九州大学大学院
数理学研究院

行 列 の 世 界 で
代 数・幾 何・解 析

九州大学公開講座

「現代数学入門」

(2006 年 7 月 30 日)

野　村　隆　昭

(九州大学 大学院数理学研究院 教授)

目　　次

§1. 実数と複素数

ほんとうは，某テレビ番組をパロって，私の講座のタイトルを

行列のできる代数・幾何・解析

とするつもりだったのですが，ミーハーすぎるのでは，という懸念から，今のタイトルにしました．

さてさて，私たちは子供の頃からずっと，たし算，かけ算，そしてそれらの逆演算であるひき算，わり算に接してきています．日常生活でのショッピングでも，日本人は，結構正確に手早く，おつりの計算ができたりします．フランスなどを旅行された経験のある人で，かの国でのショッピングや食事でおつりをもらうときに，少々違和感を覚えたという人がいるかもしれません．13.50 ユーロの買い物で 20 ユーロ札を出すと[1]，まず 0.50 ユーロ硬貨を「14 ユーロ」の言葉とともに渡され，次に 1 ユーロ硬貨と同時に「15 ユーロ」という声を聞き，最後に 5 ユーロ札とともに「20 ユーロ」と発せられて，おつりの計算が終了するのです[2]．もっとも，スーパーなどのレジではおつりの金額がレジスターに表示されるので，店員さんもその金額をこちらに渡すだけなのですが，レストランでは普通はレジがなくて，席でお勘定をしますから，給仕の人のそういう形式の計算を目の当たりにして，こちら側がとまどったりします．今述べたおつり計算の方法は，ちょうど方程式

$$13.5 + x = 20$$

の未知数の x を，非常に原始的に求めていることになります．つまり，13.5 に何を加えれば 20 をなすのか，それを実際に実行しているわけです．おつりの計算であるところのひき算が，たし算の逆演算であることを強く意識させられる場面ではあります．そういえば，フランス語は数を数えられない，などということをおっしゃったどこかの知事さんがいらっしゃいました．かの知事さんのところの自治体とは，いまや福岡は 2016 年夏季オリンピックの招致で，一騎打ちのライバルですね．国内候補地の正式決定はこの夏の終わりでしょうか...

話がそれました．実数のたし算，かけ算では，交換法則というものがあります：

$$a + b = b + a, \qquad ab = ba$$

[1]仮にそれが日本だったら，まずどこでも即座に 6.50 ユーロのおつりを渡されることでしょう．

[2]普通のお店で，200 ユーロ札等の高額紙幣を出すと露骨に嫌な顔をされます．確かに彼らの方法では，高額紙幣からのおつりの計算は面倒ではあります．

私たちはこれにあまりにも慣れているため，当然のこととして受け入れていますし，「a たす b」あるいは「a プラス b」という言い方に，a と b の対称性すら感じるまでになっているのではないでしょうか．しかし，横書きを左から読むという習慣にのっとって，$a+b$ を「a に b を加える」と読むことにすると[3]，たし算の交換法則は，a に b を加えることと，b に a を加えることとは同じ結果を生じる — ということを意味します．日常生活では，これはなかなか難しいことです．たとえば，ミルクにコーヒーを加える — という語感からは，ミルクがあるところにコーヒーを入れることを意味し，コーヒーにミルクを加える — という語感からは，コーヒーがあるところにミルクを入れるということを意味するように思えます．ミルク・コーヒーか，カフェ・オ・レかの違い以上に，その二つの操作の結果から生じる飲み物の味は異なっていそうです．同じ味になるには，たとえばあらかじめコーヒーとミルクの量をはかっておくとか，そういうことをしないといけないでしょう．

交換法則の他に結合法則と呼ばれるものがあります：

$$a+(b+c)=(a+b)+c, \qquad a(bc)=(ab)c.$$

結合法則があると，実数のたし算，かけ算はどこからでも計算を始めてもいいということになります．結合法則がなかったときの不便さは容易に想像できるでしょう．例えば 5 個の実数 a,b,c,d,e をこの順に加えるときは

$$\Big(\big((a+b)+c\big)+d\Big)+e$$

などど書かないといけなくなります[4]．いっぱいカッコがついて，格好が悪いですね（オヤジギャグです）．交換法則と結合法則のおかげで，実数 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ が与えられたとき，それらのたし算，かけ算を

$$a_1+a_2+\cdots+a_n, \qquad a_1a_2\cdots a_n$$

と書いても全くまぎれがないのです．お好きなところから，たとえば計算のしやすいところから，たし算，かけ算を始めなさい，適当に並び替えてもよろしいですよ，結果は同じです — ということなのです[5]．

[3]より忠実には，「a に加うること b」でしょうか...

[4]結合法則も日常生活では成立していないでしょうね．「私は超文科系です」と言った場合，普通は，超 (文科系) — 文科系であることの程度が甚だしい — でしょうけれど，ひょっとしたら，(超文科) 系 — 文科系を越えて理科系でも何でも OK — かもしれません．もちろん両者の意味は等しくないですね．

[5]大数学者ガウスの少年時代の逸話に $1+2+\cdots+99+100=5050$ を即座に答えたというのがあります．$1+100, 2+99, \ldots$ というように 101 が 50 組できるからというものでしたが，これはまさしく，交換法則，結合法則の恩恵の賜です．

実数の次に習う数の体系として，複素数があります[6]．複素数は，2次方程式を解くために導入されたと高校の教科書で習います．確かに，たとえば2次方程式

$$x^2+1=0 \tag{1.1}$$

を考えると，実数の範囲でしか未知数xを考えないのなら，左辺ではつねに$x^2+1>0$ですから，右辺の0にはなりっこありません．実は歴史的に複素数というものがはっきりと認識されたのは，3次方程式を解く，あるいはもっと直接的に言いますと，3次方程式の根の公式[7]を解釈する必要性からなのです．それまでは，上の(1.1)のような2次方程式は,「解がない」ということで済まされてきたのです．

さて16世紀にカルダノ (1501–1576) によって，

$$x^3=3px+2q \tag{1.2}$$

という形の3次方程式[8]の根の公式

$$x=\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}+\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}} \tag{1.3}$$

が発見された[9]わけですが，$q^2<p^3$のときには，内側の根号の中が負になってしまいます．ここに「あり得ない数」$\sqrt{-1}$が現れているわけです．$\sqrt{-1}$とは，2乗して-1になる数，まさに2次方程式(1.1)の根（解）なのです．でも，2次方程式のときのように，そのような場合は「解がない」ということで，放っておけばよいではないか — という考え方もできそうです．ところが事はそれほど単純ではないのです．

具体的に話を進めることにして，3次方程式

$$x^3=15x+4 \tag{1.4}$$

を考えてみます[10]．カルダノの公式(1.3)にあてはめると（$p=5$, $q=2$ですから）

$$\begin{aligned} x&=\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}+\sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} \\ &=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}+\sqrt[3]{2-11\sqrt{-1}} \end{aligned} \tag{1.5}$$

[6]数の体系と言うとき，実数を持ち出す前に，自然数，整数，有理数を持ち出さなければいけませんが，ここでは堅苦しいことは抜きにしましょう...

[7]今の高校の教科書では「解の公式」と言うことになっています．

[8]どんな3次方程式を解くことも，この形の3次方程式を解くことに帰着させることができます．

[9]実際は$x=\omega^k\sqrt[3]{q+\sqrt{q^2-p^3}}+\omega^{3-k}\sqrt[3]{q-\sqrt{q^2-p^3}}$ $(k=0,1,2)$で3次方程式(1.2)のすべての解が得られるわけです．ただし1の3乗根を$1, \omega, \omega^2$とします．

[10]以下の考察はカルダノの弟子ボンベリ (1526–1572) によります．カルダノ自身がこのようなことを認識していたかどうかは疑わしいとされています．

となります．一方で，

$$x^3 - 15x - 4 = (x-4)(x^2+4x+1)$$

と因数分解でき，2次方程式 $x^2+4x+1=0$ は $x=-2\pm\sqrt{3}$ と解けますから，3次方程式 (1.4) は，4, $-2\pm\sqrt{3}$ という実根（実数解）しか持たないのです．ですから，3次方程式 (1.4) を「解なし」ということで捨てておくわけにはいきません．実際には，$(2\pm\sqrt{-1})^3 = 2\pm 11\sqrt{-1}$ ですから，$\sqrt[3]{2\pm 11\sqrt{-1}} = 2\pm\sqrt{-1}$ となりますので，(1.5) は $x=4$ を表し，脚注 8 より，3次方程式 (1.4) の 4 以外の解は（計算は略しますが）

$$\omega\cdot(2+\sqrt{-1}) + \omega^2\cdot(2-\sqrt{-1}) = -2-\sqrt{3},$$
$$\omega^2\cdot(2+\sqrt{-1}) + \omega\cdot(2-\sqrt{-1}) = -2+\sqrt{3}$$

となって，つじつまがあいます[11]．実根（実数解）しかない場合でも，公式の中では虚数[12]が現れているというところが面白いですね．これで複素数は避けて通れなくなったわけです．数学者の世界でも，$\sqrt{-1}$ を受け入れるまでに長い時間がかかっているのです．

また話がそれました．複素数とは何かということをここでは気楽に考えることにしましょう：

(1) 2乗して -1 となる数 i がある（虚数単位[13]と呼ぶ）．
(2) 複素数 α は $\alpha = a+bi$（ただし a, b は実数）の形に一通りに表される．
　実数 a は $a+0i$ という形の特別な複素数である．
(3) 複素数は実数と同じ規則で，たし算とかけ算ができる．

具体的には

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i, \tag{1.6}$$

$$(a+bi)(c+di) = ac+adi+bci+bd\,i^2 = (ac-bd)+(ad+bc)i. \tag{1.7}$$

---

[11] $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$ です．また，$\omega^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}\sqrt{-1}}{2}$ です．

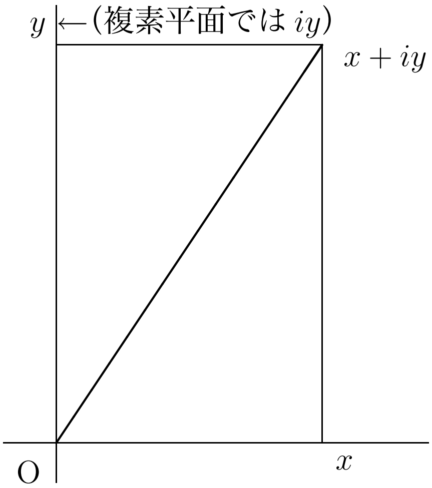
[12] 実数ではない複素数のことです．嘘数ではありません．imaginary number の中国語訳で，それが日本語数学用語として明治初期に採用されたとのことです．

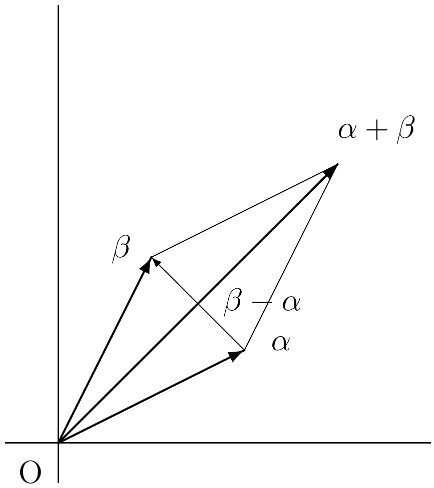
[13] 虚数単位を i で表すのはオイラー (1707–1783) 以来の慣用で，ガウス (1777–1855) により共有の財産となったということです．4元数や8元数を次節で導入するので，うるさくいえば，i は複素数の体系における虚数単位と呼ぶべきでしょう．

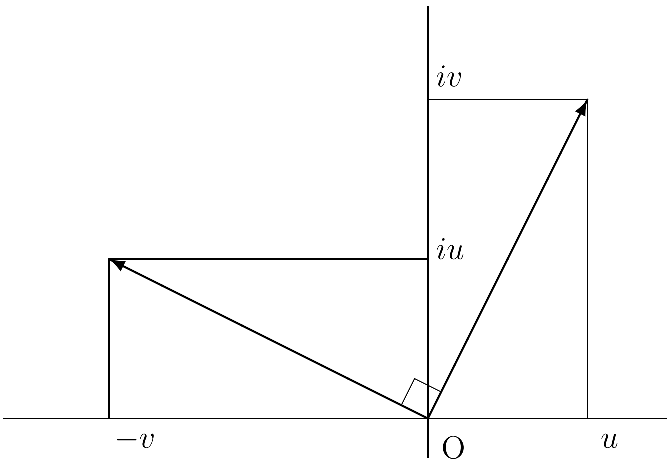
複素数のたし算，かけ算でも交換法則が成り立ちます：

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha, \qquad \alpha\beta=\beta\alpha.$$

複素数ではたし算やかけ算が視覚化されます．複素数 $z=x+iy$[14]と座標平面上の点 (x,y) を対応させます．そして，座標 (x,y) の点を複素数 $x+iy$ と言ってしまうのです．このように，複素数を表示する座標平面を複素平面（あるいは大数学者のガウスの名をとって，ガウス平面）と呼びます[15].





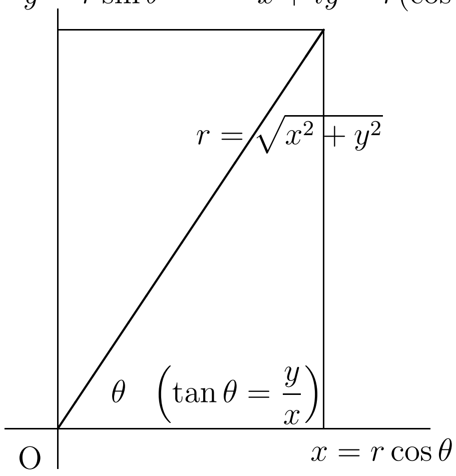


$i(u+iv)=-v+iu$

i 倍 $=90^\circ$ の回転

[14]以下 $x+yi$ のかわりに $x+iy$ と書きます．これは次ページで導入する極形式表示で $r(\cos\theta+\sin\theta\, i)$ と書くのは美しくないという理由からです．

[15]高校の教科書で複素数平面と呼んでいたこともあったようです.「虚」(imaginary) という言葉から離れて複素数という表現を造ったのもガウスです．



$x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$：複素数の極形式表示

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 　平面の点の極座標表示

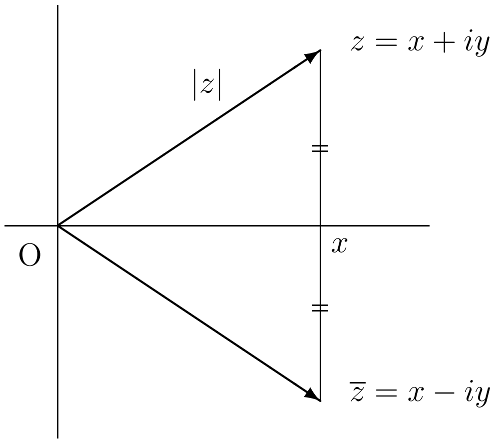
$$\begin{aligned} & r(\cos\theta + i\sin\theta)(u + iv) \\ & \quad = r\bigl(u\cos\theta - v\sin\theta + i(u\sin\theta + v\cos\theta)\bigr) \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u\cos\theta - v\sin\theta \\ u\sin\theta + v\cos\theta \end{pmatrix}$$

$r(\cos\theta + i\sin\theta)$ のかけ算：r 倍と θ だけの回転

一つ前の図では $i = \cos 90^\circ + i\sin 90^\circ$ に注意

オイラーの公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ を使えば[16]，極形式表示は $re^{i\theta}$ と簡明になります．



$\overline{z} = x - iy$：z の共役複素数

複素数 $z = x + iy$ に対して，$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ とおいて，$|z|$ のことを，z の絶対値と呼びます．z が実数のとき，すなわち $y = 0$ のときは $z = \sqrt{x^2} = |x|$ となって，実数の絶対値に一致します．共役複素数を使うと

$$z\overline{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$$

となりますから，$|z|^2 = z\overline{z}$ です．また $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ というように z を極形式表示をすれば，$|z| = r$ です．そうすると，2 個の複素数 z, w に対して，$|zw| = |z||w|$ であることがわかります．実際，z, w をそれぞれ極形式表示をして

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta), \qquad w = s(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

[16] $\theta = \pi\,(= 180^\circ)$ のときが,「博士の愛した数式」に出てくる式 $e^{i\pi} = -1$ です．

とすると，

$$zw = rs\big(\cos(\theta+\varphi) + i\sin(\theta+\varphi)\big)$$

となります．これは $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ をかけることは，r 倍と θ の回転 — ということからすぐに出ます[17]．従って，$|zw| = rs = |z||w|$ となります．これを平方した $|zw|^2 = |z|^2|w|^2$ を $z = x + iy$ と $w = u + iv$ で書くことにしますと，積の定義より $zw = (xu - yv) + i(xv + yu)$ ですから，次の恒等式になります[18]：

$$(xu - yv)^2 + (xv + yu)^2 = (x^2 + y^2)(u^2 + v^2). \tag{1.8}$$

最後に，複素数 w を，0 でない複素数 z で割ることを考えてみましょう．わり算はかけ算の逆演算ということで，w を z で割った商 $\dfrac{w}{z}$ とは，1 次方程式 $zx = w$ の解 x のことであると定義します．これを実際に解いてみましょう．両辺に z の共役複素数 $\overline{z}$ をかけます．そうすると，$|z|^2x = \overline{z}w$．そして，正の数 $\dfrac{1}{|z|^2}$ を両辺にかければ，$x = \dfrac{1}{|z|^2}\,\overline{z}w$ を得ます．ゆえに

$$\frac{w}{z} = \frac{1}{|z|^2}\,\overline{z}w$$

が複素数のわり算の定義式です．

次の節では，恒等式 (1.8) と，0 でない元でのわり算の可能性に着目しながら，数の体系の拡張を試みます．

§2．可除系

節の題でいきなり難しい言葉が出てきました．数の体系で，わり算ができる，すなわち，$z \neq 0$ ならば,「z でわり算ができる数体系」のことを可除系[19]と呼ぶことにします．

(1) 4 元数の体系．

Hamilton (1805–1865) によって 1843 年に導入されたもので，名前の由来は 4 次元の数（実数からなる四つ組で定まる数）ということからです．その意味からすると，複素数は，2 個の実数のペアで書けるので，2 元数．実数は，当然のことながら，1 元数というわけです．

---

[17] これより，cos と sin の加法公式が出ます：
$\cos(\theta+\varphi) = \cos\theta\cos\varphi - \sin\theta\sin\varphi$，$\sin(\theta+\varphi) = \sin\theta\cos\varphi + \cos\theta\sin\varphi$.

[18] もちろん式の展開で簡単に示せます．左辺から右辺へは因数分解の練習問題ですね．

[19] 漢字変換で最初に「可女系」ってなりました．これで思い起こされるのは，女系天皇問題ですが，私の PC にある漢字変換プログラムは，女系天皇を認める立場なのでしょうか？

さて4元数とは：

(1) 虚数単位 i, j, k を持つ： $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

(2) 4元数 α は $\alpha = a + bi + cj + dk$（$a, b, c, d$ は実数）の形に一通りに表される．複素数は $a + bi + 0j + 0k$ という形の特別な4元数である．

(3) i, j, k の間の積の法則は次で定める：

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j.$$

(4) (3) 以外は自然にたし算とかけ算ができる．

あからさまに書くと，

$$\begin{aligned} &(a + bi + cj + dk) + (p + qi + rj + sk) \\ &\qquad = (a + p) + (b + q)i + (c + r)j + (d + s)k, \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &(a + bi + cj + dk)(p + qi + rj + sk) \\ &\qquad = (ap - bq - cr - ds) + (aq + bp + cs - dr)i \\ &\qquad\qquad + (ar - bs + cp + dq)j + (as + br - cq + dp)k \end{aligned} \tag{2.2}$$

となります．(2.2) において $c = d = r = s = 0$ のときは，複素数の積の定義式 (1.7) に一致しています．かけ算で交換法則が成り立っていないことは，$ij = -ji = k$ から明らかです．でも結合法則 $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$ は成り立っています[20]．これを確かめるには，α, β, γ が i, j, k のいずれか（i, i, j 等のように重複を許す）であるときに確かめればよいのですが，$3^3 = 27$ 通りを逐一確かめるのも面倒なので，後のばしにしましょう（§3 の (3.5) 式以降参照）．

複素数のときと同様に，$\alpha = a + bi + cj + dk$ に対して，$|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ とおいて，4元数 α の絶対値と呼びます．また，$\overline{\alpha} = a - bi - cj - dk$ を α の共役4元数と呼びます．このとき，かけ算の定義から $\overline{\alpha}\alpha = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \alpha\overline{\alpha}$，つまり

$$|\alpha|^2 = \overline{\alpha}\alpha = \alpha\overline{\alpha} \tag{2.3}$$

を得ます．

命題 2.1. 2つの4元数 α_1, α_2 に対して，$\overline{\alpha_1\alpha_2} = \overline{\alpha_2}\,\overline{\alpha_1}$.

---

[20]結合法則も一種の交換法則と見ることができます．β に，(1) 左から α をかけるという操作 L_α を施した後に右から γ をかけるという操作 R_γ を施すことと，(2) R_γ を施した後に L_α を施すこととは，同じ結果を生じる，すなわち，結合法則は，二つの操作 L_α, R_γ の順番を入れ替えてもよい，交換が可能だ — ということを保証していることになります．

証明. α_1, α_2 が i, j, k の内のどれか 2 つ（重複を許す）の場合に確かめればよいのですが，例として

$$\begin{cases} \overline{ii} = \overline{-1} = -1 \\ \overline{i}\,\overline{i} = (-i)(-i) = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \overline{ij} = \overline{k} = -k \\ \overline{j}\,\overline{i} = (-j)(-i) = ji = -k \end{cases}$$

等々を挙げるにとどめましょう[21]. □

そうすると，(2.3)，命題 2.1，およびかけ算の結合法則を使って，$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ を証明することができます：

$$\begin{aligned} |\alpha\beta|^2 &= (\alpha\beta)(\overline{\alpha\beta}) = (\alpha\beta)(\overline{\beta}\,\overline{\alpha}) = ((\alpha\beta)\overline{\beta})\overline{\alpha} \\ &= (\alpha(\beta\overline{\beta}))\overline{\alpha} = |\beta|^2(\alpha\overline{\alpha}) = |\alpha|^2|\beta|^2. \end{aligned}$$

さてこれを，(1.8) のときのように，$\alpha = a + bi + cj + dk$ と $\beta = p + qi + rj + dk$ で書き直してみましょう．かけ算の公式 (2.2) より

$$\begin{aligned} &(ap - bq - cr - ds)^2 + (aq + bp + cs - dr)^2 \\ &\quad + (ar - bs + cp + dq)^2 + (as + br - cq + dp)^2 \\ &\qquad = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(p^2 + q^2 + r^2 + s^2). \end{aligned} \tag{2.4}$$

さて，わり算について見てみましょう．交換法則が成り立たないので，4 元数 x を未知数とする 2 つの方程式

$$\alpha x = \beta, \qquad x\alpha = \beta \tag{2.5}$$

は異なった方程式です．$\alpha \neq 0$ のとき，(2.5) を解いてみましょう．$\alpha x = \beta$ の両辺に左から $\overline{\alpha}$ をかけると（結合法則を使うことに注意），$|\alpha|^2 x = \overline{\alpha}\beta$．両辺に正の数 $\dfrac{1}{|\alpha|^2}$ をかけて $x = \dfrac{1}{|\alpha|^2}\overline{\alpha}\beta$．同様に，(2.5) の 2 番目の方程式からは $x = \dfrac{1}{|\alpha|^2}\beta\overline{\alpha}$ を得ます．したがって，4 元数の体系は可除系になっています．

(2) 8 元数の体系.

Hamilton の 4 元数の発見からわずか 2 か月後に，Graves によって 8 元数が発見されるわけですが，Graves の研究の発表は遅れて 1848 年になってしまいました．1845 年に Cayley (1821–1895) によって再発見され，今では Cayley 数と呼ばれています．今度は虚数単位を 7 個用意するのですが，後のこともあって，ここではもう少し一

[21] もちろんもっとエレガントに証明できます．§3 の (2) の最後を参照.

般な導入の仕方をします（**Cayley–Dickson** の拡張法と呼ばれています）．まず

複素数	$a+bi$	（実数の 2 重化）
4 元数	$a+bi+cj+dk=(a+bi)+(c+di)j$	（複素数の 2 重化）

に注意します．実数の中にはない虚数単位 i を使って，実数を 2 重化することにより，複素数が作られています．4 元数の方では $ij=k$ であることを思い出しましょう．そうすると，複素数の中にはない虚数単位 j を使って複素数を 2 重化することにより，4 元数が得られていることがわかります．この続きとして，8 元数を，4 元数の 2 重化ということで導入します．最初に 4 元数の中にない虚数単位 J を用意します．そして，8 元数とは，2 個の 4 元数 x,y によって $x+yJ$ と表される数と定義します．8 元数のたし算，かけ算を次のように導入します：

$$(x+yJ)+(u+vJ)=(x+u)+(y+v)J, \tag{2.6}$$

$$(x+yJ)(u+vJ)=(xu-\overline{v}y)+(y\overline{u}+vx)J. \tag{2.7}$$

(2.7) は，実数の 2 重化である複素数のかけ算の定義式 (1.7) と整合的であることは明らかでしょう．それでは，複素数の 2 重化である 4 元数ではどうでしょうか．今，x,y,u,v を複素数として，2 個の 4 元数としての積 $(x+yj)(u+yj)$ を計算してみましょう．4 元数の体系では結合法則が成り立っているので，3 個以上の積でも括弧はつけなくてもよいことに注意しますと

$$(x+yj)(u+vj)=xu+xvj+yju+yjvj$$

となります．ここで $xy=yx$（x,y は複素数だから）ということと，z が複素数なら，$zj=j\overline{z}$ なので[22]，右辺は

$$xu+vxj+y\overline{u}j-y\overline{v}=(xu-\overline{v}y)+(y\overline{u}+vx)j$$

となって，2 重化での積の定義式 (2.7) に一致しています．

さて，虚数単位を 7 個用意して，$e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6,e_7$ とします．8元数の表示 $x+yJ$ に現れる 4 元数 x,y を

$$x=a+bi+cj+dk, \qquad y=p+qi+rj+sk$$

と表すときに，$x+yJ$ を

$$a+be_1+ce_2+de_3+pe_4+qe_5+re_6+se_7$$

[22] a,b が実数のとき，$(a+bi)j=aj+bk=j(a-bi)$ であることによります．

と表すことにしましょう．すなわち，

$$e_1 = i, \quad e_2 = j, \quad e_3 = k, \quad e_4 = J, \quad e_5 = iJ, \quad e_6 = jJ, \quad e_7 = kJ$$

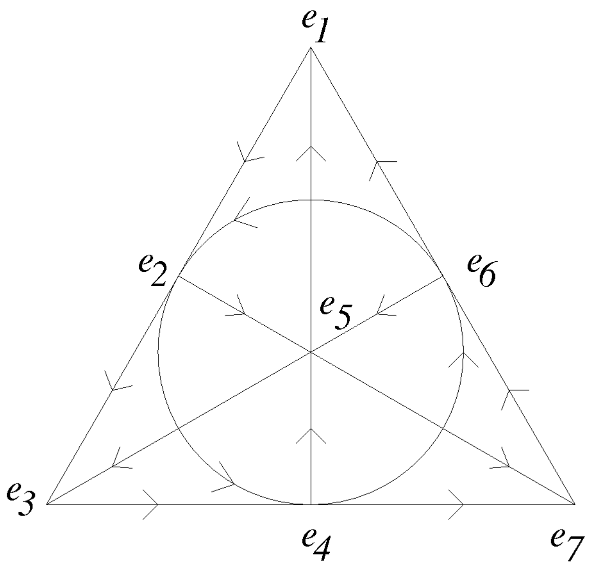
です．$e_1 \sim e_7$ の間のかけ算の表（乗積表）は (2.8) のようになります．左端の e_p と上端の e_q のかけ算 $e_p e_q$ の結果が表に書かれています．たとえば，$e_2 e_5 = e_7$ です．この表の作成に役立つのは，(2.7) からわかる次の公式です：

$$x(vJ) = (vx)J, \quad Ju = \overline{u}J, \quad J(vJ) = -\overline{v}, \quad (yJ)u = (y\overline{u})J \quad (yJ)(vJ) = -\overline{v}y.$$

(2.8)

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7
e_1	-1	e_3	$-e_2$	e_5	$-e_4$	$-e_7$	e_6
e_2	$-e_3$	-1	e_1	e_6	e_7	$-e_4$	$-e_5$
e_3	e_2	$-e_1$	-1	e_7	$-e_6$	e_5	$-e_4$
e_4	$-e_5$	$-e_6$	$-e_7$	-1	e_1	e_2	e_3
e_5	e_4	$-e_7$	e_6	$-e_1$	-1	$-e_3$	e_2
e_6	e_7	e_4	$-e_5$	$-e_2$	e_3	-1	$-e_1$
e_7	$-e_6$	e_5	e_4	$-e_3$	$-e_2$	e_1	-1

次のような図を描くとわかりやすいかもしれません：



矢印は「正の方向」を示します．たとえば，$e_1 e_2 = e_3$, $e_6 e_2 = e_4$, $e_6 e_1 = e_7$ と読みます．負の方向には「$-$」をつけます．たとえば，$e_3 e_5 = -e_6$ です．この図を使って，

(2.9)

$$\begin{aligned}
\alpha &= a + be_1 + ce_2 + de_3 + pe_4 + qe_5 + re_6 + se_7, \\
\beta &= a' + b'e_1 + c'e_2 + d'e_3 + p'e_4 + q'e_5 + r'e_6 + s'e_7, \\
\alpha\beta &= A + Be_1 + Ce_2 + De_3 + Pe_4 + Qe_5 + Re_6 + Se_7
\end{aligned}$$

とおくとき，$A \sim D$, $P \sim S$ を，$a \sim d$, $p \sim s$, $a' \sim d'$, $p' \sim s'$ を用いて表すことができます．結果だけ書いておきましょう：

$$
\begin{aligned}
A &= aa' - bb' - cc' - dd' - pp' - qq' - rr' - ss',\\
B &= ab' + ba' + cd' - dc' + pq' - qp' - rs' + sr',\\
C &= ac' - bd' + ca' + db' + pr' + qs' - rp' - sq',\\
D &= ad' + bc' - cb' + da' + ps' - qr' + rq' - sp',\\
P &= ap' - bq' - cr' - ds' + pa' + qb' + rc' + sd',\\
Q &= aq' + bp' - cs' + dr' - pb' + qa' - rd' + sc',\\
R &= ar' + bs' + cp' - dq' - pc' + qd' + ra' - sb',\\
S &= as' - br' + cq' + dp' - pd' - qc' + rb' + sa'.
\end{aligned} \tag{2.10}
$$

　共役 8 元数を次式で定義するのは自然でしょう：

$$\overline{x + yJ} = a - be_1 - ce_2 - de_3 - pe_4 - qe_5 - re_6 - se_7.$$

明らかに，$\overline{x + yJ} = \overline{x} - yJ$ となっています．また 8 元数 $x + yJ$ の絶対値を，4 元数の絶対値 $|x|$, $|y|$ を使って

$$|x + yJ| = \sqrt{|x|^2 + |y|^2} \tag{2.11}$$

とするのも自然な定義でしょう．もちろん

$$
\begin{aligned}
&|a + be_1 + ce_2 + de_3 + pe_4 + qe_5 + re_6 + se_7|\\
&\qquad = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2}
\end{aligned}
$$

となっています．そして (2.7) と (2.3) により

$$(x + yJ)(\overline{x} - yJ) \overset{(2.7)}{=} x\overline{x} + \overline{y}y \overset{(2.3)}{=} |x|^2 + |y|^2 = |x + yJ|^2.$$

同様に，$(\overline{x} - yJ)(x + yJ) = |x + yJ|^2$ も出ますから，8 元数 α に対しても

$$\alpha\overline{\alpha} = \overline{\alpha}\alpha = |\alpha|^2 \tag{2.12}$$

が成り立ちます．

　4 元数の体系では交換法則は成り立たなかったので，8 元数の体系でも交換法則は成り立ちません．さらに悪いことに，結合法則も壊れています．実際，乗積表 (2.8) から，$e_1(e_2e_4) = e_1e_6 = -e_7$ であるのに，$(e_1e_2)e_4 = e_3e_4 = e_7$ です．

　しかしながら，次の命題が成り立ちます．

命題 2.2. 8元数 α, β に対して，$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$.

証明. 証明を大雑把に書いてみます．$\alpha = x + yJ$, $\beta = u + vJ$ とおいて，かけ算の定義 (2.7) と，絶対値の定義 (2.11) より

$$|(x+yJ)(u+vJ)|^2 - |x+yJ|^2|u+vJ|^2 = -(xu\overline{y}v + \overline{v}y\overline{u}\,\overline{x}) + (y\overline{u}\,\overline{x}\,\overline{v} + vxu\overline{y}).$$

ここで $v = a + b$ と表します．ただし，a は実数で b は「純虚 4 元数」，すなわち，$b = pi + qj + rk$ です．従って，$\overline{a} = a$，$\overline{b} = -b$ です．そうすると上の式の右辺は

$$\begin{aligned}&-(xu\overline{y}a + ay\overline{u}\,\overline{x}) + (y\overline{u}\,\overline{x}a + axu\overline{y}) - (xu\overline{y}b - by\overline{u}\,\overline{x}) + (-y\overline{u}\,\overline{x}b + bxu\overline{y})\\ &\qquad = (-xu\overline{y}a + axu\overline{y}) + (-ay\overline{u}\,\overline{x} + y\overline{u}\,\overline{x}a) - cb + bc.\end{aligned}$$

となります．ただし，$c = xu\overline{y} + y\overline{u}\,\overline{x} = xu\overline{y} + \overline{xu\overline{y}}$ であり，c は実数です．ゆえにそれは b と交換可能です．よって $-cb + bc = 0$．また，a は実数ですから，同様に，$xu\overline{y}$ や $y\overline{u}\,\overline{x}$ と交換可能．したがって，上式の右辺の ( ) でくくった 2 個の項の両方とも 0 であることがわかります． $\square$

さてここで，$|\alpha|^2|\beta|^2 = |\alpha\beta|^2$ を書き直しましょう．(2.9) のように α, β, $\alpha\beta$ をおきますと，(2.10) の A, B, C, D, P, Q, R, S に対して，次の式が成り立つことになります：

$$\begin{aligned}&A^2 + B^2 + C^2 + D^2 + P^2 + Q^2 + R^2 + S^2\\ &\quad = (a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + p^2 + q^2 + r^2 + s^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2 + d'^2 + p'^2 + q'^2 + r'^2 + s'^2).\end{aligned}$$

(1.8) や (2.4) に比べて少し大変な式が現れました．

最後に，8 元数の体系は可除系であることを述べておきます．つまり，$\alpha \neq 0$ のとき，2 個の 1 次方程式

$$\alpha x = \beta, \qquad x\alpha = \beta$$

は必ず解を持つということです．さて，8 元数の世界では，結合法則が成り立っていません．ですから，今までのように，左から，あるいは右から $\overline{\alpha}$ をかけただけでは，これらの方程式は

$$\overline{\alpha}(\alpha x) = \overline{\alpha}\beta, \qquad (x\alpha)\overline{\alpha} = \beta\overline{\alpha}$$

と書き直されるだけです．結合法則の有り難みがわかる場面です[23]．でも神様は私達を見捨ててはいません．一般の 8 元数 α, β, γ については，$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ は保証

[23] 何であれ，失ってからその価値がわかるものです...

してはくれないのですが，特別の場合である $\alpha = \overline{\beta}$ や，$\gamma = \overline{\beta}$ のときには OK なのです．つまり

$$\overline{\beta}(\beta\gamma) = |\beta|^2\gamma, \qquad (\alpha\beta)\overline{\beta} = \alpha|\beta|^2$$

が成立するのです．これで元の 1 次方程式は，それぞれ

$$x = \frac{1}{|\alpha|^2}\overline{\alpha}\beta, \qquad x = \frac{1}{|\alpha|^2}\beta\overline{\alpha}$$

と解けることになります．

(3) n 元数の体系？

8 元数から Cayley–Dickson の拡張で 16 元数を作ったらどうなるでしょうか．あるいはもっと一般に，虚数単位を $n-1$ 個 ($n \geqq 2$) 用意して，すなわち，$i_1, \ldots, i_{n-1}$ を用意して，n 元数 $a_0 + a_1 i_1 + \cdots + a_{n-1} i_{n-1}$（ただし，$a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ は実数）を作ったらどうなるでしょうか．複素数と 4 元数の「中間」の 3 元数ってあるの？誰しもそんな疑問が思い浮かびます．

n 元数の絶対値については，今までと同様に

$$|a_0 + a_1 i_1 + \cdots + a_{n-1} i_{n-1}| = \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + \cdots + a_{n-1}^2}$$

としましょう．私たちが注目してきたのは，

$$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \tag{2.13}$$

が成り立つということでした．これをここでは絶対値の合成法則と呼ぶことにします．このとき，次の定理が成り立ちます．

定理 2.3.　絶対値の合成法則を持つ n 元数の体系 A から，Cayley–Dickson の拡張法で $2n$ 元数の体系 B を作るとき，B で絶対値の合成法則が成り立つための必要十分条件は，A でのかけ算について結合法則が成り立っていることである．

8 元数の体系では結合法則が成り立っていないので，16 元数の体系では絶対値の合成法則が成り立っていないことになります．実際，16 元数を作るときに必要な，8 元数にはない虚数単位を K とし，16 元数を $x + yK$（x, y は 8 元数）と表しますと，公式 (2.7) より（J を K と読み替えます）

$$\begin{aligned}(e_2 + e_7 K)(e_4 + e_1 K) &= (e_2 e_4 - \overline{e}_1 e_7) + (e_7 \overline{e}_4 + e_1 e_2)K \\ &= (e_2 e_4 + e_1 e_7) + (-e_7 e_4 + e_1 e_2)K \\ &= 2(e_6 + e_3 K)\end{aligned}$$

ですから，$|(e_2+e_7K)(e_4+e_1K)| = 2\sqrt{|e_6|^2+|e_3|^2} = 2\sqrt{2}$ となります．一方

$$|e_2+e_7K| = \sqrt{|e_2|^2+|e_7|^2} = \sqrt{2}, \qquad |e_4+e_1K| = \sqrt{|e_4|^2+|e_1|^2} = \sqrt{2}$$

ですから，$|(e_2+e_7K)(e_4+e_1K)| \neq |e_2+e_7K||e_4+e_1K|$ です．というわけで，絶対値の合成法則にこだわれば，Cayley–Dickson の「倍々ゲーム」は 8 元数のところで「bye bye」です．

さて，3 元数はどういうところがダメなのでしょうか．3 元数を，2 つの虚数単位 p, q を使って，$a+bp+cq$（a, b, c は実数）と表します．積 pq も 3 元数ですから，$pq = a+bp+cq$ と表されるはずです．この両辺に p をかけます．4 元数の体系では結合法則が成立するので，3 元数の体系でも結合法則が成立することにしますと，$ppq = p^2q = -q$ となりますから，

$$\begin{aligned} -q &= p(a+bp+cq) = ap-b+cpq \\ &= ap-b+c(a+bp+cq) \qquad (\leftarrow pq \text{ に } a+bp+cq \text{ を代入した}) \\ &= (ca-b)+(a+cb)p+c^2q. \end{aligned}$$

最初と最後の式の実部と，二つの虚部（p と q の係数）を比べます．そうすると，q の係数が等しいということから，$-1=c^2$ が出てきます．これは c が実数であることに反しています．

こんなふうに 3 元数は全然ダメなのですが，一般に次の定理が成り立ちます[24]．

定理 2.4. 絶対値の合成法則が成り立つ n 元数の体系は，$n = 1, 2, 4, 8$ のときのみである．

したがって，絶対値の合成法則と結合法則を持つ n 元数の体系は $n = 1, 2, 4$ のみ，さらに交換法則まで要求すれば，$n = 1, 2$ のみになってしまいます．絶対値の合成法則の代わりに，可除系だけで押して行っても同様の定理が成り立ちます[25]．

定理 2.5. n 元数の体系で可除系になるのは，$n = 1, 2, 4, 8$ のときのみである．

[24] 数学では,「これで全部だ」という主張がとても大事です．現実の世界ではなかなか達成できないことですが，私が数学に魅せられる所でもあります．

[25] これは，より一般な可除代数系についての定理からの帰結です，証明は代数学の範囲ではなくて，位相幾何学における手段を使うもので，1958 年に発表されたものです (Milnor)．結合法則を仮定すれば，$n = 1, 2, 4$ の次元のみであるというのは，Frobenius (1849–1917) により，1877 年に証明されています．

§3. 行列

(1) 行列の積.

コンサートのチケット売り場などでできる，順番待ちの行列は queue[26]（英）または line（米）ですが，ここでは matrix のことで，縦と横に数字（文字）が並んでいるものです：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

行が m 個，列が n 個あるので，$m \times n$ 行列とか，(m, n) 型の行列などと言います．当面は $m = n = 2$，つまり 2×2 行列を扱います．2 次の正方行列（行と列が同じ数なので...）とも言います．

行列にもたし算とかけ算があります：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+p & b+q \\ c+r & d+s \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix}.$$

たし算の方はすぐに受け入れることができますが，かけ算の定義は初めての人には少々複雑に見えます．どうしてこんなのを導入するのでしょうか[27]．まずかけ算の扱いに慣れましょう．次のようなルールです．

$$\begin{pmatrix} \boxed{a \quad b} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} p \\ r \end{matrix}} & \end{pmatrix} \rightsquigarrow ap + br, \qquad \begin{pmatrix} \boxed{a \quad b} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} q \\ s \end{matrix}} \end{pmatrix} \rightsquigarrow aq + bs,$$

$$\begin{pmatrix} \\ \boxed{c \quad d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} p \\ r \end{matrix}} & \end{pmatrix} \rightsquigarrow cp + dr, \qquad \begin{pmatrix} \\ \boxed{c \quad d} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & \boxed{\begin{matrix} q \\ s \end{matrix}} \end{pmatrix} \rightsquigarrow cq + ds.$$

かけ算の意味について見てみましょう．平面上の点 (x, y) に別の点 (u, v) を対応させる規則（写像）F が次のように与えられているとしましょう：

$$F : \begin{cases} u = px + qy \\ v = rx + sy \end{cases} \tag{3.1}$$

---

[26]語源的には仏語の同じ綴りの語（ただし発音は日本語で表しにくい母音が入ります）から来るようです．仏語の方は英語の tail の意味をいくつか持っています．基本的には □∼ という状態の ∼ の部分（真っ直ぐでもよい）を言い表します．順番待ち行列，動物の尻尾，フライパンの柄，等々の意味があります．

[27]実はたし算のときのように，成分毎のかけ算で定義するのもあります．これをアダマール積と呼んで，積極的に活用されている数学の分野もありますが，本講座では扱いません．

このように，x と y の定数項のない 1 次式で表されている写像を線型写像といいます[28]．これを，行列と縦ベクトルを使って次のように表します：

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

この右辺でも先ほどのようなかけ算ルールがあります：

$$\begin{pmatrix} \boxed{p \quad q} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \end{pmatrix} \rightsquigarrow px + qy, \qquad \begin{pmatrix} \\ \boxed{r \quad s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}} \end{pmatrix} \rightsquigarrow rx + sy,$$

行列 $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ を，線型写像 F の表現行列といいます．(x, y) から写されてきた点 (u, v) が，さらにもう一つの線型写像 G で点 (z, w) に写されるとしましょう：

$$G : \begin{cases} z = au + bv \\ w = cu + dv \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \tag{3.2}$$

こうなっているとき，z と w を x と y で表したくなるのが人情です．これを写像の合成といい，$G \circ F$ と表します．右側に最初の写像 F を書くことに注意しておきます．まずは直接計算してみましょう．写像の合成は，とりも直さず，(3.2) の右辺の u, v に (3.1) の u, v を代入するというだけのことです：

$$\begin{aligned} z &= au + bv & w &= cu + dv \\ &= a(px + qy) + b(rx + sy) & &= c(px + qy) + d(rx + sy) \\ &= (ap + br)x + (aq + bs)y & &= (cp + dr)x + (cq + ds)y \end{aligned} \tag{3.3}$$

この結果は，線型写像 F, G の合成 $G \circ F$ は再び線型写像で，表現行列は

$$\begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$$

であることを示しています．一方で，行列と縦ベクトルのままで計算しますと

$$\begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\}$$

となります．(3.3) での計算結果と行列のかけ算の定義は，この式の右辺が

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

に等しいことを意味しています．すなわち，線型写像 $G \circ F$ の表現行列は，G の表現行列と F の表現行列のかけ算 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ で与えられることになります．

[28]線形写像という書き方もありますが，私は好きではありません．残念ながら，九大の数学のシラバスでは「線形」という漢字が使われていて，かんじ悪いです．

またほぼ同様の計算から，行列のかけ算に関して，結合法則が成り立つことが理解できると思います：

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} \right\} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}.$$

(2) 複素数や 4 元数との関係.

ここでは，複素数や 4 元数を行列で表すことを考えます．まず 2 個の行列 E, I を用意します[29]：

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

このとき，$E^2 = E,\ EI = IE = I$，そして

$$I^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -E$$

が成り立ちます．そこで

$$a + ib \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aE + bI$$

という対応を考えます．そうすると，

$$\begin{aligned} &(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i \\ &\qquad \longleftrightarrow (a+c)E + (b+d)I = (aE+bI)+(cE+dI), \\ &(a+bi)(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i \\ &\qquad \longleftrightarrow (ac-bd)E + (ad+bc)I = (aE+bI)(cE+dI) \end{aligned}$$

となっていることがわかります．以上から，

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \ ; \ a, b \text{ は実数} \right\}$$

という行列の集合での，行列の意味でのたし算とかけ算の構造は，複素数の体系でのたし算とかけ算の構造と同じであることがわかります．こういうのを，数学では同型であるといいます．見かけは違うけれど，考察の対象となっている数学的構造に関しては同じであるという意味です[30].

ところで，実数を成分とする行列 X で，$X^2 = -E$ をみたすものは山ほどあります．実際

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p^2+qr & q(p+s) \\ r(p+s) & qr+s^2 \end{pmatrix}$$

---

[29] E を単位行列と呼びます．どんな行列 X に対しても，$XE = EX = X$ が成り立ちます.

[30] もちろん，ある数学的構造では同型でも，別の構造を考えたりすると同型ではなくなってくることもあるわけです.

ですから，これが $-E$ に等しいことから，次の連立方程式を得ます：

$$\begin{cases} p^2+qr=-1 & \cdots ① \\ q(p+s)=0 & \cdots ② \\ r(p+s)=0 & \cdots ③ \\ qr+s^2=-1 & \cdots ④ \end{cases}$$

もし $q=0$ または $r=0$ ですと，① より，$p^2=-1$ となって，p が実数であることに反します．ゆえに，$q \neq 0$ かつ $r \neq 0$ です．このとき，②，③ より，$s=-p$ となり，① と ④ は同じ式になって，$r=-(p^2+1)/q$ を得ます．よって

$$X=\begin{pmatrix} p & q \\ -\dfrac{p^2+1}{q} & -p \end{pmatrix} \qquad (q \neq 0)$$

となります．I の代わりに，この一般の X を使って，$aE+bX$ （a,b は実数）という形の行列全体を考えても，複素数の体系と同型になります．

4 元数も行列で表しましょう．少し天下りですが

$$a+bi+cj+dk \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} \tag{3.4}$$

という対応を考えてみましょう．右辺は複素数を成分とする 2 次の正方行列です．

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\quad I=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\quad J=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix},$$

とおきますと，$1 \longleftrightarrow E,\ i \longleftrightarrow I,\ j \longleftrightarrow J,\ k \longleftrightarrow K$ であり，(3.4) の右辺は $aE+bI+cJ+dK$ と書けます．そして，$I^2=J^2=K^2=-E$ と

$$IJ=-JI=K,\quad JK=-KJ=I,\quad KI=-IK=J$$

に注意します（直接の計算で確かめてみてください）．4 元数での虚数単位 i,j,k の間に成立している関係式と同じですから，%複素数の場合と同様にして，

$$\begin{aligned} &(a+bi+cj+dk)(p+qi+rj+sk) \\ &\qquad \longleftrightarrow (aE+bJ+cJ+dK)(pE+qI+rJ+sK) \end{aligned}$$

となります．したがって行列の集合

$$\left\{ \begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} \ ;\ a,b,c,d \text{ は実数} \right\} \tag{3.5}$$

での，行列のたし算とかけ算は，4 元数の体系でのたし算とかけ算の構造と同型です．特に，4 元数の体系でのかけ算では，結合法則が成立していることになります．これで §1 の (1) で残された宿題ができたことになります．

もう一つの宿題のために，一般に複素数を成分に持つ行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ に対して，$A^* = \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \overline{\gamma} \\ \overline{\beta} & \overline{\delta} \end{pmatrix}$ とおきます．単純な計算で，$(AB)^* = B^*A^*$ がわかります．さて，

$$a - bi - cj - ki \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a-bi & c+di \\ -c+di & a+bi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix}^*$$

が成り立ちますから，命題 2.1 が証明できたことになります．

(3) 行列式．

行列のかけ算において，交換法則が成り立たないことは，次の例からもわかります：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

二つめの等式でちょっと困ったことが起きています．すべての成分が 0 である行列を零行列といいますが，零行列でないものを 2 個かけたときに，結果が零行列になることがあるのです．もっと困ったことに，

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

というように，平方したら零行列になってしまうこともあります．ですから，行列の世界での方程式

$$AX = C, \qquad XA = C \tag{3.6}$$

は，単に「A は零行列ではない」という条件だけでは解けないことになります．

行列 A に対して，$AB = BA = E$（E は単位行列）となる行列 B を A の逆行列といいます．ここで行列式を導入します[31]．

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ のとき，} \det A = ad - bc.$$

$\det A$ を行列 A の行列式 (determinant) と呼びます．行列式の最も基本的な性質は，

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) \tag{3.7}$$

が成り立つことです．$\det E = 1$ ですから，もし A に逆行列 B があれば，$AB = E$ より，$(\det A)(\det B) = 1$．特に $\det A \neq 0$ です，逆に $\det A \neq 0$ ならば，

$$B = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

[31] ここでは 2 次の正方行列に対してだけに定義します．

とおけば，$AB = BA = E$ となることが簡単に確かめられます．この B のことを A^{-1} と表して，A の逆行列と呼びます．$\det A \neq 0$ ならば，方程式 (3.6) は，それぞれ

$$X = A^{-1}C, \qquad X = CA^{-1}$$

と一意的に解けるわけです．

行列式の性質 (3.7) の応用を述べるために，4 元数の体系を実現する行列の集合 (3.5) を思い出しましょう．

$$\det\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix} = a^2+b^2+c^2+d^2 = |a+bi+cj+dk|^2$$

ですから，

$$\begin{aligned}\det&\left\{\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p+qi & -r-si \\ r-si & p-qi \end{pmatrix}\right\} \\ &= \det\begin{pmatrix} a+bi & -c-di \\ c-di & a-bi \end{pmatrix}\det\begin{pmatrix} p+qi & -r-si \\ r-si & p-qi \end{pmatrix}\end{aligned}$$

を書き直すと，4 元数の絶対値の合成法則，すなわち (2.4) が出てきます．

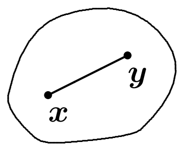
§4. 凸錐体

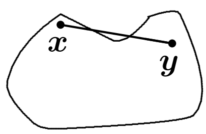
(1) 諸定義.

今までの話と一見して全く関係のないことから始めましょう．まず記号ですが，$\mathbb{R}^n$ と書いたら，$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$（ただし，$x_1, x_2, \ldots, x_n$ は実数）と表示されるものの全体です．$\mathbb{R}^2$ は座標平面を，$\mathbb{R}^3$ は座標空間を表します．さて，「凸集合」(convex set) は，数学の多くの分野で現れる大変重要な概念です．

集合 A が凸集合であるとは，A の点 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ をとるとき，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ を結ぶ線分も必ず A に含まれていることと定義します．要するに「へこみ」がないのが凸集合です．

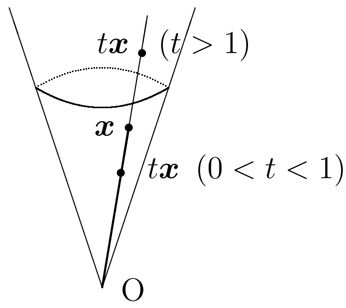
凸集合



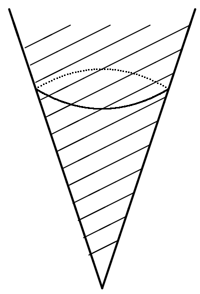


凸集合ではない

集合 C が錐 (cone) であるとは，C の点 $\boldsymbol{x}$ をとると，すべての $t > 0$ に対して $t\boldsymbol{x}$ も C の点になっていることと定義します．



凸錐体 = 凸集合である錐（凸錐）で，内部があるもの.



皮だけではなく，中身も詰まっている.
ソフトクリームのウエハースの部分
だけではない！

開凸錐体 = 凸錐体で，境界を含まないもの.
（ウエハースを取り除く[32]）

(2) 開凸錐体の双対[33].

$\mathbb{R}^n$ は内積を持っています：$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ とするとき,

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = x_1 y_2 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \tag{4.1}$$

$n = 2$ や $n = 3$ のときに高校で習う内積と何らかわりません．以下では，もう少し一般な内積を考えることもあります．つまり，$a_1 > 0, a_2 > 0, \ldots, a_n > 0$ とするとき，

$$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = a_1 x_1 y_2 + a_2 x_2 y_2 + \cdots + a_n x_n y_n.$$

$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ の場合である (4.1) を，$\mathbb{R}^n$ の標準内積と呼びます.

さて，Ω を $\mathbb{R}^n$ の開凸錐体とします[34]．次の集合 Ω^* を，Ω の双対凸錐体と呼びます：

$$\Omega^* = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \; ; \; \boldsymbol{0} \text{ でないすべての } \boldsymbol{y} \in \overline{\Omega} \text{ に対して } \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} > 0\}.$$

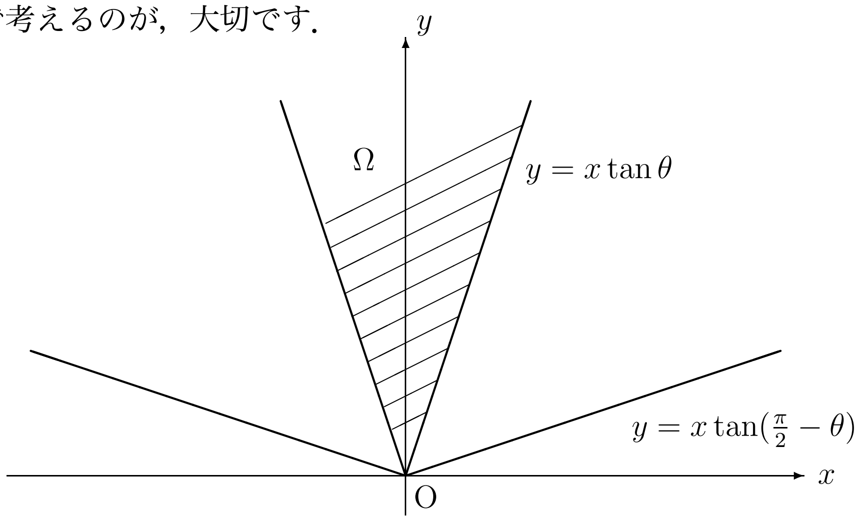
---

[32] ソフトクリームをどうやって持つか心配になりますが...

[33]「そうつい」と読みます．これは「相対」と音で区別するためのようです.

[34] $n = 2, 3$ で構いません．つまり，平面や空間の中の開凸錐体を考えていただいて当面は差し支えありません．あとで一般の次元の開凸錐体にも触れます.

ただし，$\overline{\Omega}$ は Ω に境界を付け加えたものです（Ω の閉包と言います）．わかりづらいときは例で考えるのが，大切です．



$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ として，$\Omega = \{(x, y)\ ;\ y > |x|\tan\theta\}$ とします．
このとき，$\overline{\Omega} = \{(x, y)\ ;\ y \geqq |x|\tan\theta\}$ です．双対凸錐体 Ω^* の定義により[35]

$$(x', y') \in \Omega^* \iff \mathbf{0}\text{ でないすべての } \boldsymbol{x} = (x, y) \in \overline{\Omega} \text{ に対して } x'x + y'y > 0$$

です．さて $(x', y') \in \Omega^*$ とします．$x > 0$ のとき，$\mathbf{0} \neq (x, x\tan\theta) \in \overline{\Omega}$ ですから，$x(x'+y'\tan\theta) > 0$．これより，$y' > -\dfrac{x'}{\tan\theta}$．同様に $x < 0$ のとき，$\mathbf{0} \neq (x, -x\tan\theta) \in \overline{\Omega}$ ですから，$x(x'-y'\tan\theta) > 0$．これより $y' > \dfrac{x'}{\tan\theta}$．以上をまとめると，$y' > \dfrac{|x'|}{\tan\theta}$．

逆に $y' > \dfrac{|x'|}{\tan\theta}$ とします．$\boldsymbol{x} = (x, y) \in \overline{\Omega}$ かつ $\boldsymbol{x} \neq \mathbf{0}$ とします．$y \geqq |x|\tan\theta$ ですから

$$x'x + y'y > x'x + \frac{|x'|}{\tan\theta}(|x|\tan\theta) = x'x + |x'||x| \geqq 0.$$

これは $(x', y') \in \Omega^*$ であることを意味します．以上から[36]

$$\Omega^* = \left\{(x', y')\ ;\ y' > x'\tan(\tfrac{\pi}{2} - \theta)\right\}$$

となります．$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ (45°) のとき，$\Omega^* = \Omega$ となることに注意してください．

定義． 開凸錐体 Ω が $\Omega^* = \Omega$ をみたすとき[37]，Ω は自己双対的である (selfdual) といいます．

---

[35] ここでは簡単のため標準内積を考えます．

[36] $\dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{\sin(\frac{\pi}{2} - \theta)}{\cos(\frac{\pi}{2} - \theta)} = \tan(\frac{\pi}{2} - \theta)$ を使いました．

[37] 内積は一般的なものを用います．

(3) 自己双対的開凸錐体の分類[38].

以下に述べる5種類の開凸錐体の直積ですべて得られることがわかっています：

$$\begin{array}{lllllll} \Omega \subset \mathbb{R}^N \implies & \mathbb{R}^N = & \mathbb{R}^{n_1} \times & \mathbb{R}^{n_2} \times & \cdots \times & \mathbb{R}^{n_k} & (N = n_1 + n_2 + \cdots + n_k) \\ & & \cup & \cup & & \cup & \\ & & \Omega_1 & \Omega_2 & \ldots & \Omega_k & \end{array}$$

各 $\Omega_1, \ldots \Omega_k$ は次の5種のいずれか.

（あ）**Lorentz 錐** ($n \geqq 3$)

$\left\{ \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \,;\, x_n > \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n-1}^2} \right\}$

$\underline{n = 3}$ の場合[39]： $x_3 > \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$

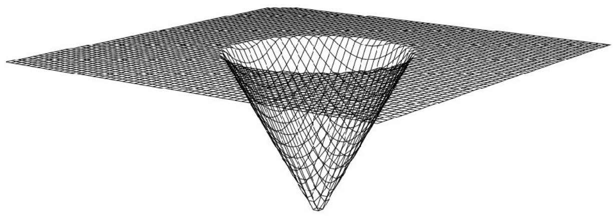


図 1. $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ のグラフを平面 $x_3 = a > 0$ で切ったところ

（い）n 次正定値実対称行列全体 ($n \geqq 1$)

n 次正方行列で，どの (i, j) 成分も (j, i) 成分と等しい行列を対称行列といいます.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{nn} \end{pmatrix} \text{において，} \begin{array}{lll} x_{12} = x_{21}, & \ldots, & x_{1n} = x_{n1} \\ x_{23} = x_{32}, & \ldots, & x_{2n} = x_{n2} \\ & & x_{n-1,n} = x_{n,n-1} \end{array}$$

が成り立つ，すなわち，左上から右下に至る対角線について対称な位置にある成分が等しい行列を対称行列と言うのです．対称行列は対角線上の成分 $x_{11}, x_{22}, \ldots, x_{nn}$ と，対角線より上の成分 x_{ij} $(i < j)$ で定まりますから，実対称行列（実数を成分とする対称行列）の全体は,

$$(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, x_{22}, x_{23}, \ldots, x_{2n}, \ldots, x_{nn})$$

という点の座標空間と同一視できます．$n + (n-1) + \cdots + 1 = \frac{1}{2}n(n+1)$ ですから，これは $\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ ということになります.

[38]実際は「等質」という仮定が必要です.

[39]$n = 2$ の場合は $x_2 > |x_1|$ となって，(2) での考察の $\theta = \frac{\pi}{4} = 45°$ の場合に一致します．実はこの場合は，時計回りに $45°$ 回転させればわかりますが，第1象限 $x_1 > 0, x_2 > 0$ の場合と同じになり，第1象限は半直線 $\{t \in \mathbb{R}\,;\, t > 0\}$ の直積なのです.

さて，一般に行列の対角成分を全部加えた量を，その行列のトレースと呼びます[40].

$$X = (x_{ij}) \text{ のとき，} \mathrm{tr}(X) = x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{nn}.$$

n 次実対称行列の全体 $V \equiv \mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ には，$\mathrm{tr}(XY)$ という内積が入ります．$X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$ として，実際に計算してみましょう．積 XY の (k, k) 成分は $x_{k1}y_{1k} + x_{k2}y_{2k} + \cdots + x_{kn}y_{nk}$ ですから（$x_{k1} = x_{1k}$, $x_{k2} = x_{2k}$ 等々に注意して）

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(XY) &= \sum_{k=1}^{n} (x_{k1}y_{1k} + x_{k2}y_{2k} + \cdots + x_{kn}y_{nk}) \\ &= x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{nn} + 2(x_{12}y_{12} + x_{13}y_{13} + \cdots + x_{n-1,n}y_{n-1,n}) \end{aligned}$$

となります．$\mathbb{R}^{n(n+1)/2}$ の少し一般な内積になりました．開凸錐体としては，正定値なものをとります：

$$\Omega = \{X \in V \,;\, X \text{ は正定値}\}.$$

ただし，実対称行列 $X = (x_{ij})$ が正定値であるとは，首座小行列式がすべて正ということです：

$$x_{11} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} > 0, \quad \det\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{pmatrix} > 0, \quad \ldots, \quad \det X > 0.$$

つまり左上から順に 1 次, 2 次, 3 次, . . . , n 次ととっていった小行列式が正ということです：

$$\begin{array}{c|c|c|c|c} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \cdots & x_{1n} \\ \cline{1-1} x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} \\ \cline{1-2} x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & x_{3n} \\ \cline{1-3} & & & \ddots & \vdots \\ \cline{1-4} x_{n1} & x_{n2} & x_{n3} & \cdots & x_{nn} \end{array}$$

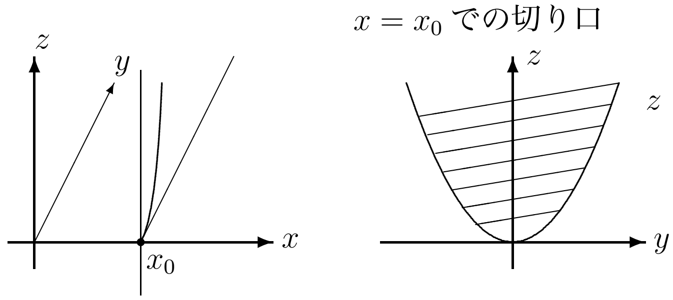
<u>$n = 2$ の場合</u>：　$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \,;\, x, y, z \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^3.$

したがって，$\mathbb{R}^3$ に内積 $(x, y, z) \cdot (x', y', z') = xx' + 2yy' + zz'$ を入れて考えることになります．そして考える開凸錐体 Ω は

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix} \,;\, \begin{array}{l} x > 0 \\ xz - y^2 > 0 \end{array} \right\}$$

---

[40]「跡」という訳語もあるようですが，私は好きではありません．



$z > \dfrac{y^2}{x_0}$

x_0 が 0 に近づくと，放物線の「曲がり具合」はきつくなる

実は座標変換をすれば，この Ω は Lorentz 錐になるのです[41]．違いが出てくるのは $n \geqq 3$ の場合ですが，$n = 3$ ですでに 6 次元なので，絵が描きづらくなります．

（う）n 次正定値複素エルミート行列全体 ($n \geqq 2$)

複素数を成分とする n 次正方行列 $X = (x_{ij})$ で，すべての i, j（ただし $1 \leqq i \leqq j \leqq n$）に対して $x_{ji} = \overline{x_{ij}}$ となるとき，X を複素エルミート行列[42]と言います．条件から $x_{ii} = \overline{x_{ii}}$ となりますから，対角成分 x_{ii} はすべて実数であることに注意してください．ここでも開凸錐体は

$$\Omega = \{\, \text{正定値複素エルミート行列} \,\}$$

です[43]．やはり具体的に $n = 2$ のときを考えてみましょう．V でもって，2 次の複素エルミート行列全体を表します：

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & w \end{pmatrix} \; ; \; x, y, z, w \in \mathbb{R} \right\} \cong \mathbb{R}^4.$$

4 次元の空間が出てきました．$X = \begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & w \end{pmatrix}$，$X' = \begin{pmatrix} x' & y'+iz' \\ y'-iz' & w' \end{pmatrix}$ に対して，$\mathrm{tr}(XX')$ を計算してみましょう．

$$\begin{aligned} XX' &= \begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' & y'+iz' \\ y'-iz' & w' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx' + (y+iz)(y'-iz') & * \\ * & (y-iz)(y'+iz') + ww' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ですから，

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(XX') &= xx' + (y+iz)(y'-iz') + (y-iz)(y'+iz') + ww' \\ &= xx' + 2(yy' + zz') + ww'. \end{aligned}$$

[41] $x = u + v$, $z = u - v$ とおくと，$u = \frac{1}{2}(x+z) > 0$ で，$u > \sqrt{v^2 + y^2}$ となります．$xz > y^2 \geqq 0$ と $x > 0$ より，$z > 0$ であることに注意してください．p.23 の図 1 でどの方向から見ていることになるか，考えてみてください．

[42] エルミートは数学者 C. Hermite (1822–1901) からとっています．

[43] 正定値性の定義は実対称行列のときと同じです

考える開凸錐体は

$$\Omega = \left\{ \begin{pmatrix} x & y+iz \\ y-iz & w \end{pmatrix} \; ; \; \begin{array}{l} x > 0 \\ xw - (y^2+z^2) > 0 \end{array} \right\}$$

です．ゆえに，$\mathbb{R}^4$ において Ω を $x = x_0 > 0$ で切ると，$w > \dfrac{y^2+z^2}{x_0}$ となります．曲面 $w = \dfrac{y^2+z^2}{x_0}$ は放物面で，平面 $w = a > 0$ で切った切り口は円になります．ここでも x_0 が 0 に近づくと，放物面の「スロープ」がきつくなっていきます[44]．

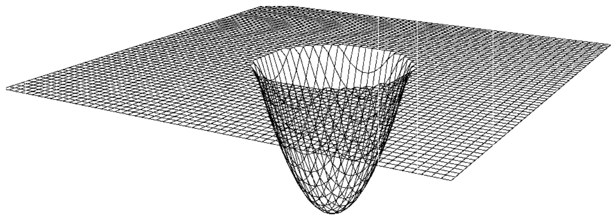


図 2. $w = \dfrac{y^2+z^2}{x_0}$ のグラフを平面 $w = a > 0$ で切ったところ

（え）n 次正定値 4 元数エルミート行列全体 ($n \geqq 2$)

4 元数を成分とする n 次正方行列 $X = (x_{ij})$ で，すべての i, j（ただし $1 \leqq i \leqq j \leqq n$）に対して $x_{ji} = \overline{x_{ij}}$ となるとき，X を 4 元数エルミート行列と言います．条件から $x_{ii} = \overline{x_{ii}}$ となりますから，対角成分 x_{ii} はすべて実数であることに注意してください．ここでも開凸錐体は

$$\Omega = \{\, \text{正定値 4 元数エルミート行列} \,\}$$

です．ただし，4 元数の世界では交換法則は成り立っていないので，4 元数を成分とする行列の行列式を安直には定義することはできません．ですから，「正定値」という言葉も安直には定義できないのですが，ここでは深入りはしないでおきます．4 元数エルミート行列の全体は $\mathbb{R}^{2n^2-n}$ と同一視できることだけ述べておくことにします．$n = 2$ のときは，Ω は 6 次元の Lorentz 錐になります．

（お）3 次正定値 8 元数エルミート行列全体

8 元数を成分とする n 次正方行列 $X = (x_{ij})$ で，すべての i, j（ただし $1 \leqq i \leqq j \leqq n$）に対して $x_{ji} = \overline{x_{ij}}$ となるとき，X を 8 元数エルミート行列と言います．条

[44] 実対称行列のときと同じく，この場合も Lorentz 錐になります．$x = u + v$, $w = u - v$ とおけば，$u > 0$ であって，$u > \sqrt{v^2 + y^2 + z^2}$ です．

件から $x_{ii} = \overline{x_{ii}}$ となりますから，対角成分 x_{ii} はすべて実数です．ここでは $n = 3$ のときのみの開凸錐体

$$\Omega = \{\text{ 正定値 8 元数エルミート行列 }\}$$

が出てきます．$n \geqq 4$ 以上は現れません．$n = 3$ とはいえ，Ω の次元は 27 です．

§5. ジョルダン代数

(1) 導入.

ジョルダン代数は物理学者の P. Jordan (1902–1980) によって 1930 年頃に導入されたもので，量子力学系の代数的記述を目指したものでした．ヒルベルト空間[45]上のエルミート作用素[46]の代数的な性質を抽象するもので，土台となるヒルベルト空間を参照することなく，物理的に重要と思える性質を定式化しています．

ここでは複素エルミート行列で見てみますが，まず，複素エルミート行列は行列の積に関しては閉じていないことに注意します．実際，2 個の 2 次の複素エルミート行列 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ に対して

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -2i & 0 \end{pmatrix}$$

ですから，AB はエルミート行列ではなくなります[47]．しかしながら，新たな積として $A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ を考えると[48]，$A \circ B = \begin{pmatrix} 0 & 3i \\ -3i & 0 \end{pmatrix}$ となって，エルミート行列になっています．しかも $A \circ B = B \circ A$ となって，交換法則が成り立っています．$A \circ A$ は行列の積での平方 A^2 と同じだし，いろいろとうまくいきそうですが，代償として結合法則が失われます．実際

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して（すべての成分が 0 である零行列を O で表します）

$$(A \circ B) \circ C = O, \qquad A \circ (B \circ C) = \frac{1}{4} C \neq O$$

となります（計算の詳細は読者に委ねましょう）.

---

[45]無限次元のユークリッド空間とみなされます.

[46]無限次の複素エルミート行列と思ってください.

[47]$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ととれば，実対称行列で反例ができています．ここでは複素エルミート行列を扱っていますので，わざと B を実対称ではなく，複素エルミート行列でとっています.

[48]$BA = \begin{pmatrix} 0 & 2i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$ です.

多少の経験論的実験を経て，Jordan がたどりついた，今日ではジョルダン代数[49]と呼ばれる代数系の公理（積がみたすべき要件）は次の二つです：

(1) $x \circ y = y \circ x$（交換法則），

(2) $(x^2 \circ y) \circ x = x^2 \circ (y \circ x)$ （ジョルダン恒等式[50]）.

結合法則は要求しないのですが，x^2, y, x という特別な3個の元に対しては，積は結合的であることを要求するのです[51]．交換法則があるので，(2) は $x \circ (x^2 \circ y) = x^2 \circ (x \circ y)$ と書いても差し支えありません．行列に対して，$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ としたものについては，$A^2 \circ (A \circ B)$ も $A \circ (A^2 \circ B)$ もともに $\frac{1}{4}(A^3B + A^2BA + ABA^2 + BA^3)$ に等しいことを読者自ら確かめてください．

Jordan は，von Neumann, Wigner との共著の論文（1934 年発刊）で，ジョルダン代数の内で，形式的実なものをすべて見つけ出しています．ここで，形式的実 (formally real) とは，「$x^2 + y^2 = 0 \implies x = y = 0$」が言えることです．実数の体系はもちろん形式的実です．複素数の体系はそうではありません：$i^2 + 1^2 = 0$ ですから．実対称行列や複素エルミート行列の集合に，$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ で積を定義したジョルダン代数は形式的実になっています．

(2) 形式的実なジョルダン代数の分類[52].

どんな形式的実なジョルダン代数も，以下に述べる 5 種類の形式的実なジョルダン代数（に同型なジョルダン代数）の直積で得られます．

（あ）$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{n-1}$ $(n \geqq 3)$

$\mathbb{R}^{n-1}$ の標準内積を $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}$ で表しておいて，次式で積を導入します：

$$(\alpha + \boldsymbol{v}) \circ (\beta + \boldsymbol{w}) = (\alpha\beta + \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w}) + (\alpha\boldsymbol{w} + \beta\boldsymbol{v}) \tag{5.1}$$

（い）n 次実対称行列の全体 $\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$

すでに出てきていますが，$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ です．

（う）n 次複素エルミート行列の全体 $\mathrm{Herm}(n, \mathbb{C})$

$\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ と同様に，$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ です．

---

[49] Jordan 代数と名付けたのは，代数学者の Albert (1905–1972) で，1946 年のことです．1960 年頃に渡米した Jordan が，彼が考えた代数系がジョルダン代数と呼ばれていることを知って驚いたという逸話があるようです．

[50] $x \circ x$ を x^2 と書いています．

[51] 一般の 3 元に対する結合法則はダメでも，特別な形の 3 元に対しては積は結合的であるという状況は，すでに 8 元数のときに出くわしました．§2 の (2) の最後の所です．

[52] この分類を得るのに定理 2.4 が使われます．

（え）n 次 4 元数エルミート行列の全体 $\mathrm{Herm}(n, \mathbb{H})$[53]

$\mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$ と同様に，$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ です．

（お）3 次 8 元数エルミート行列の全体 $\mathrm{Herm}(3, \mathbb{O})$[54]

同様に，$A \circ B = \frac{1}{2}(AB + BA)$ ですが，$n \geqq 4$ だと，Jordan 恒等式をみたさなくなります．8 元数の体系では結合法則が成り立っていないことが影響しています．

(3) 自己双対的開凸錐体との関係.

(2) での分類を見て，§4 の (3) での自己双対的凸錐体の分類と並行ではないかと思った人もいるでしょう．実は全くその通りで，全然別のコンテクストで数学の世界に現れた二つの対象に関係ができてしまうのです．これを見いだしたのは，Koecher (1958) と Vinberg (1960) です．

（等質な）自己双対的開凸錐がユークリッド空間にあると，そのユークリッド空間は，必然的に，形式的実なジョルダン代数の構造が入り，逆に，形式的実なジョルダン代数が与えられると，そこから自己双対的開凸錐が，

$$\{x^2 \,;\, x \text{ は可逆元}\}$$

という記述で得られるのです．形式的実なジョルダン代数の分類が得られているのですから，自己双対的な開凸錐の分類も得られるというわけです．

実数の全体 $\mathbb{R}$ は普通のかけ算で，形式的実なジョルダン代数になっています．$\mathbb{R}$ での可逆元とは 0 でない実数のことで，0 でない実数の平方全体は，正の実数全体に一致します．実対称行列に関しては，ジョルダン代数における可逆元とは，可逆な行列（逆行列を持つ行列）のことであり，それは行列式が 0 でない行列のことです．行列式が 0 でない実対称行列の平方[55]全体は，正定値な実対称行列全体になります．複素エルミート行列のときも同様です．$\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{n-1}$ のときは少し状況が異なります．$\beta + \boldsymbol{w}$ が可逆なこととは $\beta^2 \neq |\boldsymbol{w}|^2$ のことであり，$\alpha + \boldsymbol{v} = (\beta + \boldsymbol{w})^2$ とおきますと，(5.1) より

$$\alpha = \beta^2 + |\boldsymbol{w}|^2, \quad \boldsymbol{v} = 2\beta\boldsymbol{w}.$$

となります．これより $\alpha > |v|$ がわかりますので，可逆元の平方全体が Lorentz 錐になっているわけです．

---

[53] Hamilton の「H」をとっています．

[54] 8 元数は英語で octonion．その「O」をとっています．

[55] すでに注意してありますが，平方については，ジョルダン代数の積でも行列の積でも同じになります．

このように，自己双対的開凸錐体という幾何学的なオブジェクトが代数的に記述されるのが面白いところです．

終わりに...

公開講座用にテキストを書き始めたら，講義概要で述べた3項積には触れられないまま，30ページにも達してしまいました．3項積とは，長方形の行列に定義される3項の積なのですが，そもそも行列のかけ算の定義は，$m \neq n$ ならば，$m \times n$ 行列どうしのかけ算を許さないのです．でも $m \times n$ 行列と $n \times m$ 行列はかけ算ができます．その結果は m 次の正方行列なので，それにさらに $m \times n$ 行列をかければ，結果は $m \times n$ 行列になります．このように，長方形の行列の世界に自然な積を定義しようとすると，どうしても行列のかけ算を3回する必要があるのです．そのような代数的仕組みと幾何学との関係を述べるのは，また別の機会にということにしましょう．それから，解析学にも全く触れられませんでした．複素数の世界で非ユークリッド幾何のモデルが実現されますが，その世界で微分や積分等，解析をすると何が起こるのでしょうか．さらにそれを高次元化した世界では？

そこは現在活発な研究が展開されている世界で，代数学，幾何学，解析学が交錯するとても魅力的な数学の分野なのです．

参 考 文 献

[1] エビングハウス他著（成木勇夫訳），数（上・下），シュプリンガー・フェアラーク東京，1991.

[2] カントール，ソロドヴニコフ著（浅野洋監訳），超複素数入門，森北出版，1999.