Kyoto-Math 93-09 (1993)

Une nouvelle démonstration des identités de Hecke

Takaaki NOMURA

Soit $\mathcal{P}_j$ $(j = 0, 1, 2, \dots)$ l'espace vectoriel des polynômes homogènes de degré j sur $\mathbf{R}^n$ à coefficients complexes. On désigne par $\mathcal{PH}_j$ le sous-espace de $\mathcal{P}_j$ formé par les polynômes harmoniques. L'une des identiés de Hecke dont il s'agit est la suivante ([1]$\sim$[5]):

Théorème 1. *Si $p \in \mathcal{PH}_j$, on a*

$$\int_{\mathbf{R}^n} p(x) e^{-\pi\|x\|^2} e^{-2\pi i \xi\cdot x}\, \mathrm{d}x = i^{-j} p(\xi) e^{-\pi\|\xi\|^2} \qquad (\xi \in \mathbf{R}^n). \tag{1.1}$$

La démonstration normale [2] $\sim$ [5] fait usage de la formule de la moyenne des fonctions harmoniques et celle de Clerc [1, p. 198] utilise le lemme de Schur. Dans cet article, on présente une démonstration nouvelle et plus simple (à la représentation du groupe $SO(n, \mathbf{R})$ près) dont le mécanime s'applique aux autres identités de Hecke qu'on étudiera plus tard.

Tout ce dont on a besoin est l'irréductibilité de la représentation du groupe $SO(n, \mathbf{R})$ sur $\mathcal{PH}_j$: $T(g)f(x) = f(g^{-1}x)$ $(g \in SO(n, \mathbf{R}),\ f \in \mathcal{PH}_j)$ (voir [1], [3]). Une conséquence immédiate de cette irréductibilité est la suivante. Soit

$$\mathcal{N} := \{(c_1, \dots, c_n) \in \mathbf{C}^n\ ;\ c_1^2 + \cdots + c_n^2 = 0\}.$$

Alors, l'espace vectoriel $\mathcal{PH}_j$ est engendré par les fonctions $q_c(x)^j$ $(c \in \mathcal{N})$, où $q_c(x) := c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$. Pour le voir, il suffit d'observer que

$$\begin{aligned} \Delta(q_c(x)^j) &= j(j-1)(c_1^2 + \cdots + c_n^2) q_c(x)^{j-2} \quad \text{pour } j \geq 2, \\ T(g)q_c &= q_{gc}, \end{aligned}$$

et que $\mathcal{N}$ est stable par $SO(n, \mathbf{C})$ (donc par $SO(n, \mathbf{R})$). Par conséquent, on n'a qu'à montrer (1.1) pour $p(x) = q_c(x)^j$ $(c \in \mathcal{N})$. Or, l'analyse de Fourier élémentaire nous dit que $(x^\alpha f)\widehat{\ } = \big(-\frac{D}{2\pi i}\big)^\alpha \widehat{f}$ (avec la notation habituelle des multi-indices α) pour $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$, par exemple, et $(e^{-\pi\|x\|^2})\widehat{\ } = e^{-\pi\|\xi\|^2}$. Donc, ce qu'il faut démontrer est l'identité suivante:

$$q_c\Big(-\frac{D}{2\pi i}\Big)^j e^{-\pi\|\xi\|^2} = i^{-j} q_c(\xi)^j e^{-\pi\|\xi\|^2} \qquad (c \in \mathcal{N}). \tag{1.2}$$

On note d'abord que

$$q_c(D)\big(q_c(\xi)^k\big) = k\, q_c(c)q_c(\xi)^{k-1} = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots). \tag{1.3}$$

D'autre part, on a aisément

$$q_c(D)e^{-\pi\|\xi\|^2} = -2\pi q_c(\xi)e^{-\pi\|\xi\|^2}. \tag{1.4}$$

L'opérateur différentiel $q_c(D)$ étant d'ordre 1, les formules (1.3) et (1.4) permettent de démontrer, par récurrence, en utilisant la règle de Leibniz,

$$q_c(D)^j e^{-\pi\|\xi\|^2} = (-2\pi)^{-j} q_c(\xi)^j e^{-\pi\|\xi\|^2},$$

ce qui n'est autre que (1.2).

C.Q.F.D.

Voyons comment marche le même mécanisme dans la démonstration de l'autre identité de Hecke. Soit σ la mesure borélienne sur la sphère unité S^{n-1} pour laquelle on a

$$\int_{\mathbf{R}^n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty r^{n-1}\,\mathrm{d}r \int_{S^{n-1}} f(ru)\,\mathrm{d}\sigma(u)$$

pour toute fonction borélienne sommable f sur $\mathbf{R}^n$. On sait que

$$\widehat{\sigma}(\xi) := \int_{S^{n-1}} e^{-2\pi i\xi\cdot u}\,\mathrm{d}\sigma(u) = 2\pi\|\xi\|^{-(n-2)/2} J_{(n-2)/2}(2\pi\|\xi\|),$$

où J_λ désigne la fonction de Bessel ordinaire d'ordre λ ([2], [3] et [5]).

Théorème 2. *Soit $p \in \mathcal{PH}_j$. Alors*

$$\int_{S^{n-1}} p(u)e^{-2\pi i\xi\cdot u}\,\mathrm{d}\sigma(u) = 2\pi\, i^{-j}\|\xi\|^{-\frac{n-2}{2}-j} J_{\frac{n-2}{2}+j}(2\pi\|\xi\|),$$

Démonstration. Il suffit de montrer l'identité suivante:

$$q_c\Big(-\frac{D}{2\pi i}\Big)^j \widehat{\sigma}(\xi) = 2\pi\, i^{-j} q_c(\xi)^j \|\xi\|^{-\frac{n-2}{2}-j} J_{\frac{n-2}{2}+j}(2\pi\|\xi\|),$$

pour $c \in \mathcal{N}$. Cette fois-ci, la relation bien connue (e.g., [5, proof of Lemma IV.3.1])

$$\frac{d}{dt}\big(t^{-\lambda}J_\lambda(t)\big) = -t^{-\lambda}J_{\lambda+1}(t) \tag{1.5}$$

nous permet d'avoir pour $k = 1, 2, \dots, n$,

$$\frac{\partial}{\partial\xi_k}\widehat{\sigma}(\xi) = -(2\pi)^2\xi_k\|\xi\|^{-\frac{n-2}{2}-1} J_{\frac{n-2}{2}+1}(2\pi\|\xi\|),$$

de sorte que

$$q_c\Big(-\frac{D}{2\pi i}\Big)\widehat{\sigma}(\xi) = \frac{2\pi}{i} q_c(\xi)\|\xi\|^{-\frac{n-2}{2}-1} J_{\frac{n-2}{2}+1}(2\pi\|\xi\|).$$

Le résultat en découle via une récurrence facile utilisant (1.3) et (1.5).

C.Q.F.D.

Finalement, signalons que

$$q_c(D)(\|\xi\|^\alpha) = \alpha q_c(\xi)\|\xi\|^{\alpha-2},$$

qui, avec (1.3), permet non seulement de démontrer l'identité classique

$$p(D)\big(\|\xi\|^{2-n}\big) = c_j\|\xi\|^{2-n-2j}p(\xi) \qquad (p \in \mathcal{PH}_j),$$

où $c_j = (-1)^j(n-2)n(n+2)\cdots(n+2j-4)$ (voir [4, p. 74]) mais aussi de calculer la transformée de Fourier de $p(x)\|x\|^{-s}$ pour $p \in \mathcal{PH}_j$ à partir de celle de $\|x\|^{-s}$. On ne détaillera pas la démonstration, car cela se fait de la même façon.

Références bibliographiques

[1] J.-L. Clerc, Les représentations des groupes compacts, Les Cours du CIMPA, Analyse Harmonique, 145–234, CIMPA, Nice, 1983.

[2] P. Eymard, Analyse de Fourier euclidienne, Ibid., 1–144.

[3] J. Faraut, Analyse harmonique et fonctions spéciales. Deux Cours d'Analyse Harmonique, 1–151, Birkhäuser, Boston, 1987.

[4] S. Helgason, Groups and geometric analysis, Academic Press, New York, 1984.

[5] E. M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on euclidean spaces, Princeton Univ. Press, Princeton, 1971.

Département de Mathématiques
Faculté des Sciences
Université de Nancy I
BP 239
54506 Vandœuvre les Nancy, France

Department of Mathematics
Faculty of Science
Kyoto University
Sakyo 606, Kyoto, Japan