方程式 $e^z = z+1$ において $z = x+iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とすると，$e^{x+iy} = x+1+iy$ である．ゆえに，絶対値と偏角を考えると，次式を得る．

$$e^{2x} = (x+1)^2 + y^2, \qquad y \equiv \operatorname{Arctan}\frac{y}{x+1} \pmod{2\pi}.$$

第 1 式より $y = \pm\sqrt{e^{2x} - (x+1)^2}$ であるから，方程式 $e^z = z+1$ が $\mathbb{C}$ に無数の異なる解を持つことを示すためには，各 $n = 1, 2, \dots$ について，

$$\sqrt{e^{2x} - (x+1)^2} - 2n\pi = \operatorname{Arctan}\frac{\sqrt{e^{2x} - (x+1)^2}}{x+1}$$

をみたす $x = x_n$ が存在することを示せば，

$$z_n := x_n + i\sqrt{e^{2x_n} - (x_n+1)^2}$$

が $e^{z_n} = z_n + 1$ をみたすことになって，目的が達せられる．

さて，$F(x) := e^{2x} - (x+1)^2$ とおくと，$x > 0$ のとき，

$$F'(x) = 2(e^{2x} - (x+1)) > 2(e^x - (x+1)) > 0$$

であり，$F'(0) = 0$ であるから，$F(x)$ は $x \geqq 0$ で狭義単調増加である．$F(0) = 0$ ゆえ $F(x) \geqq 0$ であり，$f(x) := \sqrt{F(x)}$ も $x \geqq 0$ で狭義単調増加である．$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ゆえ，各 $n = 1, 2, \dots$ に対して，一意的に $c_n > 0$ が存在して，$f(c_n) = 2n\pi$ となる．ここで，$c_n < c_{n+1}$ $(\forall n = 1, 2, \dots)$ である．一方，

$$f_n(x) := f(x) - 2n\pi \ (n = 1, 2, \dots), \quad g(x) := \operatorname{Arctan}\frac{f(x)}{x+1}$$

とおく．このとき，$0 < g(x) < \dfrac{\pi}{2}$ $(x > 0)$ である．$h_n(x) := f_n(x) - g(x)$ とすると，$x > 0$ のとき，

$$\begin{aligned}
h_n'(x) &= f'(x) - \frac{\dfrac{1}{(x+1)^2}\bigl(f'(x)(x+1) - f(x)\bigr)}{1 + \dfrac{f(x)^2}{(x+1)^2}} \\
&= f'(x) - \frac{f'(x)(x+1) - f(x)}{(x+1)^2 + f(x)^2} \\
&= \frac{f(x)}{(x+1)^2 + f(x)^2} + \frac{f'(x)\{x(x+1) + f(x)^2\}}{(x+1)^2 + f(x)^2} > 0.
\end{aligned}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
h_n(c_n) &= f_n(c_n) - g(c_n) = -g(c_n) < 0, \\
h_n(c_{n+1}) &= f_n(c_{n+1}) - 2n\pi - g(c_{n+1}) > 2\pi - \frac{\pi}{2} > 0
\end{aligned}$$

ゆえ，$h_n(x_n) = 0$ となる x_n が開区間 (c_n, c_{+1}) に一意的に存在する．$\square$