合成関数の極限について

$\displaystyle\lim_{x\to a} f(x) = A \quad \cdots\cdots$ ①，かつ $\displaystyle\lim_{y\to A} g(y) = B \quad \cdots\cdots$ ② とする．

このとき，f が a で連続で，g が $A = f(a)$ で連続なら，

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = g(f(a)) = g(A) = B.$$

しかし，f が a で連続であっても, g が A で連続でないときには，

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = B \qquad\qquad (*)$$

が必ずしも成り立つ訳ではない．

以下，$g(y) = \begin{cases} 1 & (y = 0) \\ 0 & (y \neq 0) \end{cases}$ とする．

$\displaystyle\lim_{y\to 0} g(y) = 0$ であるので，①と②で $A = 0$，$B = 0$ の場合を考えることになる．

(1) $f(x) = x$ のとき，$f(x)$ は $x = 0$ で連続で $f(0) = 0 = A$．そして $g(f(x)) = g(x)$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to 0} g(f(x)) = \lim_{x\to 0} g(x) = 0 = B$ となって，$(*)$ が成り立つ．

(2) $f(x) = \left[\, x + \frac{1}{2} \,\right]$ のとき．ただし $[\,\cdot\,]$ はガウス記号．この場合も，$f(x)$ は $x = 0$ で連続で $f(0) = 0 = A$．そして $|\,x\,| < \frac{1}{2}$ のとき $f(x) = 0$．ゆえに $g(f(x)) = 1$ $(|\,x\,| < \frac{1}{2})$．したがって $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(f(x)) = 1 \neq B$.

(3) $f(x) = \begin{cases} x & (x \in \mathbb{Q}) \\ 0 & (x \notin \mathbb{Q}) \end{cases}$ のとき．このときも $f(x)$ は $x = 0$ で連続で，$f(0) = 0 = A$.

しかし，$g(f(x)) = \begin{cases} 0 & (x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}) \\ 1 & (x \notin \mathbb{Q} \text{ or } x = 0) \end{cases}$ であるから，$\displaystyle\lim_{x\to 0} g(f(x))$ は存在しない．

このようなことが起きる事情は，実際に ε–δ 論法を適用してみるとよくわかる．$\forall\varepsilon > 0$ が与えられたとしよう．②より，

$$\exists\gamma > 0 \;\text{ s.t. }\; 0 < |\,y - A\,| < \gamma \implies |\,g(y) - B\,| < \varepsilon. \quad \cdots\cdots ③$$

そしてこの γ に対して①より

$$\exists\delta > 0 \;\text{ s.t. }\; 0 < |\,x - a\,| < \delta \implies |\,f(x) - A\,| < \gamma. \quad \cdots\cdots ④$$

（あ）$\exists\delta_0 > 0$（$\delta_0 < \delta$ としてよい） s.t.

$$0 < |\,x - a\,| < \delta_0 \implies f(x) \neq A$$

となっているとき．このときは，$0 < |\,x - a\,| < \delta_0$ をみたす x に対する $f(x)$ を③の結論式における y に代入できるので，$(*)$ が成り立っている．

（い）a にいくらでも近い $x \neq a$ で $f(x) = A$ となるものがある場合をしよう．この

ような x に対しては $g(f(x)) = g(A)$ であり，もし $\lim_{x \to a} g(f(x))$ が存在するならば，その極限値は $g(A)$ でなければならず，B とは異なり得る．そして，$\lim_{x \to a} g(f(x))$ が存在しない場合もあることを上記 (3) で示した．

さて，f が a で連続，したがって $A = f(a)$ とし，また g が A で連続で $B = g(f(a))$ とする．このときは，③の結論は $y = A$ でも自明に成り立ち，④の結論も $x = a$ で成り立つ．したがって

$$\exists \gamma > 0 \ \text{ s.t. } \ |y - A| < \gamma \implies |g(y) - B| < \varepsilon, \ \cdots\cdots \text{③}'$$
$$\exists \delta > 0 \ \text{ s.t. } \ |x - a| < \delta \implies |f(x) - A| < \gamma \ \cdots\cdots \text{④}'$$

となる点が③, ④とは異なっていて，$|x - a| < \delta$ をみたす x に対する $f(x)$ を，③$'$ の y に「大手を振って」代入できるのである．