - Z| > 2a\,] \le P[\,|Y - X_n| > a\,] + P[\,|X_n - Z| > a\,] < 2\epsilon$$

が成り立つ．$\epsilon > 0$ は任意にとれるので（それに応じて N を大きく），これから

$$P[\,|Y - Z| > 2a\,] = 0$$

が任意の $a > 0$ に対して結論できる．つまり，$P[Y \neq Z] = 0$ なわけですな．

3. 基本的にはテイラー展開である．厳密にやるのは以下のようなのが一例だろう．

$$\frac{\phi(t) - 1 - it\mu}{t} = \frac{1}{t}\left\langle e^{itX} - 1 - itX \right\rangle = \left\langle \frac{e^{itX} - 1 - itX}{t} \right\rangle$$

であるが，期待値の中身は

- X を止める毎に $t \to 0$ でゼロに行く
- 更に，$|e^{itX} - 1 - itX| \le 1 + 1 + |X|$ であって，$t \neq 0$ では可積分

である．ので，優越収束の定理からこれは $t \to 0$ でゼロへ行く．つまり

$$\left\langle \frac{e^{itX} - 1 - itX}{t} \right\rangle = o(1), \qquad \implies \qquad \left\langle e^{itX} - 1 - itX \right\rangle = o(t)$$

が結論できる．

4. まず，ヒントを認めて証明する．X_n が Y に確率収束しているので，任意の $\epsilon > 0$ に対して $\lim_{n\to\infty} P[\,|X_n - Y| > \epsilon] = 0$ が成り立つ．これはつまり，

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall \delta > 0,\ \exists N\ \text{ s.t.}\quad n > N \implies P[\,|X_n - Y| > \epsilon] < \delta$$

を意味する．そこで，正の整数 k に対して上の δ を 2^{-k} とした形の

$$n \ge N_k \implies P[\,|X_n - Y| > \epsilon] < 2^{-k}$$

となるような N_k をとることが出来る．基本的には部分列として $\{X_{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ をとればよいが，N_k が単調増加していないかも知れないので，その場合には $\{X_{N_k}\}_{k=1}^{\infty}$ から単調増加していない部分を取り除いた部分列を考えるとよい.（それを n_k と書くことにする.）すると，$n_k \ge N_k$ であるから，

$$\sum_{k=1}^{\infty} P[\,|X_{n_k} - Y| > \epsilon] < \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = 1 < \infty$$

となって，ヒントの条件が満たされることがわかる．

最後に，ヒントの条件が概収束の十分条件であることは，以下のようにしてわかる．

$$A(\epsilon) \equiv \{|X_n - Y| > \epsilon \quad \text{for infinitely many} \quad n\}$$

という事象を定義する．各サンプル ω 毎に考えると，$X_n(\omega) \to X(\omega)$ とは，

$$\text{任意の}\ \epsilon > 0\ \text{に対して}\omega \notin A(\epsilon)$$

と同値である．よって X_n が Y に概収束するには，$A(\epsilon)$ の確率がゼロであることが必要十分である．ところが，ヒントの条件が成り立っていると，Borel-Cantelli の補題から

$$P[\,A(\epsilon)\,] = 0$$

が結論できる． □

問 5：

極限の行き先が定数の場合は確率収束と法則収束は同値（問４の 1）だから，S_n/n が μ に法則収束することを示せば十分．さて，法則収束を言うためには，対応する特性関数が収束することを言えば良かったので，それを狙う．

X_j が独立ゆえ，任意の正の n に対して $\frac{S_n}{n}$ の特性関数 ϕ_n は

$$\phi_n(t) = \prod_{j=1}^{n} \left\langle \exp(i\frac{t}{n}X_j) \right\rangle = \left\langle \exp(i\frac{t}{n}X_1) \right\rangle^n$$

が成り立つ．ところが，問４の３から，

$$\left\langle \exp(i\frac{t}{n}X_1) \right\rangle = 1 + i\mu\,\frac{t}{n} + o(\frac{t}{n})$$

が成り立ち，従って，

$$\phi_n(t) = \Big(1 + i\mu\,\frac{t}{n} + o(\frac{t}{n})\Big)^n = 1 + i\mu t + n \times\ o(\frac{t}{n})$$

が成り立つ．ここで $n \to \infty$ とすると

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(t) = 1 + i\mu t$$

が結論できるが，右辺は一点 μ に集中した分布の特性関数に他ならない．

と言うわけで S_n/n が μ に法則収束することが示され，問４の１から確率収束も言える． □